

Elementy fizyki statystycznej

Ćwiczenia nr 4.

Elementy rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki
w fizyce statystycznej, część 2

14 listopada 2016

1. Rzucamy niesymetryczną kostką do gry. Szóstka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie parzysta (nieparzysta) liczba oczek.

Odpowiedź: $P(6) = \frac{1}{4} = 0,25$, $P(1) = P(2) = \dots = P(5) = \frac{3}{20} = 0,15$.
Stąd $P(P) = 0,55$, zaś $P(N) = 0,45$.

2. Rzucamy $k = 10$ razy symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

- (a) ani razu nie wypadnie szóstka,
- (b) choć raz wypadnie szóstka.

Odpowiedź: Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z $k = 10$ - elementowych wariacji z powtórzeniami (uporządkowanych ciągów) ze zbioru o $n = 6$ elementach. Każdy z tych ciągów jest jednakowo prawdopodobny. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa $n^k = 6^{10}$. Liczba ciągów, w których szóstka nie pojawia się ani razu jest równa 5^{10} .

- (a) Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa: $P(a) = \frac{5^{10}}{6^{10}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$,
- (b) $P(\bar{a}) = 1 - P(a) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

Wynik (a) ten jest zgodny z ideą zdarzeń niezależnych. Opisuje on prawdopodobieństwo $k = 10$ zdarzeń, z których każde ma prawdopodobieństwo $\frac{5}{6}$. Za pierwszym razem nie wypadła szóstka i za drugim razem też nie wypadła, za trzecim też, ... i za dziesiątym razem też nie wypadła.

3. Dwóch studentów chodzi dość regularnie na wykłady. Obydwaj opuszczają średnio co trzeci wykład, zaś są jednocześnie obecni na co 2-gim wykładzie. Oblicz prawdopodobieństwo, że na wykładzie:

- (a) jest dokładnie jeden z nich,
- (b) nie ma żadnego.
- (c) Czy z treści zadania można wywnioskować, że studenci unikają się wzajemnie, a może są dobrymi znajomymi? (tzn. Czy obecność pierwszego studenta ma wpływ na obecność drugiego?)

Odpowiedź: Z treści zadania wynika, że $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

- (a) $P(a) = \frac{1}{3}$,
 (b) $P(b) = \frac{1}{6}$.
 (c) $P(A/B) = P(B/A) = \frac{3}{4}$. Zauważamy, że $P(A/B) \neq P(A)$ co oznacza, że zdarzenia A i B są od siebie zależne. Ponadto $P(A/B) > P(A)$, skąd wynika, że obecności studentów są *dodatnio skorelowane* (jest bardziej prawdopodobne, że studenci są dobrymi znajomymi i umawiają się co do obecności na tym samym wykładzie).
4. Żwirek i Muchomorek chodzą na wykład z Elementów Fizyki Statystycznej. Żwirek opuszcza co drugi wykład. Muchomorek opuszcza tylko 10% wykładów. Wiadomo również, że na 45% wykładów są obecni obydwaj. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- (a) choć jeden z nich jest na wykładzie,
 (b) dokładnie jeden z nich jest na wykładzie,
 (c) żaden z nich nie jest obecny na wykładzie.
 (d) na wykładzie, na którym jest Żwirek jest również Muchomorek,
 (e) na wykładzie, na którym jest Muchomorek nie ma Żwirka.

Odpowiedź: Niech Z oznacza zdarzenie polegające na tym, że Żwirek jest na wykładzie, zaś M niech oznacza, że Muchomorek jest na wykładzie. Z treści przykładu wynika, że $P(Z) = 0,5$, $P(M) = 0,9$ i $P(Z \cap M) = 0,45$. Stąd:

- (a) $P(a) = P(Z \cup M) = P(Z) + P(M) - P(Z \cap M) = 0,95$,
 (b) $P(b) = P((Z \cup M) \setminus (Z \cap M)) = P(Z \cup M) - P(Z \cap M) = 0,5$,
 (c) $P(c) = 1 - P(Z \cup M) = 0,05$.
 (d) $P(d) = P(M|Z) = 0,9 = P(M)$: oznacza to, że Z i M są zdarzeniami niezależnymi.
 (e) $P(e) = P(\bar{Z}|M) = \frac{P(\bar{Z} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \setminus (Z \cap M))}{P(M)} = \frac{P(M) - P(Z \cap M)}{P(M)} = 1 - P(Z|M) = 1 - P(Z) = 0,5$.
5. Szansa, że na pewnym skrzyżowaniu zdarzy się w danym dniu czerwca jeden lub więcej wypadków jest równa $1/3$, niezależnie od tego, co zdarzyło się w pozostałe dni. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w czerwcu będzie dokładnie 10 dni z wypadkami na tym skrzyżowaniu?

Odpowiedź: $\binom{30}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$;

6. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem:
- (a) 3 partie z 4, czy 5 partii z 8?
 (b) nie mniej niż 3 partie z 4, czy nie mniej niż 5 z 8?

Odpowiedź: W (a) bardziej prawdopodobna jest pierwsza możliwość, zaś w (b) druga.

7. Dwie osoby rzucają n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich uzyska tę samą liczbę orłów?

Odpowiedź: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$