

Przykład 4.9 (skrypt 1.99).

Nyktal 2. Rozł. kanonizny
"Przyrody".

(1)

N - niezależny momentu magnet.

T - temperatura układu

$$\epsilon_i = -\mu_0 B s_i ; s_i = \pm 1$$

B - pole magnetyczne

Suma statystyczne układu:

$$Z_N = (Z_1)^N$$

Z_1 - suma stat. pojedynczego momentu magnet.

$$Z_1 = e^{-\beta \mu_0 B} + e^{\beta \mu_0 B} = 2 \cosh(\beta \mu_0 B)$$

$$\left(\cosh x \right)' = \sinh x$$

Średnie energie

$$\langle E_N \rangle = - \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} = N \left(- \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} \right) = N \langle E \rangle$$

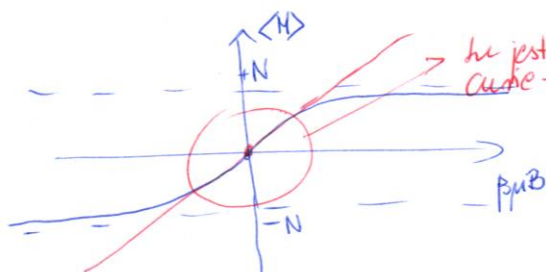
$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} - \text{śr. energie poj. spinu:}$$

$$\langle E \rangle = - \frac{1}{2 \cosh(\beta \mu_0 B)} \cdot (2 \sinh(\beta \mu_0 B)) \cdot \mu_0 B = - \mu_0 B \tanh(\beta \mu_0 B)$$

Średnie magnetyzacje

$$\langle M \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle = N \langle s_i \rangle = N \cdot \left(- \frac{\langle E \rangle}{\mu_0 B} \right) = N \tanh(\beta \mu_0 B)$$

wynik taki
dane jest
występujący
z rozł.
magnetyzacji



$$\langle M \rangle \approx N \cdot \mu_0 B \frac{B}{T}$$

Przykład 4.10 (skrypt. str. 100).

(2)

Klasyczny gaz doskonały:

układ N niezależnych, klasycznych cząstek umieszczonych w naczyniu o objętości $V=L^3$ w temperaturze $T=\text{const.}$

Suma stanów

$$\Rightarrow Z_N = (Z_1)^N - \text{gdy cząstki są rozróżnialne} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{potr. paralog} \\ \text{Gibbsa} \end{array} \right.$$

$$Z_N^* = \frac{1}{N!} (Z_1)^N - \text{gdy cząstki są nierozróżnialne}$$

Z_1 - suma stan. pojedynczej cząstki

$$Z_1 = \sum_{\Omega_1} e^{-\beta E(\Omega_1)} \quad ; \quad E(\Omega_1) - \text{energ. układu}$$

energ. pojedynczej cząstki (tylko energ. kinet.)

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

ponieważ cząstka jest mała jest stany małe
charakter ciągły zmierzając do zera; zamiast sumowania
po dostępnych stanach bierzemy całkowanie po dostępnej
przestrzeni stanów. Dla zgodności z mech. kwantową
zakładamy, że stany są dyskretnie $\Rightarrow$ objętość pojedynczej
komórki w przestr. nich jest równa $(\frac{h}{2\pi})^3$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z$$

bo z zasady
nierozróżnialności
 $dx dp_x \geq h$

$$Z_1 \approx \frac{1}{h^3} \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{\beta}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{h^3} L^3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_i e^{-\frac{\beta}{2m}(p_i^2)} \right)^3 = \left[\text{całowa Gaussa:} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right] =$$

$$= \frac{1}{h^3} V \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \right)^3 = \frac{V}{h^3} \cdot (2\pi m k_B T)^{3/2} =$$

$$= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} = \left[\frac{V}{\lambda^3} = Z_1 \right] \quad \text{gdzie } \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$$

dl. termiczny fali de Broglie'a.

$$\boxed{Z_N^x = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda^{3N}}}$$

Średnie energie gazu doskonałego:

$$\begin{aligned} \langle E_N \rangle &= - \frac{\partial \ln(Z_N^x)}{\partial \beta} = \left\{ \ln(Z_N^x) = \ln \left(V \cdot \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3N/2} \right) + \ln \left(\frac{1}{N!} \right)^{3N/2} \right\} \\ &= \text{const} + \frac{3N}{2} \ln(\beta) \\ &= \frac{3N}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{3N}{2} k_B T - \text{choć to.} \end{aligned}$$

Ciepłota gazu:

$$p = + k_B T \frac{\partial \ln(Z_N^x)}{\partial V} = \left\{ \ln(Z_N^x) = N \ln V + \text{const} \right\} = k_B T N \frac{1}{V}$$

$$\boxed{pV = N k_B T} \quad \text{r. Clapeyrona}$$