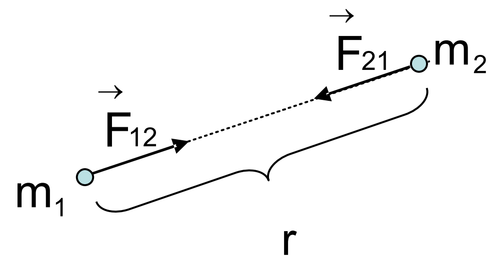
Grawitacja

Pole Grawitacyjne

Prawo powszechnego ciążenia opisuje siłę z jaką oddziałują dwie masy punktowe oddalone o r. Kierunek i zwrot **siły grawitacji**, bo tak ją określamy, jest przedstawiony na rysunku.

$$\boxed{F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



G jest stałą grawitacji a *r* odległością między masami (w przypadku ciał kulistych – między środkami tych mas).

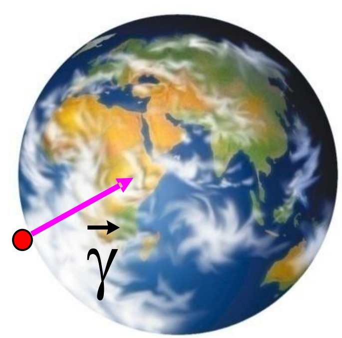
$$G \cong 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Możemy powiedzieć, że obiekt posiadający masę wytwarza wokół siebie **pole grawitacyjne** i za pośrednictwem tego pola oddziałuje na inny obiekt obdarzony masą, który znajduje się w pewnej od niego odległości. W takim przypadku wygodnie jest wprowadzić pewną wielkość, która będzie charakteryzowała to pole, a ciało będące przyczyną tego pola nazwać źródłem pola grawitacyjnego.

Jeżeli ciało o masie M jest źródłem pola i w tym polu umieścimy ciało o niewielkiej masie *m*, to możemy zdefiniować wielkość (wektorową), którą nazwiemy **natężeniem pola grawitacyjnego**:

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

Z powyższej definicji natężenia pola grawitacyjnego wynika, że ma ono taki sam kierunek i taki sam zwrot jak wektor siły grawitacji.



Ponieważ dla ciała na powierzchni Ziemi $F = G\frac{Mm}{R_Z^2} = mg$

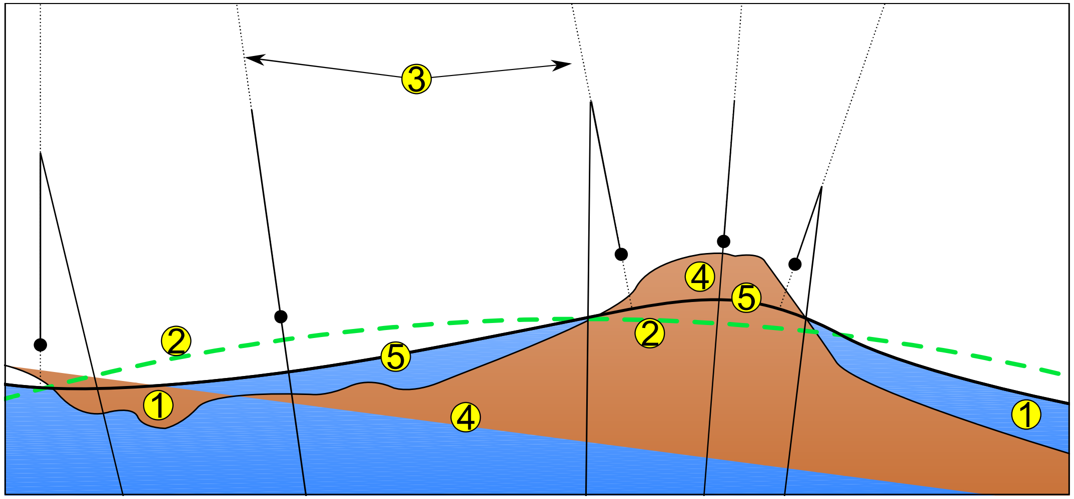
to wartość natężenia pola grawitacyjnego jest równa przyspieszeniu grawitacyjnemu na powierzchni Ziemi: $\boxed{\gamma = g = G\frac{M}{R^2}}$

http://fizyka.if.pw.edu.pl/images/6/60/Praca.grawitacja.pdf

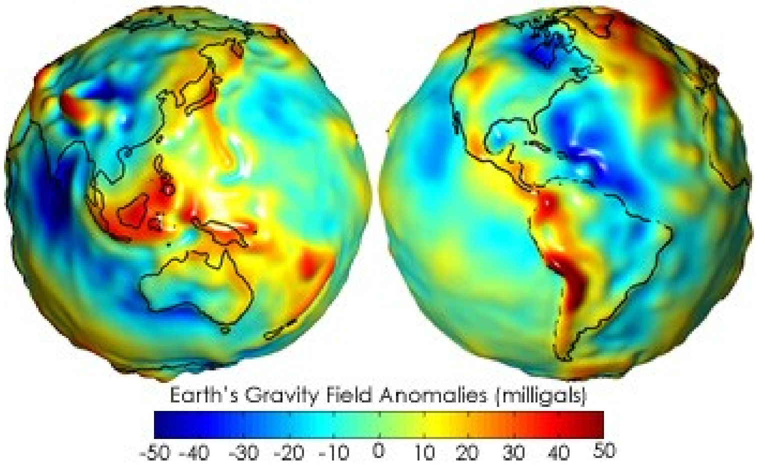
Geoida

Teoretyczna powierzchnia, na której potencjał siły ciężkości Ziemi jest stały, równy potencjałowi siły ciężkości na średnim poziomie mórz otwartych i przedłużoną umownie pod powierzchnią lądów.

Jako powierzchnia ekwipotencjalna, geoida w każdym swym punkcie jest prostopadła do kierunku siły ciężkości (lokalnego pionu). Pojęcie wprowadził w 1873 roku niemiecki matematyk Johann Benedict Listing.



1. Ocean
2. Elipsoida
3. Pion lokalny
4. Kontynent
5. Geoida



Wybrane wartości przyspieszenia ziemskiego [m/s²]

biegun – 9,83332
normalne – 9,80665
równik – 9,78030
Warszawa – 9,8123
Kraków – 9,8105

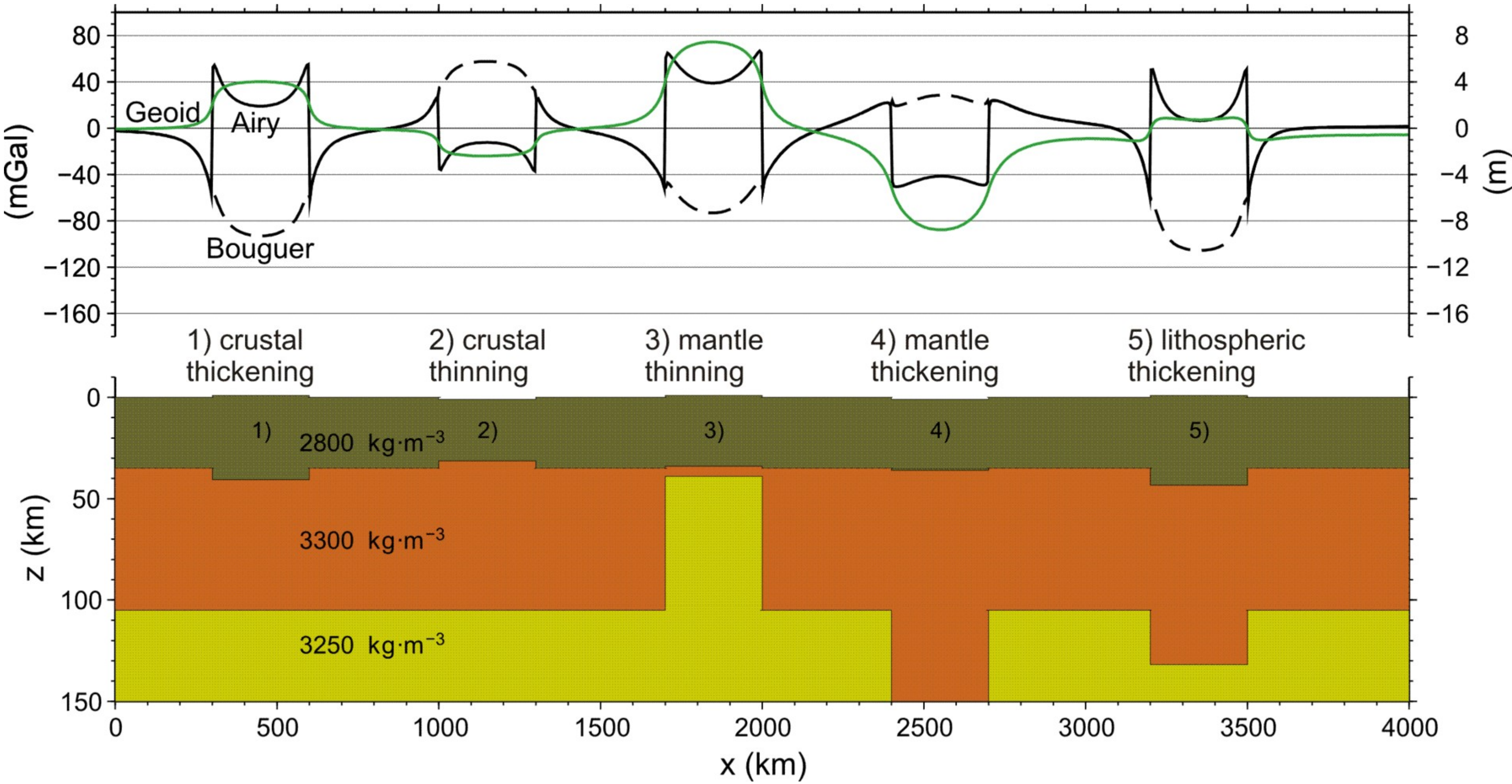
https://pl.wikipedia.org/wiki/Geoida https://en.wikipedia.org/wiki/Geoid https://pl.wikipedia.org/wiki/Przyspieszenie_ziemskie

Geoida

The geoid is the shape that the surface of the oceans would take under the influence of Earth's gravity and rotation alone, in the absence of other influences such as winds and tides.

Variations in the height of the geoidal surface are related to density anomalous distributions within the Earth.

Geoid measures help thus to understand the internal structure of the planet.



https://pl.wikipedia.org/wiki/Geoida https://en.wikipedia.org/wiki/Geoid

Zadanie 1

Obliczyć zależność przyspieszenia siły ciężkości od głębokości (odległości mierzonej do środka Ziemi) znając przyspieszenie na jej powierzchni.

Rozwiązanie

Jako h oznaczamy głębokość.

Wartość przyspieszenia wewnątrz planety zależy tylko od masy Ziemi znajdującej się w kuli o promieniu R_z-h:

$$F_g = g_{wew} \cdot m = G \frac{mM_{wew}}{(R_z - h)^2}$$

$$g_{wew} = G \frac{M_{wew}}{(R_z - h)^2}$$

M_{wew} to masa kuli jest wyrażona przez (zakładamy jednorodny rozkład gęstości naszej planety):

$$M_{wew} = \frac{4}{3}\pi(R_z - h)^3 \rho$$

Wykorzystując przyspieszenie g na powierzchni Ziemi mamy:

$$\left.\begin{aligned} M_z &= \frac{4}{3}\pi R_z^3 \rho \\ F &= G\frac{mM_z}{R_z^2} = gm \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = \frac{4}{3} G\pi R_z \rho \Rightarrow \rho = \frac{3g}{4G\pi R_z}$$

Po podstawieniu wyznaczonej gęstości do wzoru na masę M_{wew} otrzymujemy:

$$M_{wew} = (R_z - h)^3 \frac{g}{GR_z}$$

Przyspieszenie siły ciężkości w funkcji głębokości jest zatem opisane zależnością:

$$g_{wew}(h) = \frac{(R_z - h)^3 g}{(R_z - h)^2 R_z} = (R_z - h)\frac{g}{R_z}$$

http://fizyka.if.pw.edu.pl/images/8/85/Polegraw.pdf

Zadanie 2

Zakładając, że masa Księżyca jest n razy mniejsza od masy Ziemi, obliczyć ile razy dłużej spada ciało z tej samej wysokości na Księżycu w stosunku do Ziemi. Przyjąć gęstość masy Ziemi i Księżyca jako jednakowe.

Rozwiązanie

Wysokości z jakich spada ciało są takie same. Możemy zapisać je jako drogi w ruch jednostajnie przyspieszonym:

$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad h = \frac{g_k t_k^2}{2}$$

Obliczając stosunek czasu spadania na Księżycu do czasu spadania na Ziemi mamy:

$$\frac{t_k}{t} = \sqrt{\frac{g}{g_k}} = \sqrt{\frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M_k}{R_k^2}}} = \sqrt{n\frac{R_k^2}{R^2}} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R_k}{R}$$

gdzie przez n oznaczyliśmy stosunek masy Ziemi do masy Księżyca. Stosunek mas jest równy stosunkowi promieniu obu ciał niebieskich w trzeciej potędze (wynika to wyrażenia na objętość kuli i założenia o jednakowej gęstości Ziemi i Ksieżyca):

$$n = \frac{M}{M_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^3 \qquad M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

Wykorzystując powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$\frac{t_k}{t} = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{6}}$$

Siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą. **Energia potencjalna** ciała o masie m znajdującego się w polu grawitacyjnym Ziemi (lub innej planety) można wyrazić wzorem:

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$$

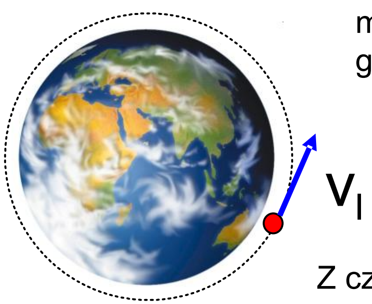
Przyjmujemy konwencję w ramach której energia potencjalna w nieskończenie dużej odległości ($r \to \infty$) wynosi 0.

Jeżeli ciało porusza się w małej odległości od powierzchni Ziemi, wtedy możemy posłużyć się przybliżonym wzorem na energię potencjalną w postaci:

$$\boxed{E_p = mgh}$$

gdzie h jest wysokością, na której znajduje się ciało liczonej względem powierzchni Ziemi lub innego, zbliżonego do powierzchni Ziemi (planety), poziomu odniesienia. **Należy pamiętać, że powyższe przybliżenie jest słuszne tylko gdy odległość h jest dużo mniejsza od odległości od środka Ziemi (*h*<<R_z)**

Ciało, któremu nadamy prędkość na powierzchni Ziemi może spaść na Ziemię, może zacząć okrążać Ziemię po orbicie o stałym promieniu lub opuścić zupełnie pole przyciągania ziemskiego. Prędkość jaką należy nadać ciału, by okrążało Ziemię po orbicie o **stałym promieniu o promieniu zbliżonym do promienia Ziemi**, nazywamy **pierwszą prędkością kosmiczną** aby **opuściło pole przyciągania ziemskiego** – **drugą prędkością kosmiczną.**



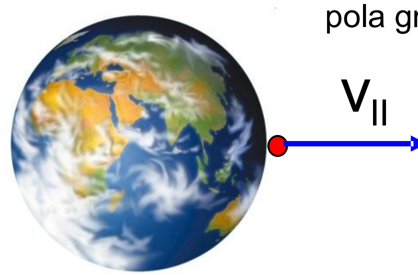
Wartość **pierwszej prędkości kosmicznej** możemy uzyskać przyrównując siłę grawitacji do siły dośrodkowej:

$$G\frac{mM_Z}{r^2} = \frac{mv_I^2}{r}$$

Z czego otrzymujemy dla $r = R_Z$:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} = 7.9\ \mathrm{km/s}$$

Wartość **drugiej prędkości kosmicznej** jest minimalna prędkością ucieczki z pola grawitacyjnego Ziemi.



Energia kinetyczna ciała opuszczającego pole grawitacyjne Ziemi musi być co najmniej równa energii potencjalnej na powierzchni Ziemi

$$G\frac{mM_Z}{R_Z} = \frac{mv_{II}^2}{2}$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

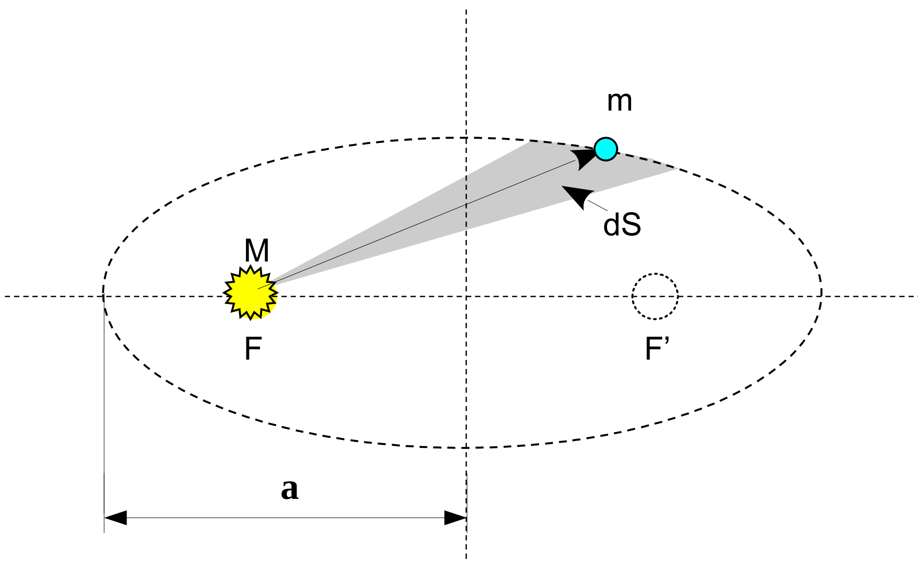
http://fizyka.if.pw.edu.pl/images/6/60/Praca.grawitacja.pdf

Prawa Keplera

1. **Pierwsze prawo Kelpera**: Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce

2. **Drugie prawo Kelpera**: Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni orbity, **dS/dt = const** .

3. **Trzecie prawo Kelpera**: Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity, $\mathbf{T^2 \sim a^3}$. Dla orbity kołowej $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$



http://fizyka.if.pw.edu.pl/images/6/60/Praca.grawitacja.pdf

Zadanie 3

Średnia odległość planety Wenus od Słońca wynosi d_W=108 208 926 km, Ziemi d_Z=149 597 890 km, a Marsa d_M= 227 936 637km. Obliczyć okresy obiegu Wenus i Marsa dookoła Słońca.

<u>Rozwiązanie</u>

Z trzeciego prawa Keplera dla Wenus i Ziemi wynika:

$$\frac{d_W^3}{d_Z^3} = \frac{T_W^2}{T_Z^2}$$

Podstawiając T_Z=1 rok mamy: $T_W = \sqrt{\frac{T_Z^2 d_W^3}{d_Z^3}} = 0.615$ lat

Stosując analogiczne rozumowanie dla Marsa mamy: $T_M = \sqrt{\frac{T_Z^2 d_M^3}{d_Z^3}} = 1.88$ lat

GPS, grawitacja i teoria względności

42

Error margin for position predicted by GPS is $15m$. So GPS system must keep time with accuracy of at least $15m/c$ which is roughly $50ns$.

So $50ns$ error in timekeeping corresponds to $15m$ error in distance prediction.
Hence, for $38\mu s$ error in timekeeping corresponds to $11km$ error in distance prediction.

If we do not apply corrections using GR to GPS then $38\mu s$ error in timekeeping is introduced PER DAY.

You can check it yourself by using following formulas

$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ...clock runs relatively slower if it is moving at high velocity.

$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2R}}}$ ...clock runs relatively faster because of weak gravity.

T_1 = 7 microseconds/day

T_2 = 45 microseconds/day

$T_2 - T_1$ = 38 microseconds/day

use values given in this very good article.

And for equations refer to hyperphysics.

So Stephen Hawking is right! :-)

share cite improve this answer

edited Nov 18 '10 at 15:02

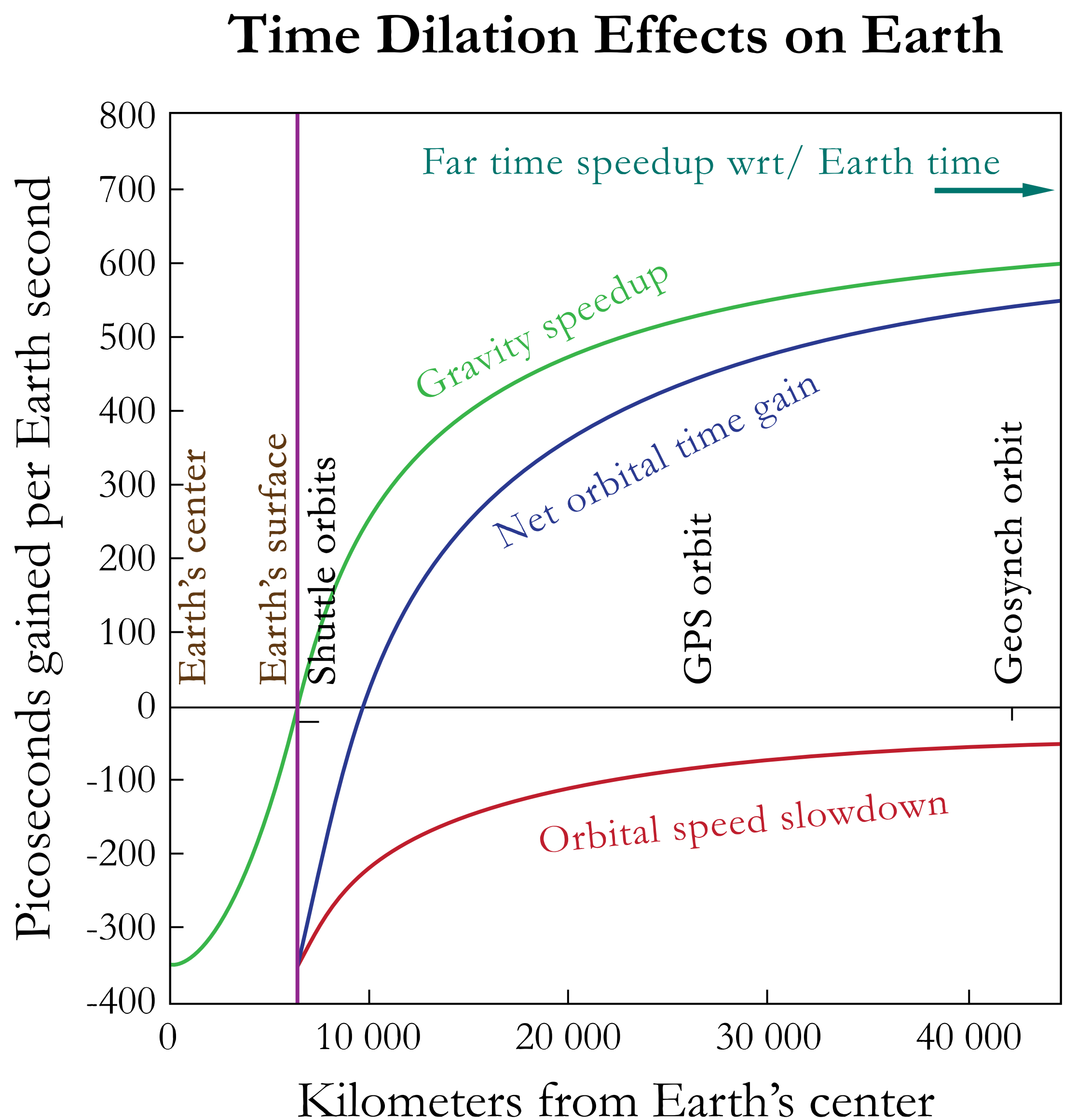
answered Nov 18 '10 at 14:53

Pratik Deoghare

4,139 1 24 40

https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System
http://physics.stackexchange.com/questions/1061/why-does-gps-depend-on-relativity

GPS, grawitacja i teoria względności



https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System
http://physics.stackexchange.com/questions/1061/why-does-gps-depend-on-relativity