Wykład 4, 5 i 6

Elementy rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki w fizyce statystycznej

dr hab. Agata Fronczak, prof. PW

Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska

1 listopada 2017

Plan prezentacji

1. Podstawowe pojęcia fizyki statystycznej: mikrostan, makrostan, ...
   - Przestrzeń stanów: przykłady
   - Rachunek prawdopodobieństwa w szkole średniej
2. Podstawy rachunku prawdopodobieństwa
   - Podstawowe pojęcia
   - Co to jest prawdopodobieństwo?
   - Elementarne własności prawdopodobieństwa
   - Prawdopodobieństwo warunkowe i zdarzenia niezależne
3. Dyskretne i ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa
   - Schemat Bernoulliego, rozkład dwumianowy
   - Dyskretna i ciągła zmienna losowa, wartość średnia, wariancja
   - Przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa
   - Rozkład normalny, Gaussa
4. Pytania kontrolne

Termodynamika klasyczna vs fizyka statystyczna

Statystyczny opis makroskopowych układów fizycznych opiera się na podejściu mikroskopowym, w którym używa się wielkości o pierwotnym znaczeniu fizycznym, takich jak prędkość, pęd, czy energia cząstki.

Celem tego opisu nie jest znalezienie konkretnych wartości tych wielkości dla i-tej cząstki, ale znalezienie ich *rozkładów prawdopodobieństw* oraz różnych *wielkości uśrednionych po tych rozkładach* i charakteryzujących całą zbiorowość cząstek.

Dział fizyki teoretycznej stosujący taki opis nazywa się fizyką statystyczną.

Inaczej mówiąc, **fizyka statystyczna wiąże stany mikroskopowe układu fizycznego (tzw. *mikrostany*) z jego własnościami makroskopowymi (z tzw. *makrostanami*) i wykorzystuje do tego celu metody probabilistyczne.**

Podstawowe pojęcia fizyki statystycznej (1)

Makrostan

Makrostanem, Γ, nazywany stan układu fizycznego jako całości, określony przez podanie wartości różnych wielkości fizycznych (np. p, T, E, $\vec{M}$) mierzonych na poziomie makroskopowym.

Mikrostan

Mikrostan, Ω, układu, w przeciwieństwie do makrostanu, jest zdefiniowany na poziomie mikroskopowym, poprzez podanie stanu (klasycznego lub kwantowego) wszystkich cząstek tworzących badany układ.

Przestrzeń stanów

Zbiór wszystkich mikrostanów, $\{\Omega\}$, układu fizycznego tworzy jego przestrzeń stanów lub przestrzeń fazową.

Podstawowe pojęcia fizyki statystycznej (2)

Trajektoria fazowa

Mikroskopowy stan układu fizycznego może zmieniać się (mówimy: ewoluować) w czasie:

$$\Omega = \Omega(t). \tag{1}$$

Sekwencja mikrostanów, które badany układ przyjmuje w czasie obserwacji tworzy trajektorię fazową.

Średnia po czasie

Chwilowa wartość dowolnej wielkości fizycznej $X(t)$ (np. energii wewnętrznej) charakteryzującej rozważany układ, zależy od mikrostanu układu w danej chwili:

$$X(t) = X\left(\Omega(t)\right). \tag{2}$$

Przy pomiarze tej wielkości fizycznej, który trwa zwykle pewien czas τ, otrzymujemy wynik $\langle X \rangle$ będący uśrednieniem tej wielkości po pewnym odcinku trajektorii fazowej. Można to zapisać w następujący sposób:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X\left(\Omega(t)\right) dt. \tag{3}$$

Podstawowe pojęcia fizyki statystycznej (3)

Zespół statystyczny

W równowagowej fizyce stat. zamiast zajmować się pojedynczym układem $\mathcal{A}$, rozważamy zbiór składający się z bardzo dużej liczby $\mathcal{N}$ układów, które są do siebie *podobne*. Mówiąc o podobieństwie układów mamy na myśli to, że każdy z nich spełnia te same warunki, które wg naszej wiedzy są spełnione przez układ $\mathcal{A}$. Oznacza to, że każdy układ z tego zbioru został przygotowany w taki sam sposób co układ $\mathcal{A}$ i że wykonujemy na nim takie samo doświadczenie, jakie wykonujemy na układzie $\mathcal{A}$.

Taki zbiór nosi nazwę zespołu statystycznego.

Średnia po zespole

Mając zespół statystyczny możemy postawić pytanie: W ilu układach wchodzących w skład tego zespołu otrzymamy określoną wartość wielkości X? Dla ustalenia uwagi załóżmy, że spośród $\mathcal{N}$ układów zespołu została ona zaobserwowana w $\mathcal{N}_X$ układach. Wtedy ułamek

$$P(X) = \frac{\mathcal{N}_X}{\mathcal{N}}, \qquad \text{gdzie} \qquad \mathcal{N} \to \infty, \tag{4}$$

który można uzyskać **obserwując *zespół* interpretujemy jako prawdop. uzyskania wyniku X w *pojedynczym układzie* $\mathcal{A}$.**

Znając prawdopodobieństwo $P(X)$ (4) możemy łatwo wyznaczyć średnią ważoną wielkości X w badanym zespole:

$$\langle X \rangle = \sum_X X P(X). \tag{5}$$

Podstawowy postulat fizyki statystycznej

Równość średniej po zespole (5) i średniej po czasie (3) jest **podstawowym postulatem fizyki statystycznej**.

Przestrzeń stanów: klasyczny gaz doskonały

Klasyczny gaz doskonały

Stan fizyczny pojedynczej cząstki klasycznej:

- wektora położenia: $\vec{r} = [x, y, z]$,
- wektor pedu: $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$.

Mikrostan klasycznego gazu doskonałego składającego się z N cząstek:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \ldots, \vec{p}_N\} \\ &= \{x_1, y_1, z_1 \ldots, x_N, y_N, z_N, p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1} \ldots, p_{x_N}, p_{y_N}, p_{z_N}\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Przykładowy **makrostan** gazu doskonałego (gdy energia wewnętrzna gazu ma określoną wartość):

$$\Gamma_E = \{\Omega\}_E, \tag{7}$$

jest reprezentowany przez zbiór mikrostanów, dla których spełniony jest warunek:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2 \right) = 2mE, \tag{8}$$

gdzie $p_{x_i} = p_{x_i}(\Omega)$, $p_{y_i} = p_{y_i}(\Omega)$ oraz $p_{z_i} = p_{z_i}(\Omega)$, zaś m jest masą pojedynczej cząstki.

Przestrzeń stanów: prosty model paramagnetyka

Prosty model paramagnetyka

- Teoretyczne modele paramagnetyzmu zakładają, że paramagnetyczne atomy mają własne momenty magnetyczne o wartości μ_0, które **nie oddziałują ze sobą**.
- Zewnętrzne pole magnetyczne, $\vec{B}$, przeciwdziała bezładnemu, cieplnemu ruchowi tych momentów i dąży do uporządkowania ich kierunków zgodnie z polem.
- W najprostszych modelach magnetyzmu zakłada się, że pojedyncze momenty mogą ustawić się tylko w dwóch kierunkach: w kierunku zgodnym z polem zewnętrznym i przeciwnie do pola.

Moment magnetyczny związany z i-tym atomem paramagnetycznym:

$$\mu_i = \mu_0 s_i, \qquad \text{gdzie} \qquad s_i = \pm 1. \tag{9}$$

s_i nosi nazwę zmiennej spinowej lub (krótko) spinu.

Mikrostan paramagnetyka składającego się z N atomów paramagnetycznych:

$$\Omega = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}. \tag{10}$$

Przykładowym **makrostanem** układu jest zbiór wszystkich mikrostanów, w których magnetyzacja M ma określoną wartość:

$$\Gamma_M = \{\Omega\}_M, \qquad \text{tzn. spełniających warunek:} \qquad \mu_0 \sum_{i=1}^{N} s_i(\Omega) = M. \tag{11}$$

Podstawa programowa z matematyki dla szkoły ponadgimnazjalnej

W zakresie: *Elementów statystyki opisowej, teorii prawdopodobieństwa i kombinatoryki*

Zakres podstawowy

- obliczanie średniej ważonej i odchylenia standardowego zestawu danych, interpretacja tych parametrów dla danych empirycznych,
- zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i dodawania,
- obliczanie prawdopodobieństw w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zakres rozszerzony

- wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych,
- obliczanie prawdopodobieństwa warunkowego,
- twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Co trzeba uzupełnić, aby zacząć wykład z fizyki statystycznej

- Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

  podstawowe pojęcia, definicja prawdopodobieństwa, elementarne własności prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo warunkowe, zdarzenia niezależne
- Rozkłady prawdopodobieństwa

  schemat Bernoulliego, dyskretna i ciągła zmienna losowa, wartość średnia, wariancja, przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa, rozkład normalny

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa (1)

Mikrostan $\equiv$ **Zdarzenie elementarne**

Makrostan $\equiv$ **Zdarzenie losowe**

Przestrzeń stanów $\equiv$ **Przestrzeń zdarzeń elementarnych**

Definicja 3.1

Niech $\{\Omega\}$ będzie ustalonym **zbiorem zdarzeń elementarnych** (zbiór taki nazywamy również *przestrzenią* zdarzeń elementarnych). **Zdarzeniami losowymi** nazywamy podzbiory zbioru $\{\Omega\}$, które tworzą rodzinę (tj. zbiór zbiorów) $\mathcal{G}$ taką, że

i. $\varnothing \in \mathcal{G}$, gdzie $\varnothing$ oznacza zbiór pusty,

ii. jeżeli $A \in \mathcal{G}$, to $\bar{A} = \{\Omega\} \backslash A \in \mathcal{G}$,

iii. jeżeli $\forall_i A_i \in \mathcal{G}$, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{G}$.

Prosty przykład 1

Rzucamy jeden raz monetą. Możliwe wyniki pojedynczego rzutu to: orzeł O i reszka R. Oznacza to, że zbiorem zdarzeń elementarnych jest $\{\Omega\} = \{O, R\}$, a zbiór możliwych zdarzeń losowych (tj. zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\{\Omega\}$) ma postać: $\mathcal{G} = \{\{\Omega\}, O, R, \varnothing\}$.

Prosty przykład 2

Rzucamy monetą do chwili pojawienia się orła. Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem o nieskończonej, ale przeliczalnej liczbie elementów: $\{\Omega\} = \{O, RO, RRO, RRRO, \dots\}$. Wśród elementów zbioru $\mathcal{G}$ są takie zdarzenia losowe jak: A_n - liczba reszek poprzedzających pojawienie się orła jest większa od n, B_n - liczba reszek w zdarzeniu elementarnym jest podzielna przez n, itd.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa (2)

Definicja 3.2

i. **Zdarzeniem przeciwnym** $\bar{A}$ do zdarzenia A jest zdarzenie polegające na tym, że nie zachodzi zdarzenie A, tzn. $\bar{A} = \{\Omega\}\backslash A$.

ii. **Zdarzeniem pewnym** jest zdarzenie, które zawiera wszystkie elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych.

iii. **Zdarzenie niemożliwe** to takie, które nie może zajść. Odpowiada mu zbiór $\varnothing$.

iv. Mówimy, że **zdarzenie** A **pociąga za sobą zdarzenie** B, gdy z zajścia zdarzenia A wynika zajście zdarzenia B.

v. **Sumą zdarzeń** $A_1, A_2, \ldots A_n$ nazywamy zdarzenie polegające na zajściu co najmniej jednego z nich, czyli odpowiadające sumie zbiorów: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

vi. **Iloczynem zdarzeń** $A_1, A_2, \ldots A_n$ nazywamy zdarzenie polegające na jednoczesnym zajściu wszystkich wymienionych zdarzeń i oznaczamy je: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

vii. Zdarzenia A i B nazywamy **wykluczającymi się**, jeżeli ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym, tzn. $A \cap B = \varnothing$.

viii. **Różnicą zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie polegające na zajściu zdarzenia A i nie zajściu zdarzenia B. Różnica zdarzeń spełnia poniższą zależność: $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa (3)

Prosty przykład

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami losowymi. Za pomocą A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$ i odpowiednich działań na zbiorach zapisz następujące zdarzenia: Spośród zdarzeń A i B:

i. zaszło co najmniej jedno,

ii. zaszły oba,

iii. zaszło tylko zdarzenie A,

iv. zaszło dokładnie jedno zdarzenie, ale nie wiadomo które,

v. nie zaszło żadne ze zdarzeń.

Rozwiązanie:

i. zaszło A lub zaszło B, tzn. $A \cup B$,

ii. zaszło A i zaszło B, tzn. $A \cap B$,

iii. zaszło A i nie zaszło B, tzn. $A \cap \bar{B}$,

iv. zaszło A i nie zaszło B lub zaszło B i nie zaszło A, tzn. $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$,

v. nie zaszło A i nie zaszło B, tzn. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{\Omega\} \backslash (A \cup B)$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa dla równoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych

Definicja 3.3

Niech przestrzeń $\{\Omega\}$ składa się ze skończonej liczby zdarzeń elementarnych i zajście każdego z nich jest *jednakowo możliwe*. Jeśli

i. $\mathcal{N}_A$ jest liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, zaś

ii. $\mathcal{N}$ jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych,

to **prawdopodobieństwem** zdarzenia A nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\mathcal{N}_A}{\mathcal{N}}. \tag{12}$$

Prosty przykład 1

W pojedynczym rzucie monetą mamy: $\{\Omega\} = \{O, R\}$ i $\mathcal{G} = \{\{\Omega\}, O, R, \varnothing\}$.

Jeśli moneta jest symetryczna wtedy prawdopodobieństwo kolejnych zdarzeń losowych jest równe: $P(\{\Omega\}) = 1$, $P(O) = P(R) = \frac{1}{2}$, $P(\varnothing) = 0$.

Prosty przykład 2

W pojedynczym rzucie kostką do gry mamy: $\{\Omega\} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6\}$, gdzie Ω_n oznacza wyrzucenie n oczek.

Jeśli kostka jest symetryczna wtedy wszystkie zdarzenia elementarne mają takie samo prawdopodobieństwo: $P(\Omega_n) = \frac{1}{6}$.

Przykładowym zdarzeniem losowym w tym doświadczeniu może być zdarzenie $A_n = \{\Omega_{n+1}, \dots, \Omega_6\}$ odpowiadające wyrzuceniu liczby oczek większej od n. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe $P(A_n) = 1 - \frac{n}{6}$ (12), ponieważ $\mathcal{N}_{A_n} = 6 - n$, zaś $\mathcal{N} = 6$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa dla różnoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych

Definicja 3.4

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę postaci $(\{\Omega\}, \mathcal{G}, P)$, gdzie $\{\Omega\}$ jest zbiorem zdarzeń elementarnych, $\mathcal{G}$ oznacza zbiór zdarzeń losowych, a P jest prawdopodobieństwem określonym dla wszystkich elementów zbioru $\mathcal{G}$.

Definicja 3.5

Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się ze skończonej liczby wzajemnie wykluczających się zdarzeń: $\{\Omega\} = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{\mathcal{N}}\}$, przy czym prawdopodobieństwa każdego z tych zdarzeń wynoszą odpowiednio:

$$P(\Omega_1) = p_1, \qquad P(\Omega_2) = p_2, \qquad \ldots, \qquad P(\Omega_{\mathcal{N}}) = p_{\mathcal{N}}. \tag{13}$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego w tej przestrzeni probabilistycznej $A = \{\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, ...\Omega_{i_k}\}$ jest równe

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}. \tag{14}$$

Prosty przykład

Według rozkładu pociąg z Warszawy do Krakowa odjeżdża z Dworca Centralnego o godz. 10.00. Można zadać pytanie: Jaka jest szansa, że pociąg odjedzie z Warszawy bez opóźnień? lub Jaka jest szansa, że opóźnienie nie będzie większe niż 15 min. W tej sytuacji, gdy opóźnienie pociągu liczymy w minutach, przestrzeń zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\{\Omega\} = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{60}, \Omega_{61}, ...\},$$

gdzie Ω_n oznacza, że pociąg ma n minut opóźnienia. Naturalnym jest oczekiwanie, że $P(\Omega_1) \neq P(\Omega_{61}) \neq P(\Omega_{100})$.

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa wg Kołomogorowa (1931)

Definicja 3.6

Niech $\{\Omega\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, a $\mathcal{G}$ zbiorem zdarzeń losowych **Prawdopodobieństwem** nazywamy funkcję $P : \mathcal{G} \to R$, która przypisuje zdarzeniom liczby rzeczywiste, taką że

i. dla każdego $A \in \mathcal{G}$ zachodzi $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,

ii. $P(\{\Omega\}) = 1$,

iii. jeżeli dla dowolnych $i \neq j$ mamy $A_i \cap A_j = \varnothing$, wówczas

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P\left(A_i\right). \tag{15}$$

Elementarne własności prawdopodobieństwa

i. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi 0:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{16}$$

ii. Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest nie większe od 1:

$$P(A) \leqslant 1. \tag{17}$$

iii. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B, tzn. $A \subseteq B$ (A jest podzbiorem B), to:

$$P(A) \leqslant P(B). \tag{18}$$

iv. Prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń wyraża się wzorem:

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B). \tag{19}$$

v. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B, $A \subseteq B$, wtedy:

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A). \tag{20}$$

vi. Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{21}$$

vii. Gdy zdarzenia A i B wykluczają się wzajemnie, tzn. $A \cap B = \varnothing$ (tj. $P(A \cap B) = 0$), wtedy z własności iv mamy:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{22}$$

viii. Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych jest równa jedności:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{23}$$

Własności prawdopodobieństwa: przykłady

Prosty przykład 1

Niech $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Zdarzenia wykluczające się spełniają równ. (22). Podstawiając do tego równania prawdopodobieństwa podane w tym przykładzie dostajemy: $P(A \cup B) = \frac{13}{12} > 1$, co jest sprzeczne z równ. (17). Oznacza to, że zdarzenia A i B nie mogą się wykluczać.

Prosty przykład 2

Opiekun roku ocenia szanse studenta na zdanie wymaganych egzaminów: z Matematyki i z Podstaw Fizyki. Wiadomo, że egzamin z Matematyki poprzednio zdało 80% zdających, więc prawdopodobieństwo zdania tego egzaminu można ocenić na $0,8$. Na podstawie wyników z poprzednich lat, wiadomo jeszcze, że szansa zdania co najmniej jednego egzaminu wynosi $0,9$, a obydwu: $0,5$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdania egzaminu z Podstaw Fizyki.

Niech M oznacza zdarzenie polegające na tym, że losowy student zdał egzamin z Matematyki, a F niech oznacza zdarzenie odpowiadające zaliczeniu Podstaw Fizyki. Z równ. (21) dostajemy:

$$P(F) = P(M \cap F) + P(M \cup F) - P(M) = 0,8.$$

Własności prawdopodobieństwa: przykłady

Prosty przykład 3

Żwirek i Muchomorek chodzą na wykład z Elementów Fizyki Statystycznej. Żwirek chodzi na co drugi wykład. Muchomorek opuszcza tylko 10% wykładów. Wiadomo również, że na 45% wykładów są obecni obydwaj. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

i. choć jeden z nich jest na wykładzie,

ii. dokładnie jeden z nich jest na wykładzie,

iii. żaden z nich nie jest obecny na wykładzie.

Rozwiązanie

Niech Z oznacza zdarzenie polegające na tym, że Żwirek jest na wykładzie, zaś M niech oznacza, że Muchomorek jest na wykładzie. Z treści przykładu wynika, że $P(Z) = 0,5$, $P(M) = 0,9$ i $P(Z \cap M) = 0,45$.

i. Z równ. (21) mamy:

$$P(Z \cup M) = P(Z) + P(M) - P(Z \cap M) = 0,95.$$

ii. Zdarzenie to można zapisać jako $C = (Z \cup M) \backslash (Z \cap M)$. Ponieważ dla dowolnych zbiorów Z i M mamy $Z \cap M \subset Z \cup M$, dlatego z równ. (20) wynika:

$$P(C) = P(Z \cup M) - P(Z \cap M) = 0,95 - 0,45 = 0,5.$$

iii. Zdarzenie to odpowiada zdarzeniu $C = \bar{Z} \cap \bar{M} = \{\Omega\} \backslash (Z \cup M)$. Korzystając z równ. (20) dostajemy:

$$P(C) = P(\{\Omega\}) - P(Z \cup M) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe i zdarzenia niezależne

Definicja 3.7

Prawdopodobieństwo warunkowe, $P(A|B)$, zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B definiuje się jako iloraz prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń $A \cap B$ przez prawdopodobieństwo zdarzenia B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{24}$$

Definicja 3.8

Mówimy, że zdarzenia A i B są **niezależne**, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{25}$$

Powyższa równość nie wyklucza sytuacji, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$. Gdy natomiast $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$ wtedy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego dostajemy następujące równania:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{oraz} \quad P(B|A) = P(B), \tag{26}$$

które stanowią warunek konieczny i dostateczny niezależności zdarzeń A i B.

Definicja 3.9

Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots A_n$ są **niezależne**, gdy

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m}) \tag{27}$$

dla każdego $m \leqslant n$ i każdego m-wyrazowego rosnącego ciągu liczb naturalnych $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_m \leqslant n$.

Prawdopodobieństwo warunkowe i zdarzenia niezależne: przykłady

Prosty przykład 1

Losujemy jedną rodzinę spośród 4 rodzin z dwojgiem dzieci:

$$\{\Omega\} = \{(ch, ch),\ (ch, dz),\ (dz, ch),\ (dz, dz)\}.$$

Zdarzenie $\Omega = (dz, ch)$ oznacza, że w tej rodzinie starszym dzieckiem jest dziewczynka: dz, a młodszym chłopiec: ch. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano rodzinę z dwoma chłopcami (zdarzenie A), jeśli wiemy, że ta rodzina spełnia dodatkowe warunki (zdarzenie B):

i. starsze dziecko jest chłopcem,

ii. jest co najmniej jeden chłopiec.

Rozwiązanie

i. Jeśli starsze dziecko jest chłopcem, wtedy:

$$B = \{(ch, ch),\ (ch, dz)\} \quad \text{zaś} \quad A \cap B = \{(ch, ch)\}.$$

Dostajemy stąd:

$$P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

ii. Jeśli w wybranej rodzinie jest co najmniej jeden chłopiec, wtedy:

$$B = \{(ch, ch), (ch, dz),\ (dz, ch)\} \quad \text{zaś} \quad A \cap B = \{(ch, ch)\}$$

Dostajemy stąd:

$$P(A|B) = \frac{1}{3}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe i zdarzenia niezależne: przykłady

Prosty przykład 2

Czy jeśli B zwiększa szansę zajścia A, to A zmniejsza szansę zajścia B?

Rozwiązanie

Jeśli zajście zdarzenia B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A, to zachodzi nierówność:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A).$$

Wynika stąd, że

$$P(A \cap B) > P(A)P(B).$$

Podstawiając ostatnią nierówność do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe $P(B|A)$ dostajemy:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B).$$

Jeśli zajście zdarzenia A zwiększa szansę zajścia zdarzenia B, gdy również B zwiększa szansę zajścia A.

Schemat Bernoulliego

Schemat doświadczeń losowych Bernoulliego

1. *Schematem Bernoulliego* nazywamy ciąg niezależnych, wielokrotnych powtórzeń tego samego doświadczenia losowego, w wyniku którego mogą zajść tylko dwa zdarzenia: A i $\bar{A}$.
2. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są równe: $P(A) = p$ (gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$) oraz $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.
3. W schemacie Bernoulliego zakłada się, że wyniki kolejnych prób są zdarzeniami niezależnymi.

Wzór Bernoulliego

Jeżeli zajście zdarzenia A nazwiemy sukcesem, zaś $\bar{A}$ porażką, to prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n próbach wyraża się wzorem Bernoulliego:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{28}$$

gdzie symbol Newtona, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, oznacza liczbę k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego

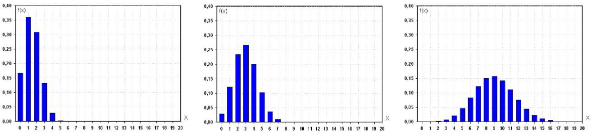
(symbol ten mówi na ile sposobów jesteśmy w stanie zrealizować k sukcesów, gdy wykonamy n niezależnych prób).

Rozkład dwumianowy

Wzór Bernoulliego $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ **definiuje tzw. rozkład dwumianowy**

1. Rozkład dwumianowy jest przykładem **dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa** dla **zmiennej losowej** k, reprezentującej liczbę umownych sukcesów w n niezależnych doświadczeniach losowych, których wynikiem może być wspomniany sukces lub zdarzenie przeciwne do sukcesu, określane jako porażka.

2. Zmienna ta może przyjmować dyskretne wartości $k = 0, 1, \ldots n$ i dla każdej z tych wartości jest określone prawdopodobieństwo realizacji $P_n(k)$.



n=5,p=0.3 n=10,p=0.3 n=30,p=0.3

Rysunek: Przykładowe realizacje rozkładu dwumianowego dla różnych wartości n i p.

Rozkład dwumianowy: przykład

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Prosty przykład

Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:

i. 5 oczek dokładnie 3 razy?
ii. 6 oczek co najmniej raz?

Rozwiązanie

i. $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$,
ii. $\sum_{k=1}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

Rozkład dwumianowy: wartość średnia

Rozkład dwumianowy jest **unormowany**

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1, \tag{29}$$

Wartość średnia rozkładu dwumianowego

Traktując prawdopodobieństwa $P_n(k)$ jak **wagi** odpowiednich wartości zmiennej losowej k, można policzyć **średnią ważoną** zmiennej k. Średnia ta odpowiada wartości średniej lub wartości oczekiwanej rozkładu:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{n} k P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{30}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k-1=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \tag{31}$$

$$= np \sum_{k-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np, \tag{32}$$

Rozkład dwumianowy: odchylenie standardowe, wariancja

Odchylenie standardowe od wartości średniej (wzór ogólny)

Kwadrat odchylenia standardowego od wartości średniej jest nazywany **wariancją rozkładu** i jest on zdefiniowany w następujący sposób:

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k - \langle k \rangle)^2 P_n(k) \tag{33}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2\langle k \rangle k + \langle k \rangle^2\right) P_n(k) \tag{34}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 P_n(k) - 2\langle k \rangle \sum_{k=0}^{n} k P_n(k) + \langle k \rangle^2 \sum_{k=0}^{n} P_n(k) \tag{35}$$

$$= \langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 \tag{36}$$

$$= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2, \tag{37}$$

Odchylenie standardowe w rozkładzie dwumianowym

W rozkładzie dwumianowym, kwadrat odchylenia standardowego (wariancja) jest równy:

$$\sigma_k^2 = npq. \tag{38}$$

Zmienna losowa, rozkład prawdopodobieństwa

Co to jest zmienna losowa?

Zmienna losowa jest to funkcja przypisująca zdarzeniom elementarnym liczby. Dzięki pojęciu zmiennej losowej, rozważania nt. prawdopodobieństwa różnych zjawisk losowych możemy łatwo opisać posługując się aparatem matematycznym.

Przykład dyskretnej zmiennej losowej:
zmienna spinowa $s_i = \pm 1$.

Przykład ciągłej zmiennej losowej:
energia wewnętrzna gazu doskonałego będącego w kontakcie cieplnym z termostatem $E \in [0, +\infty)$.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej

Rozkład prawdopodobieństwa określa prawdopodobieństwo przyjęcia każdej możliwej wartości przez zmienną losową (jeśli jest ona *dyskretna*), lub jej prawdopodobieństwo znalezienia się w konkretnym przedziale (jeśli jest *ciągła*).

Dyskretna zmienna losowa, wartość średnia, wariancja

Definicja 3.16

Rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej X jest zbiorem par $\{x_i, p_i\}$, gdzie x_i jest wartością zmiennej X, zaś

$$p_i = P(x_i) \tag{39}$$

jest prawdopodobieństwem jej wystąpienia.

i. Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_N$ oznaczają wszystkie różne wartości dyskretnej zmiennej losowej X oraz $\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$, wtedy mówimy, że rozkład jest unormowany.

ii. Wartość średnią (oczekiwaną) dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa wyznacza się w następujący sposób:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i).$$

iii. Wariancja dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa, będąca kwadratem odchylenia standardowego zmiennej losowej X od jej wartości średniej, jest równa:

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2 \, P(x_i),$$

$$\text{gdzie} \quad \langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \, P(x_i).$$

Ciągła zmienna losowa, wartość średnia, wariancja

Definicja 3.17

Funkcją gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X (lub krótko: *gęstością zmiennej losowej*) nazywamy funkcję $p(x)$ określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, taką że: $p(x) \geqslant 0$ (jest ona nieujemna) oraz dla dowolnych $a < b$ zachodzi

$$\int_a^b p(x)dx = P(a < X < b), \tag{40}$$

gdzie $P(a < X < b)$ jest prawdopodobieństwem, że zmienna X jest z przedziału (a, b).

i. Dla dowolnej funkcji $p(x)$, będącej gęstością prawdopodobieństwa zachodzi warunek unormowania: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

ii. Wartość średnią (oczekiwaną) ciągłej zmiennej losowej o gęstości $p(x)$ wyznacza się w następujący sposób:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

iii. Wariancja ciągłej zmiennej losowej jest równa:

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \, p(x)dx,$$

$$\text{gdzie} \quad \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx.$$

Przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa (1)

Dyskretny rozkład zero-jedynkowy

Zmienna losowa może przyjmować dwie wartości: $X = \{0, 1\}$.

Rozkład prawdopodobieństwa: $P(0) = 1 - p$, $P(1) = p$.

Wartość oczekiwana: $\langle x \rangle = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.

Wariancja: $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Dyskretny rozkład jednostajny (lub jednorodny)

Rozkład jednostajny dyskretny to taki, w którym jednakowe prawdopodobieństwo przypisane jest do n różnych liczb rzeczywistych $k_1, k_2, \ldots, k_n$, a inne liczby mają przypisane prawdopodobieństwo równe zero. Niekiedy zakłada się dodatkowo, że $k_1, \ldots, k_n$ są wszystkimi liczbami całkowitymi z pewnego przedziału $[a, b]$, gdzie $a, b \in \aleph$. Przy takim założeniu mamy:

$$P(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } a \leqslant k \leqslant b \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}, \tag{41}$$

gdzie

$$n = b - a + 1, \tag{42}$$

zaś kolejne liczby k_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są dane wzorem

$$k_i = a + i - 1. \tag{43}$$

Wartość oczekiwana: $\langle k \rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{1}{n} = \cdots = \frac{a+b}{2}$.

Wariancja: $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \frac{1}{n} - \langle k \rangle^2 = \cdots = \frac{n^2-1}{12}$.

Przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa (2)

Rozkład dwumianowy

Zmienna losowa przyjmuje wartości dyskretne: $k = 0, 1, \dots n$.

Rozkład prawdopodobieństwa: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Wartość oczekiwana: $\langle k \rangle = np$.

Wariancja: $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np(1-p)$.

Rozkład Poissona

Jeśli w schemacie Bernoulliego liczba prób jest bardzo duża, a prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie jest bardzo małe tak, że spełnione są warunki:

$$\lim_{n\to\infty,\ p\to 0} np = \lambda = const, \tag{44}$$

wówczas liczba sukcesów $k = 0, 1, 2, \dots$ podlega rozkładowi Poissona:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{45}$$

Wartość oczekiwana: $\langle k \rangle = \lambda$.

Wariancja: $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \lambda$.

Przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa (3)

Rozkład jednostajny ciągły

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b)$, jeżeli prawdopodobieństwo otrzymania w pojedynczym doświadczeniu dowolnej wartości x z pewnego przedziału $(x - dx, x + dx)$ jest stałe i takie samo dla każdej wartości x.

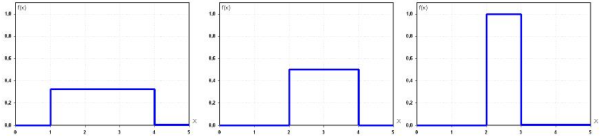
Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$p(x) = \begin{cases} c & \text{dla} \quad a \leqslant x < b \\ 0 & \text{dla} \quad x < a \quad \text{lub} \quad x \geqslant b \end{cases} . \tag{46}$$

Z warunku unormowania mamy: $c = \frac{1}{b-a}$.

Wartość oczekiwana: $\langle x \rangle = c \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}$.

Wariancja: $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.



Rysunek: Przykładowe realizacje rozkładu jednostajnego ciągłego.

Przegląd znanych rozkładów prawdopodobieństwa (4)

Rozkład wykładniczy

Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu jest dana wzorem:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases} . \tag{47}$$

Wartość oczekiwana:

$$\langle x \rangle = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

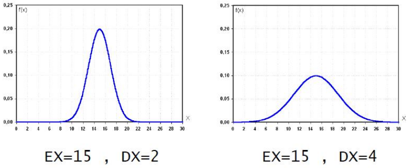
Wariancja:

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Rozkład normalny, Gaussa

Znaczenie rozkładu Gaussa

Rozkład normalny zwany też **rozkładem Gaussa** jest jednym z najważniejszych rozkładów prawdopodobieństwa. Jego znaczenie wynika z częstości występowania tego rozkładu w opisie zjawisk naturalnych.



Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

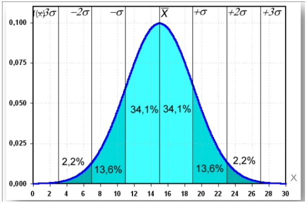
Zmienna losowa $X \in \Re$ podlega rozkładowi normalnemu (Gaussa) jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}, \tag{48}$$

gdzie parametry a i b reprezentują odpowiednio wartość **średnią** (oczekiwaną) i **odchylenie standardowe** zmiennej losowej:

$$\langle x \rangle = a, \qquad \sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = b. \tag{49}$$

Własności rozkładu Gaussa



Rysunek: Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa z rozkładu Gaussa znajduje się w przedziale o szerokości 2σ, 4σ i 6σ wokół wartości średniej (tutaj: $\langle x\rangle = 15$, $\sigma_x = 4$), tj. $P(|X-a| \leqslant b) = \int_{a-b}^{a+b} p(x)dx \simeq 0,682$.

Centralne twierdzenie graniczne

Rozkłady znormalizowane

Mówimy, że rozkład zmiennej losowej jest znormalizowany, gdy $\langle x \rangle = 0$ i $\sigma_x = 1$. Rozkład normalny (Gaussa) przybiera wówczas postać:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{50}$$

Dowolny rozkład zmiennej X o wartości oczekiwanej $\langle x \rangle = a$ i odchyleniu standardowym $\sigma_x = b$ można znormalizować, tworząc rozkład zmiennej Y, będącej liniową funkcją zmiennej wyjściowej:

$$Y = \frac{X - a}{b}. \tag{51}$$

Twierdzenie 3.1

Jeśli X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, mającym wartość oczekiwaną μ i skończoną wariancję σ^2, to zmienna losowa postaci

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, \tag{52}$$

jest opisana znormalizowanym rozkładem Gaussa gdy $n \to \infty$.

Pytania kontrolne

1. Co oznacza pojęcie mikrostan (makrostan) układu fizycznego. Podaj przykłady mikrostanów (makrostanów).
2. Co oznacza pojęcie zespół statystyczny. O czym mówi podstawowy postulat fizyki statystycznej.
3. W jaki sposób definiujemy prawdopodobieństwo warunkowe. Jakie zdarzenia losowe nazywamy niezależnymi.
4. Co to jest schemat Bernoulliego?
5. Na przykładzie dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa wyjaśnij, w jaki sposób definiuje się wartość średnią i odchylenie standardowe (lub wariancję) dyskretnej zmiennej losowej.