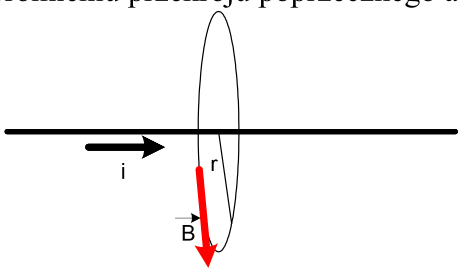
16. Pole magnetyczne, indukcja

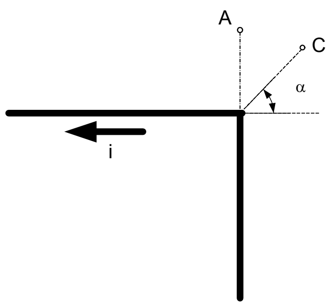
Wybór i opracowanie Marek Chmielewski

16.1. Znaleźć indukcje pola magnetycznego w odległości ***r*** od nieskończone długiego przewodnika walcowego o promieniu przekroju poprzecznego a w którym płynie prąd ***I***.

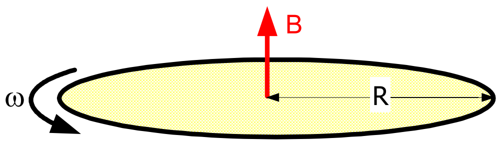


16.2. Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego wytworzonego przez prąd o natężeniu ***i*** płynący przez nieskończenie długi przewodnik zgięty pod kątem prostym:

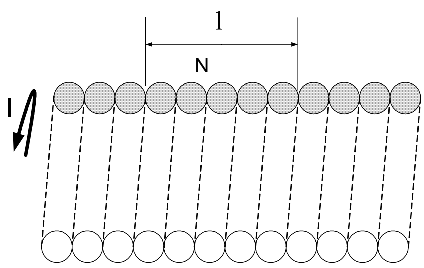
a) W punkcie A leżącym w płaszczyźnie przewodnika odległym od jego końca o odległość ***h***, na przedłużeniu jednego z ramion przewodnika (rys)
b) W punkcie C odległym o ***h*** od osi przewodnika, leżący pod kątem ***α*** do osi jednego z ramion przewodnika.



16.3. Jednorodnie naładowana ładunkiem ***Q*** cienka tarcza o promieniu ***R***, obraca się z prędkością kątową ***ω*** dookoła swojej osi. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego w jej geometrycznym środku.

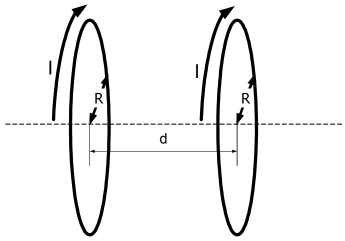


16.4. Wyznaczyć wartość indukcji pola magnetycznego wewnątrz nieskończonego solenoidu, w którym na ***l*** jego długości przypada ***N*** ciasno ułożonych zwojów w których płynie prąd ***I***.

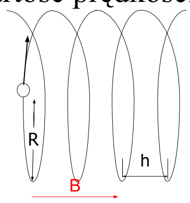


16.5. Wyznaczyć wartości gęstości energii pola magnetycznego wewnątrz nieskończonego solenoidu o promirniu ***R***, gęstości liniowej zwojów ***n***, przez który płynie prąd ***i***.

16.6. Dwa zwoje drutu o promieniu ***R*** ustawionych tak jak na rysunku odległych o ***d*** tak, że ich osie symetrii się pokrywają. W solenoidach płyną prądy ***I*** w tym samych kierunkach. Wyznaczyć wartość indukcji pola magnetycznego na osi łączącej obydwa zwoje w zależności od odległości pomiędzy zwojami.



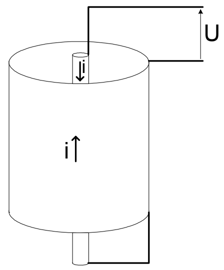
16.7. Elektron porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji ***B*** po linii śrubowej o promieniu ***R*** i skoku ***h***, wyznaczyć wartość prędkości elektronu.



16.8. W taśmie metalowej o szerokości ***a*** i grubości ***d*** płynie prąd ***I***. Taśma znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji ***B***. Obliczyć różnicę potencjałów między punktami ***A*** i ***C*** taśmy, jeżeli wiadomo, że w jednostce objętości materiału z jakiego zrobiona jest taśma, znajduje się ***n*** elektronów na jednostkę objętości.

16.9. Dany jest jednorodny pierścień o promieniu ***r*** i oporze ***R***. W dwóch dowolnych punktach A i B tego pierścienia przyłączono dwa długie przewody, tak by ich kierunki tworzyły przedłużenia promieni tego pierścienia, zasilane ze źródła o napięciu ***U***. Obliczyć indukcję magnetyczną w środku pierścienia.

16.10. Wzdłuż osi cienkościennej rury biegnie prostoliniowy przewód. Prąd ***I*** płynący w rurze wraca przewodem do źródła. Wyznaczyć wielkość indukcji pola magnetycznego jako funkcję odległości od środka rury.



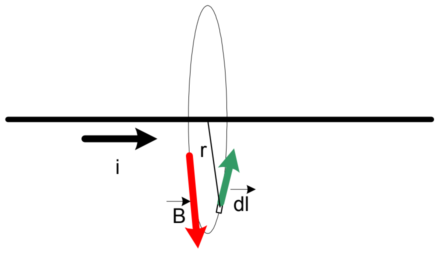
16.11. Pręt o długości ***l*** i masie ***m*** położono na dwóch równoległych szynach nachylonych pod kątem α do poziomu. Szyny znajdują się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji ***B***, skierowanym prostopadle do poziomu. Znaleźć prędkość ruchu pręta w przypadku gdy szyny nie są połączone oraz w przypadku, gdy szyny są zwarte na jednych końcach oporem ***R***. Przyjąć, że pręt może ślizgać się bez tarcia oraz że opór pręta i szyn można zaniedbać.

16.12. Na dwóch równoległych poziomych szynach położono pręt o oporze ***R***, długości ***l*** i masie ***m***. Szyny są połączone ze źródłem napięcia ***U*** i znajdują się na całej swojej długości w jednorodnym polu magnetycznym, indukcji ***B***, skierowanej prostopadle do szyn. Współczynnik tarcia pręta o szyny wynosi μ. Jaka będzie maksymalna prędkość pręta?

16.13. Dwie równoległe, poziome szyny są połączone kondensatorem o pojemności ***C***. Na szynach położono pręt o długości ***l*** i masie ***m***. Z jakim przyspieszeniem ***a*** będzie poruszał się pręt, jeżeli działa na niego zewnętrzna siła pozioma ***F*** oraz jednorodne pole magnetyczne ***B*** wszędzie prostopadłe do pręta i do płaszczyzny ruchu.

16. Rozwiązania

16.1.R. Korzystamy z prawa Ampera



$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{B}d\vec{l} = Bdl$$

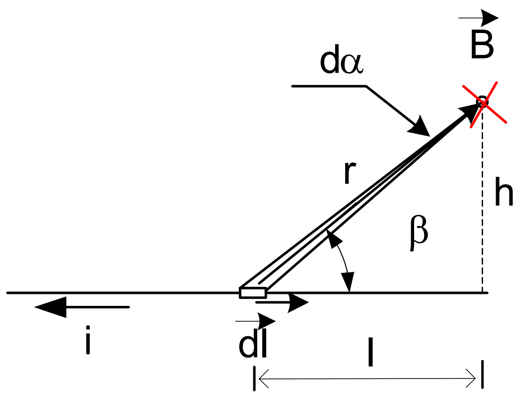
$$B = const$$

$$B\oint dl = \mu_0 i$$

$$B2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

16.2.R. a) Korzystamy z prawa Biota-Savarta. Każdy z odcinków przewodu potraktujemy oddzielnie, a wynik końcowy uzyskamy z superpozycji uzyskanych wyników cząstkowych.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\beta$$

$$r = \frac{h}{\sin\beta}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{h^2}\sin^3\beta$$

$$tg\beta = \frac{h}{l} \qquad l = \frac{h}{tg\beta}$$

$$dl = -\frac{h}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$dB = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\beta}{h}d\beta$$

$$B = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\beta}{h}d\beta$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\beta d\beta = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}$$

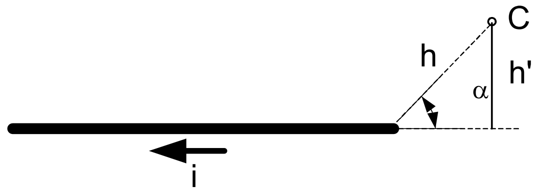
Dla drugiej części przewodu punkt A leży dokładnie na jego przedłużeniu a więc wektor ***dl*** jest zawsze równoległy do wektora ***r***.

$$d\vec{l} \parallel \vec{r} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{r} \equiv 0$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow B = 0$$

Wynik końcowy jest równy jest zatem: $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}$ Jest to dokładnie połowa wartości uzyskanej w pierwszym zadaniu.

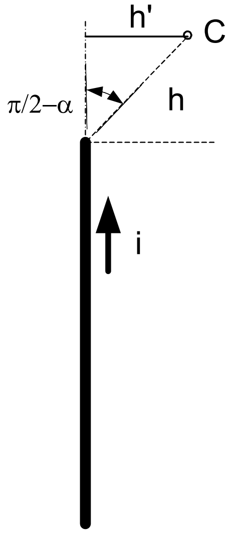
b) Analogicznie jak w punkcie a) rozpatrujemy każdą z półprostych osobno i tak ja w punkcie poprzednim wykorzystamy prawo Biota Savarta.



Dla pierwszej półprostej h=h'=hsinα oraz górna granica całkowania to α.

W wyniku uzyskujemy:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi h \sin\alpha} \int_0^{\alpha} \sin\beta d\beta = \frac{\mu_0 i}{4\pi h \sin\alpha}(1 - \cos\alpha)$$



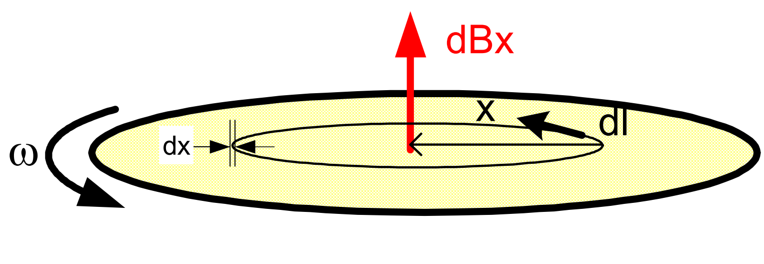
Dla drugiej półprostej h'=hsin(π/2-α)=hcosα i całkujemy od π/2-α do 0 (zgodnie z kierunkiem prądu dla pierwszej półprostej). W wyniki uzyskujemy

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi h \cos\alpha} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{0} \sin\beta d\beta = \frac{\mu_0 i}{4\pi h \cos\alpha}(1 - \sin\alpha)$$

Wynik końcowy to $B=B_1+B_2$

16.3.R.

Podzielimy całą tarcze na pierścienie o promieniu r i grubości dx. Określimy wartość indukcji pola magnetycznego dB_x od ładunku przemieszczającego się wraz z pierścieniem.



$$d(dB_x) = \frac{\mu_0 di}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{x}}{x^3}$$

$$d\vec{l} \perp \vec{x} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{x} = dlx$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 di}{4\pi}\frac{1}{x^2}\int_l dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{1}{x^2}2\pi x$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 di}{2x}$$

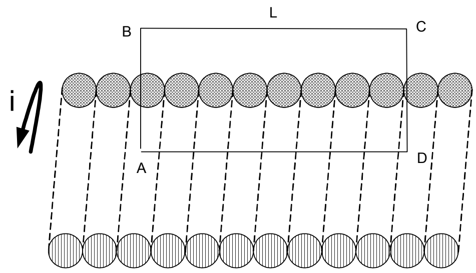
$i = \dfrac{dq}{dt}$ W czasie t = T przez przekrój dx przemieści się ładunek $dq = \dfrac{Q}{\pi R^2} 2\pi x dx$

czyli przepłynie prąd $di = \frac{dq}{T}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow di = \frac{\frac{Q}{\pi R^2} 2\pi x dx}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega \frac{Q}{\pi R^2} x dx \qquad dB_x = \frac{\mu_0 \omega Q x dx}{\pi R^2 2x} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} dx$$

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \int_0^R dx \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

16.4.R. Korzystamy z prawa Ampera $\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$



Założenia:
- nieskończona długość solenoidu,
- wewnątrz jednorodne pole magnetyczne B
- na zewnątrz wartość indukcji pola magnetycznego wynosi 0

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \underbrace{\int_A^B \vec{B} d\vec{l}}_{1} + \underbrace{\int_B^C \vec{B} d\vec{l}}_{2} + \underbrace{\int_C^D \vec{B} d\vec{l}}_{3} + \underbrace{\int_D^A \vec{B} d\vec{l}}_{4} = \mu_0 N i$$

1 - $\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \int_A^B \vec{B} d\vec{l} = 0$

2 - $\vec{B} = 0 \Rightarrow \int_B^C \vec{B} d\vec{l} = 0$

3 - $\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \int_C^D \vec{B} d\vec{l} = 0$

4 - $B = const \Rightarrow \int_D^A \vec{B} d\vec{l} = Bl$

$$Bl = \mu_0 N i$$

$$B = \mu \frac{N}{l} i$$

16.5.R. W celu wyznaczenia energii posłużymy się indukcyjnością nieskończonego solenoidu.
Korzystając z prawa Faradaya $U = -L \frac{di}{dt}$

Dla części środkowej długiego solenoidu ($U = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ gdzie Φ_B jest strumieniem pola magnetycznego) wypadkowy strumień przechodzi przez N zwojów dlatego

$$U = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow N\Phi_B = Li \qquad N\Phi_B = NB\pi R^2 = nlB\pi R^2$$

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz solenoidu wynosi (patrz poprzednie zadanie) $B=\mu_0 ni$

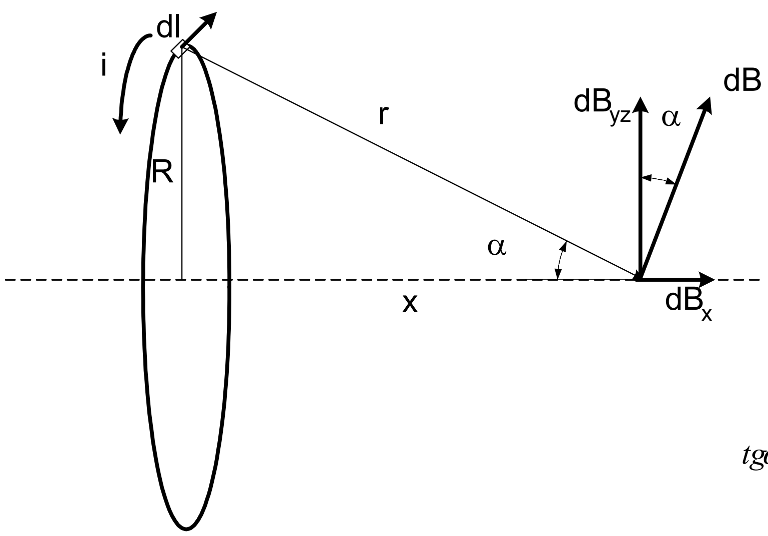
$$N\Phi_B=\mu_0 n^2 il\pi R^2 \qquad L=\frac{N\Phi_B}{i}=\mu_0 n^2 l\pi R^2$$

$$|U|=U_m=L\frac{di}{dt}\Rightarrow P=U_m i=Li\frac{di}{dt} \qquad P=\frac{dE_B}{dt}=Li\frac{di}{dt} \qquad dE_B=Lidi$$

$$E_B=L\frac{i^2}{2}=\mu_0 n^2 l\pi R^2\frac{i^2}{2} \qquad e_B=\frac{E_B}{V}=\frac{E_B}{l\pi R^2}=\mu_0 n^2 l\pi D^2\frac{i^2}{2l\pi R^2}=\frac{\mu_0 n^2 i^2}{2}$$

Dodatkowo w powietrzu $e_B=\frac{\mu_0 n^2 i^2}{2}=\frac{B^2}{2\mu_0} \qquad B=\mu_0 H \qquad e_B=\frac{HB}{2}$

16.6.R. Rozpatrzymy pojedynczy zwój.



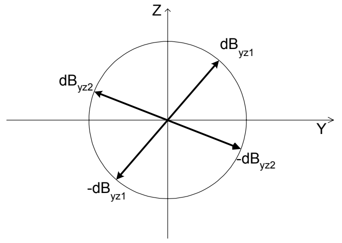
$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$
$$d\vec{B}=d\vec{B}_x+d\vec{B}_{yz}=dB_x\hat{x}+dB_y\hat{y}$$
$$dB_x=\left|d\vec{B}\right|\sin\alpha$$
$$\left|d\vec{B}_{yz}\right|=\left|d\vec{B}\right|\cos\alpha$$
$$d\vec{l}\perp\vec{r}\Rightarrow\left|d\vec{B}\right|=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

$$tg\alpha=\frac{R}{x}\Rightarrow x=\frac{R}{tg\alpha} \qquad r=\sqrt{x^2+R^2} \qquad \sin\alpha=\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$dB_X=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R}{\sqrt[3/2]{x^2+R^2}}dl\Rightarrow B_x=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R}{\sqrt[3/2]{x^2+R^2}}\int_l dl$$

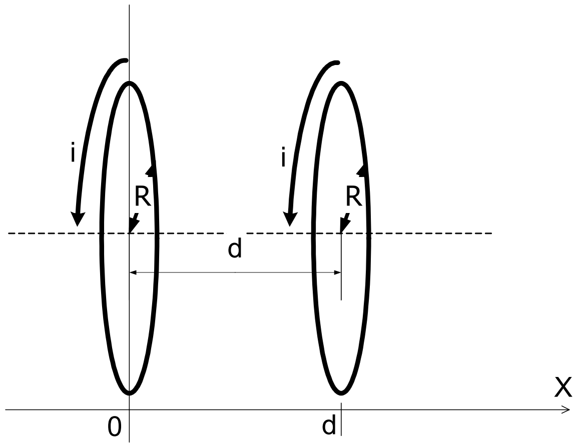
$$B_x=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R}{\sqrt[3/2]{x^2+R^2}}2\pi R=\frac{\mu_0 iR^2}{2\sqrt[3/2]{x^2+R^2}}$$

Łatwo można zauważyć, że dla składowej indukcji pola magnetycznego B_y wynik podobnej kalkulacji daje dokładnie zero. Ze względu na symetrię kołową, dodając wektory, o tej samej długości, rozmieszczone na okręgu możemy wykazać zerowanie się składowej wypadkowej indukcji pola magnetycznego B_{yz}.



$$B_w = B_x$$

$$B_w = \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt[3/2]{x^2+R^2}} + \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt[3/2]{(x-d)^2+R^2}}$$



16.7.R.

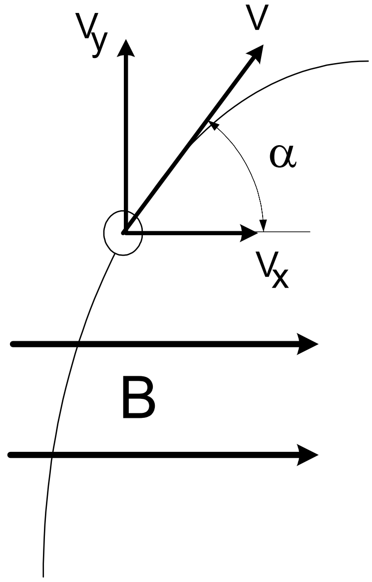
Elektron będzie poruszał się po linii śrubowej, gdy jego prędkość będzie skierowana pod kątem α do B.

V_x – prędkość stała odpowiedzialna za skok linii śrubowej

V_y – prędkość prostopadłą do kierunku wektora indukcji pola magnetycznego

Pole magnetyczne na składową V_y działa dokładnie w sposób jaki można opisać za pomocą siły dośrodkowej

Działa siła pola magnetycznego F_l



$$\vec{F}_l = q\vec{V}_y \times \vec{B} \qquad \vec{V}_y \perp \vec{B} \Rightarrow F_l = qV_y B$$

F_l – jest to siła dośrodkowa $\quad F_d = \frac{mV_y^2}{R} \quad$ czyli

$$\frac{mV_y^2}{R} = qV_y B \qquad \Rightarrow \qquad V_y = \frac{qBR}{m}$$

$$V_x = \frac{h}{T} \qquad T = \frac{2\pi R}{V_y} \qquad V_x = \frac{hV_y}{2\pi R}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} = [V_x, V_y] \qquad |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$|\vec{V}| = V_y\sqrt{1+\left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2} = \frac{qBR}{m}\sqrt{1+\left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}$$

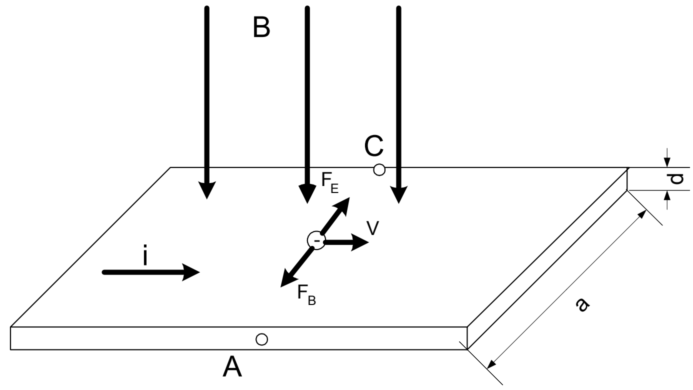
16.8.R.

Na poruszające się ładunki działa siła

$\vec{F}_B = e\vec{V} \times \vec{B}$

Po woduje ona powstanie różnicy napięć pomiędzy punktami A i C.
To napięcie następnie powoduje powstanie pola elektrycznego, przeciwnie skierowanego do siły pola magnetycznego

$$\vec{F}_E = \vec{E}e$$



W stanie równowagi wypadkowa
artość siły wynosi 0

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$$
$$F_E - F_B = 0$$
$$e\vec{E} = e\vec{V} \times \vec{B}$$

$eE = eVB \Rightarrow E = VB$ Ze względu na analogie z kondensatorem płaskim U=aE

$U = aVB$ Należ

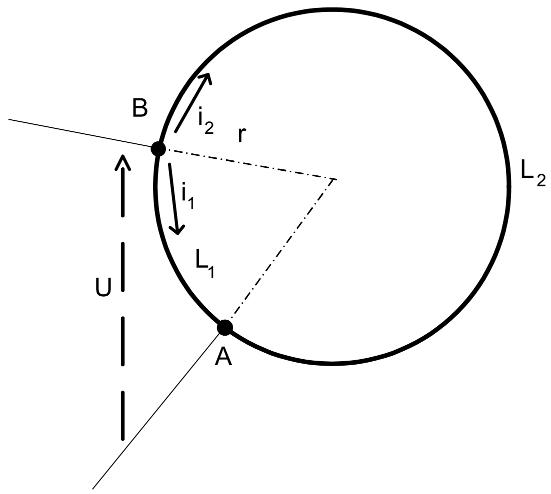
W czasie Δt elektrony pokonają drogę VΔt, całkowity ładunek przepływający przez powierzchnię S=ad, wynosi ΔQ=neVΔtad

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = neVad \Rightarrow V = \frac{i}{nead} \qquad U_{AC} = aVB = \frac{iB}{ned}$$

Napięcie powstające pomiędzy punktami A i C nosi nazwę napięcia Halla

16.9.R.

Przewody doprowadzające prąd nie powodują powstania pola magnetycznego w środku okręgu (patrz zadanie drugie punkt b)
W pierścieniu popłyną dwa różne prądy, każdy z nich wytworzy pole magnetyczne w środku pierścienia.
Wyznaczymy te prądy i na podstawie prawa Biotta-Savarta wyznaczymy wartość indukcji pola magnetycznego w środku pierścienia



$$i_1 = \frac{U}{R_1} \qquad i_2 = \frac{U}{R_2} \qquad R_1 = \rho\frac{L_1}{S} \qquad R_2 = \rho\frac{L_2}{S}$$

S- pole przekroju przewodnika

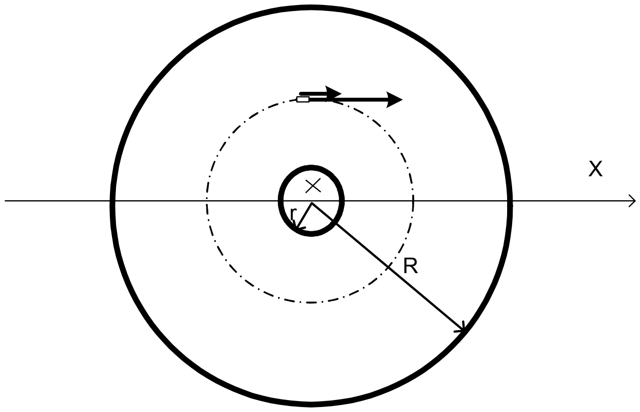
$$i_1 = \frac{U}{\rho L_1}S \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad d\vec{l} \perp \vec{r} \Rightarrow dB_1 = \frac{US\mu_0}{4\pi\rho L_1}\frac{dl}{r^2} \qquad B_1 = \frac{US\mu_0}{4\pi\rho L_1 r^2}\int_{L_1} dl$$

$$B_1 = \frac{US\mu_0}{4\pi\rho r^2}$$

Analogiczne obliczenia dla odcinka L_2 pozwalają uzyskać następujący wynik $B_2 = \frac{US\mu_0}{4\pi\rho r^2}$

Wartości indukcji pochodzących od różnych odcinków pierścienia mają tą samą wartość. Ze względu na różnicę w kierunkach prądów płynących w obu odcinkach pierścienia, wartości indukcji pola magnetycznego różnią się znakami. Wypadkowa wartość pola magnetycznego wynosi zatem 0, bez względu na miejsca podłączenia przewodów tj. umieszczenia punktów A i B.

16.10.R.



Wykorzystamy prawo Ampera. Pole magnetyczne pomiędzy pierścieniami wytwarzać będzie tylko prąd płynący w pierścieniu wewnętrznym

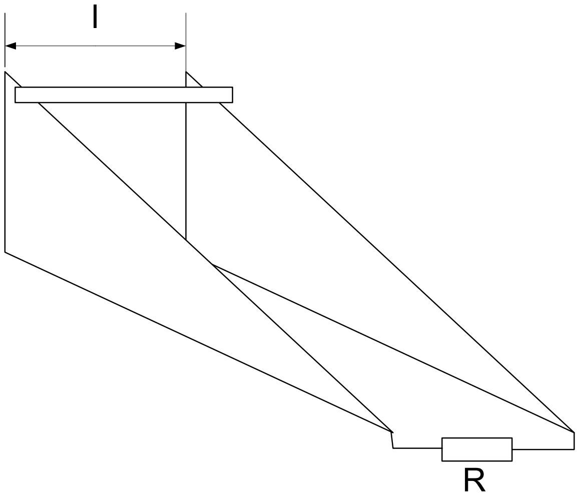
$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 i \qquad \vec{B} \| d\vec{l}$$

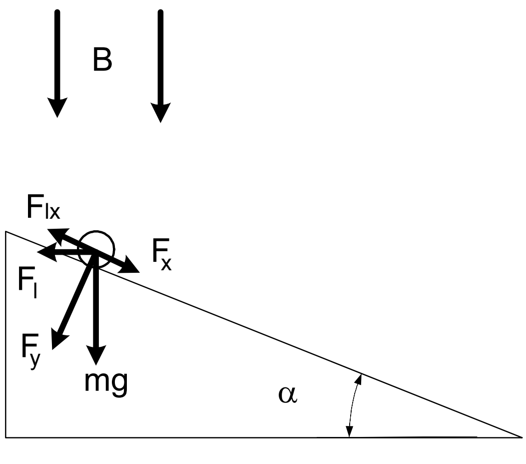
R<x<R

Dla x=const ; B=const

$$B\oint_l dl = \mu_0 i \qquad B2\pi x = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

16.11.R.





Gdy szyny nie są połączone rezystorem R wtedy działa tylko siła grawitacji (F_l=0) i pręt będzie poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym o wartości przyspieszenia $a=g\sin\alpha$ z prędkością początkową V_0=0 z pozycji początkowej x_0=0. Równanie ruchu będzie miało następującą postać:

$$x(t) = a\frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0 \qquad x(t) = g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$

Gdy połączymy szyny rezystorem R w obwodzie, ze względu na prawo indukcji Faradaya, popłynie prąd i wytworzy się siła oddziaływania pola magnetycznego F_l działająca przeciwnie do siły ściągającej pochodzącej od pola grawitacyjnego. Pręt będzie poruszał się z przyspieszeniem jednostajnie zmiennym do chwili zrównoważenia się sił ściągającej i siły Lorenza. W dalszej części będzie poruszał się ruchem jednostajnym. Osiągnie zatem prędkość maksymalną.

$$\vec{F}_l = l\vec{i} \times \vec{B} \qquad \vec{i} \perp \vec{B} \Rightarrow F_l = ilB \qquad F_{lx} = ilb\cos\alpha$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}Blx = -lVB$$

Minus oznacza polaryzacje powstającej różnicy potencjałów, w naszym przypadku w celu wyznaczenia prądu płynącego przez pręt został on już uwzględniony przy kierunku działania siły pola magnetycznego.

$$U = lVB\cos\alpha \qquad i = \frac{U}{R} = \frac{lVB\cos\alpha}{R}$$

Wypadkowa wartość siły zsuwającej działającej na pręt ma następującą postać:

$$F = F_x - F_{lx} = mg\sin\alpha - lB\cos\alpha\frac{lVB\cos\alpha}{R} = mg\sin\alpha - \frac{Vl^2B^2\cos^2\alpha}{R}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \frac{l^2B^2\cos^2\alpha}{R}V \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{l^2B^2\cos^2\alpha}{Rm}\frac{dx}{dt} - g\sin\alpha = 0$$

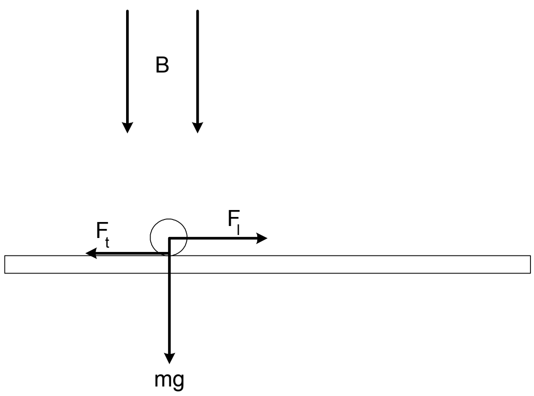
Rozwiązanie uzyskanego równania różniczkowego jest równaniem ruchu x=x(t) które umożliwia pełny opis ruchu preta.

Można w sposób prosty wyznaczyć maksymalną szybkość poruszania się pręta. Warunek znikania siły wypadkowej jest warunkiem poruszania się ze stałą prędkością V_{max}.

$$mg\sin\alpha - \frac{V_{max}l^2B^2\cos^2\alpha}{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_{max} = \frac{Rmg\sin\alpha}{l^2B^2\cos^2\alpha}$$

16.12.R.

W wyniki przepływu prądu pojawi się siła przesuwająca pręt w poziomie F_l



$$\vec{} \perp \vec{} \Rightarrow {}_l =$$

Z drugiej strony pojawi się napięcie indukowane

Dlatego

$$i_w = \frac{U - U_{ind}}{R} = \frac{U - lBV}{R} \qquad F_w = F_l - F_t = lB\frac{U - lBV}{R} - mg\mu$$

Pręt przyspiesza do momentu gdy F_w=0

$$lB\frac{U - lBV_{max}}{R} = mg\mu \qquad \Rightarrow \qquad V_{max} = \frac{U}{Bl} - \frac{mg\mu R}{B^2l^2}$$

16.13.R.

Gdy pręt porusza się pod wpływem działającej siły F to powstaje siła elektromotoryczna indukcji: $U_{ind} = BlV$, przyrost powstającego napięcia wynosi $\Delta U_{ind} = Bl\Delta V$.
Zmiana napięcia indukowanego umożliwi przepływ prądu przez kondensator.

$$U = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{\Delta Q}{C} \quad i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \quad i = \frac{CBl\Delta V}{\Delta t} = CBla$$

Pojawi się zatem siła elektrodynamiczna $F_{el} = ilB = CB^2l^2a$ przeciwnie skierowana do F

Na pręt będzie działać siła wypadkowa o wartości $F_w = F - F_{el}$

$$F_w = ma = F - CB^2l^2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m + CB^2l^2}$$