

Elementy fizyki statystycznej

Ćwiczenia nr 9.
Rozkład wielki kanoniczny

2 stycznia 2017

1. Pokaż, że wzór opisujący średnią liczbę cząstek w zespole wielkim kanonicznym ma postać:

$$\langle N \rangle = \sum_{\Omega} N(\Omega) P(\Omega) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu}.$$

2. Pokaż, że wzór opisujący średnią energię układu w zespole wielkim kanonicznym ma postać:

$$\langle E \rangle = \sum_{\Omega} E(\Omega) P(\Omega) = -\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle.$$

3. *Statystyki gazów kwantowych.* Wyprowadź wyrażenia opisujące średnią liczbę cząstek $\langle n \rangle$ oraz średnią energię pewnego układu termodynamicznego o temperaturze T i potencjale chemicznym μ . Załóż, że każda cząstka należąca do tego układu ma energię ε . Rozwiąż zadanie przy założeniu, że

- i. w układzie może przebywać co najwyżej jedna cząstka (założenie to odpowiada zakazowi Pauliego, który prowadzi do statystyki Fermiego-Diraca),
- ii. nie ma ograniczeń co do liczby cząstek należących do badanego układu (założenie to prowadzi do statystyki Bosego-Einsteina).

Pokaż, że w granicy $\langle n \rangle \ll 1$ (tj. $\varepsilon \gg \mu + kT$) obydwie statystyki upraszczają się tego samego rozkładu granicznego $\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}$.

Odpowiedź: $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1}$, $\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1}$, gdzie górny znak obowiązuje dla rozkładu Fermiego-Diraca, zaś dolny dla rozkładu Bosego-Einsteina.