

Elementy fizyki statystycznej

Ćwiczenia nr 6.

Rozkład mikrokanoniczny w fizyce statystycznej

14 listopada 2016

1. Rozważ układ składający się z dwóch odizolowanych od siebie części: A oraz B , z których każda zawiera dwie rozróżnialne cząstki. Niech energie podukładów wynoszą odpowiednio: $E_A = 5$ i $E_B = 1$. Zakładając, że energia każdej cząstki może być liczbą całkowitą większą lub równą zero, oblicz:
 - i. Ile wynosi liczba mikrostanów tego układu?
 - ii. Jak zmieni się liczba mikrostanów tego układu, jeśli rozważymy swobodny przepływ energii między A i B ?
 - iii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po usunięciu izolacji adiabatycznej energia podukładu A wzrośnie?
 - iv. Jaki podział energii między podukładami A i B odpowiada stanowi o największym prawdopodobieństwie termodynamicznym?

Odpowiedź: i. $W_{A+B} = 12$, ii. $W_{A+B} = 84$, iii. $P(E_A > 5) = 7/84$,
iv. $E_A = E_B = 3$.

2. Celem tego przykładu jest wykazanie równoważności entropii termodynamicznej i statystycznej: Będziemy rozważać zmianę entropii podczas adiabatycznego rozprężania gazu doskonałego. Termodynamiczny opis tego zjawiska był analizowany w zadaniu 5 (zestaw nr 1). Pokazaliśmy tam, że gdy objętość początkowa jest dwa razy mniejsza od końcowej, wtedy zmiana entropii gazu jest równa

$$\Delta S = Nk_B \ln 2,$$

gdzie N jest liczbą cząsteczek gazu, a k_B jest stałą Boltzmanna. Zadanie: Zbadaj, czy taki sam wynik można uzyskać korzystając ze wzoru Boltzmanna i przyjmując, że stan równowagi termodynamicznej odpowiada makrostanowi o największym prawdopodobieństwie termodynamicznym.

Wskazówka: Wzór Stirlinga: $\ln N! \simeq N \ln N - N$.

3. *Ciepło właściwe sieci krystalicznej - model Einsteina.* Energia pojedynczego kwantowego oscylatora harmonicznego jest dana wzorem:

$$\varepsilon(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega,$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Rozważ izolowany i zamknięty układ N niezależnych oscylatorów harmoniczných o energii E . Wyznacz temperaturę oraz pojemność cieplną C_V tego układu.

Odpowiedź: Temperatura układu jest równa

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{N + R}{R} \right),$$

$$\text{gdzie } R = \sum_{i=1}^N n_i = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2},$$

natomiast pojemność cieplna wynosi

$$C_V = \frac{N(\hbar\omega)^2}{kT^2} \frac{e^{\hbar\omega/(kT)}}{(e^{\hbar\omega/(kT)} - 1)^2}.$$