

Wykład 14

Termodynamika gazu fotnonowego

dr hab. Agata Fronczak, prof. PW

Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska

16 stycznia 2017

Plan prezentacji

- 1 Promieniowanie ciepłne
 - Podstawowe własności
 - Teoria Rayleigha-Jeansa i teoria Plancka

- 2 Termodynamika gazu fotonowego
 - Podstawowe własności gazu
 - Rozkład Plancka
 - Prawo przesunięć Wiena
 - Prawo Stefana-Boltzmannna
 - Równanie stanu gazu fotonowego

- 3 Pytania kontrolne

Promieniowanie ciepłne

Promieniowanie ciepłne lub temperaturowe

Każde ciało o temperaturze $T > 0K$ emituje (i absorbuje) promieniowanie elektromagnetyczne z pewnego zakresu długości fal. Takie promieniowanie nazywamy *ciepłnym* lub *temperaturowym*.

Widmowa zdolność emisyjna

Dla każdego ciała można określić funkcję $\mathcal{E}(\nu, T)$, tzw. *widmową zdolność emisyjną*, która zależy od rodzaju ciała, temperatury i częstości lub długości fali.

Funkcję tę definiuje się następująco: $\mathcal{E}(\nu, T)d\nu$ jest to ilość energii wysyłana w postaci promieniowania elektromagnetycznego o częstości z przedziału $(\nu, \nu + d\nu)$ przez jednostkę powierzchni ciała o temperaturze T w jednostce czasu.

Znane fakty doświadczalne dotyczące funkcji $\mathcal{E}(\nu, T)$

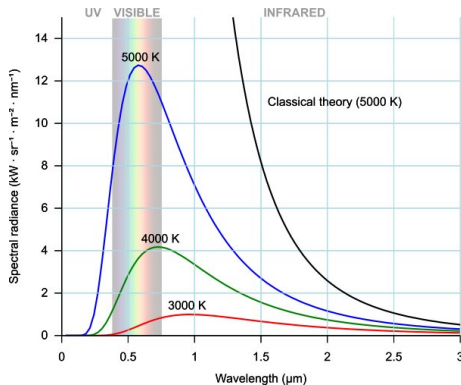
- i. **Prawo Wiena:** funkcja $\mathcal{E}(\nu, T)$ ma maksimum, którego położenie zależy liniowo od temperatury:

$$\nu_{max} \propto T, \quad \left(\text{lub: } \lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \right). \quad (1)$$

- ii. **Prawo Stefana-Boltzmann:** całkowita zdolność emisyjna ciała zależy od temperatury jak

$$\mathcal{E}(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\nu, T)d\nu \propto T^4. \quad (2)$$

Widmowa zdolność emisyjna



Rysunek: Widmowa zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego dla kilku wartości temperatury.

Katastrofa w nadfiolecie vs. rozkład Plancka

Jak powstaje promieniowanie ciepłe?

- Nazwa *promieniowanie ciepłe* odnosi się do sposobu wytwarzania tego promieniowania, którego źródłem jest chaotyczny, ciepły ruch ładunków elektrycznych związanych z elementarnymi składnikami materii.
- Z punktu widzenia modelowego, najbardziej naturalne wydaje się przyjęcie, że ruch ten ma charakter oscylacyjny: *Drgające ładunki/cząstki wysyłają promieniowanie, które gdy zostanie zaabsorbowane przez inne cząstki/ładunki pobudza je do drgań.*

Teoria Rayleigha-Jeansa

- Założenie: między drgającymi ładunkami i wysyłanym przez te ładunki promieniowaniem elektromagnetycznym istnieje *równowaga termodynamiczna*.
- Powyższe założenie pozwala sprowadzić zagadnienie badania fal do badania układu klasycznych oscylatorów. Skutek: *katastrofa w nadfiolecie*.

Teoria Plancka

- Max Planck (1900), który zauważył, że teoretyczny opis zgodny z doświadczeniem uzyskuje się przy założeniu, że oscylatory wytwarzające promieniowanie mogą przyjmować tylko pewne wybrane stany energetyczne, a emitowane przez nie promieniowanie może być wysyłane tylko w określonych porcjach.
- Innymi słowy, klasyczne oscylatory z teorii Rayleigha-Jeansa zastąpił on *oscylatorami kwantowymi*. W ten sposób skwantował on energię fal elektromagnetycznych nie wiedząc jeszcze, że fale te można traktować jak gaz cząstek - fotonów.

Gaz fotonowy: własności

- i. Fotony są bozonami o spinie $s = 1$.
- ii. Niezależnie od warunków zewnętrznych, ich liczba nie jest ustalona (jest zmienną dynamiczną), dlatego przyjmuje się, że potencjał chemiczny fotonów jest równy zero:

$$\mu = 0. \quad (3)$$

- iii. Funkcja gęstości stanów, $g(\varepsilon)$, określająca liczbę stanów fotonów w przedziale energii $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ wynosi

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = A\varepsilon^2 d\varepsilon, \quad \text{gdzie} \quad A = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (4)$$

Rozkład Plancka

Średnia liczba fotonów o energii z przedziału $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$

Korzystając z rozkładu Bosego-Einsteina, który opisuje średnią liczbę bozonów $\langle N_b \rangle$ w pojedynczym stanie kwantowym o energii ε , można obliczyć średnią liczbę bozonów o energii z zadanego przedziału. Liczba ta wynosi:

$$N(\varepsilon)d\varepsilon = \langle N_b \rangle g(\varepsilon)d\varepsilon = A \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(e^{\beta\varepsilon} - 1)}, \quad (5)$$

Energia promieniowania związanego z fotonami o częstotliwości z przedziału $(\nu, \nu + d\nu)$

Podstawiając $\varepsilon = h\nu$ w wyrażeniu (5) dostajemy średnią liczbę bozonów o częstotliwości z zadanego przedziału:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{(e^{\beta h\nu} - 1)}. \quad (6)$$

W końcu, korzystając z zależności (6), łatwo dostajemy całkowitą energię promieniowania związanego z fotonami o zadanych częstotliwościach:

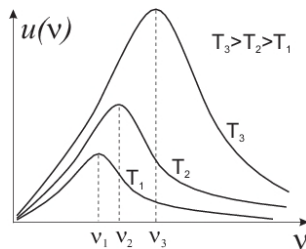
$$E(\nu, T)d\nu = h\nu N(\nu) d\nu = \frac{8\pi h V}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{(e^{\beta h\nu} - 1)}. \quad (7)$$

Widmowa gęstość energii promieniowania - rozkład Plancka

Dzieląc ostatnie wyrażenie przez objętość, V , uzyskujemy **gęstość energii promieniowania, która jest równoważna widmowej zdolności emisyjnej ciała** o temperaturze T :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \equiv \mathcal{E}(\nu, T). \quad (8)$$

Rozkład Plancka



Rysunek: Rozkład Plancka dla kilku wybranych wartości częstości.

Prawo Wiena

Położenie maksimum rozkładu

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \equiv \mathcal{E}(\nu, T) \quad (9)$$

dostajemy różniczkując go po częstotliwościach ν , a następnie przyrównując otrzymaną pochodną do zera, tj.

$$\frac{d u(\nu)}{d\nu} = 3\nu^2(e^{\beta h\nu} - 1) - \nu^3(\beta h e^{\beta h\nu}) = 0. \quad (10)$$

Podstawiając w ostatnim wyrażeniu

$$x = \beta h\nu, \quad (11)$$

dostajemy proste równanie

$$(3 - x)e^x = 3, \quad (12)$$

którego przybliżonym (dla $e^x \simeq 1 + x$) rozwiązaniem jest $x \simeq 2$.

Wstawiając ten wynik do równ. (11) otrzymujemy **prawo Wiena**:

$$\nu_{max} \simeq \frac{2k_B T}{h} \propto T. \quad (13)$$

Prawo Stefana-Boltzmannna

Prawo Stefana-Boltzmannna stwierdza, że całkowita zdolność emisyjna ciała zależy potęgowo od temperatury: $\mathcal{E}(T) \propto T^4$. Ponieważ zdolność emisyjna jest równoważna gęstości energii promieniowania elektromagnetycznego, prawo to oznacza, że również całkowita energia gazu $E(T)$ spełnia podobną zależność.

Całkowitą energię gazu fotonów można wyznaczyć wykonując poniższe całkowanie:

$$E(T) = \int_0^\infty \varepsilon \langle N_b \rangle g(\varepsilon) d\varepsilon = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon. \quad (14)$$

Następnie korzystając z wyniku całki specjalnej: $\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, dostajemy **prawo Stefana-Boltzmannna**:

$$E(T) \propto T^4. \quad (15)$$

Równanie stanu gazu fotonowego

Równanie stanu

Dla gazu fotonowego równanie stanu ma postać:

$$pV = \frac{E}{3}, \quad (16)$$

gdzie E jest całkowitą energią gazu $E \propto T^4$.

Wyprowadzenie równania stanu

Z definicji wielkiego potencjału termodynamicznego”

$$pV = k_B T \ln \Xi. \quad (17)$$

Zakładając, że fotony w gazie są niezależne i wykorzystując cechę multiplikatywności dostajemy:

$$\ln \Xi = \ln \prod_b \Xi_b = \sum_b \ln \Xi_b, \quad (18)$$

gdzie iloczyn (odpowiednio suma) po b odnosi się do wszystkich, pojedynczych bozonów w gazie...

...i dalej liczymy:

$$\ln \Xi = - \int_0^\infty \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) g(\varepsilon) d\varepsilon = - \left[\ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) \frac{A\varepsilon^3}{3} \right]_0^\infty + \frac{A}{3} \beta \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \quad (19)$$

$$= \frac{\beta}{3} \int_0^\infty \varepsilon \langle N_b \rangle g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\beta}{3} E(T), \quad (20)$$

Pytania kontrolne

- 1 Co opisuje funkcja $\mathcal{E}(\nu, T)$ nazywana widmową zdolnością emisyjną ciała?
- 2 Co opisuje rozkład Plancka? Podaj wzór i naszkicuj rysunek.
- 3 Podaj (i jeśli potrafisz wyprowadź) równanie stanów dla gazu fotonów. Czy równanie to różni się od równania stanu dla klasycznego gazu doskonałego?