Elementy fizyki relatywistycznej

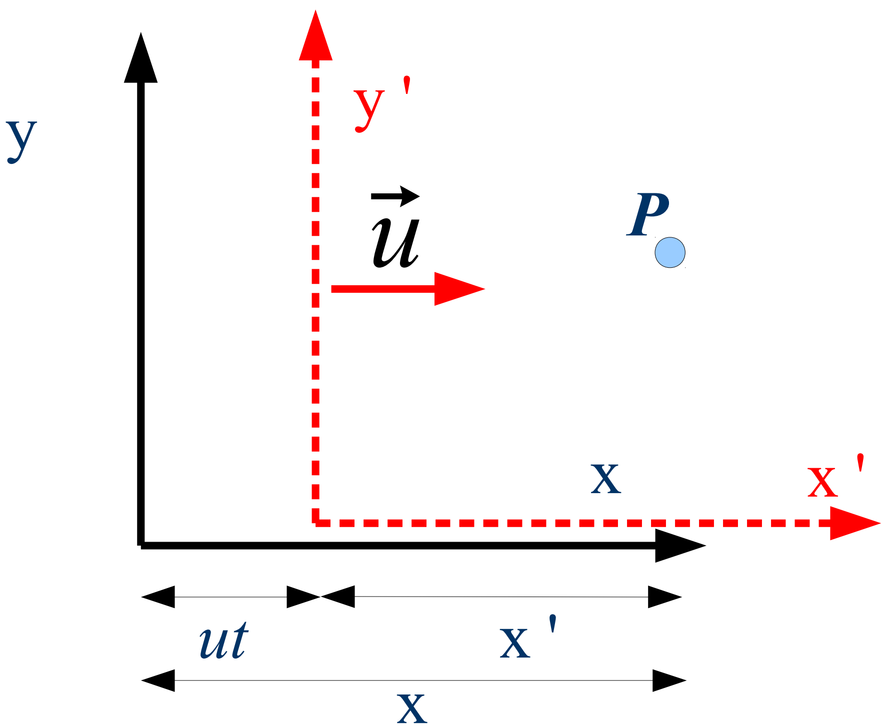
- Transformacje Galileusza i ich konsekwencje

- Transformacje Lorentz'a
    - „skracanie” przedmiotów w kierunku ruchu
    - „dylatacja” czasu
    - nowe składanie prędkości

- Szczególna teoria względności
    - postulaty Einstein'a
    - równoważność masy i energii

Transformacje Galileusza

- Co się dzieje z prawami mechaniki Newtona gdy analizujemy je w innym inercjalnym układzie odniesienia?
- Analizujemy nowy układ odniesienia przesuwający się z prędkością ***u*** wzdłuż osi x układu odniesienia



Nowe współrzędne transformują się w następujący sposób:

Po czasie ***t*** współrzędne w układzie „prim”

$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$t' = t$$

Po czasie ***t*** współrzędne w układzie xy

$$x = x' + ut$$
$$y = y'$$
$$t = t'$$

czas biegnie tak samo w każdym układzie

Transformacje Galileusza

- Co się dzieje gdy *P* porusza się względem układu „prim”?

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u \qquad \text{czyli} \qquad v'_x = v_x - u$$

- Co się dzieje gdy *P* przyspiesza względem układu „prim”(działa na niego wypadkowa siła F) ?

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{dv}{dt} = a$$

$$ma' = ma$$

$$F' = F$$

Czyli zmiany prędkości w obu układach są takie same!

Zatem prawa mechaniki są takie same w obu układach : spoczywającym i poruszającym się !

Transfromacje Galileusza - wnioski

- W układach inercjalnych w tych samych warunkach zjawiska mechaniczne przebiegają jednakowo!

- Równania mechaniki są nieimiennicze względem transformacji Galileusza tzn. nie zmieniają one swojej formy w wyniku transformacji współrzędnych i czasu przy przejściu z jednego układu do drugiego

- Prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia! - jest to zasada względności Galileusza

Transformacje Lorentz'a

- Zjawiska elektro-magnetyczne opisują równania Maxwell'a (sformułowane w II połowie XIX w.)

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{ds}=0$$

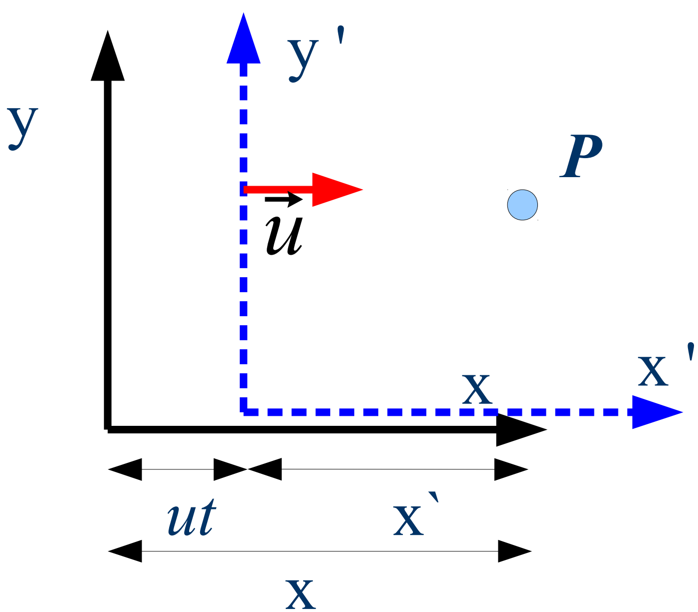
$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\int_L \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}+\mu_0 i$$

- Okazuje się że r.Maxwella **nie są nie-zmiennicze** względem prostych transformacji Galileusza
  - tzn. że przechodząc do nowego uk. współrzędnych nie otrzymujemy tych samych równań (t.j. równań tego samego typu)!
  - Jest problem – czy to oznacza że zjawiska e-m nie są takie same w różnych układach odniesienia?
  - Jest to w sprzeczności z zasadą względności Galileusza!

Transformacje Lorentz'a

- Lorentz zaproponował poprawki do przekształceń Galileusza, które likwidują problem z r. Maxwella.
- Jeśli współrzędne będą się przekształcały w następujący sposób:



Po czasie ***t*** współrzędne w układzie „prim” x'y'

$$x' = \gamma(x - ut)$$
$$y' = y$$

Uwaga! Tutaj czas ***nie*** biegnie tak samo w każdym układzie !

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

$c \longrightarrow$ prędkość światła $\approx 3 \text{ x } 10^{8}$ *m/s*

$u \longrightarrow$ prędkość układu „prim”

gdzie współczynnik:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Po czasie ***t*** współrzędne w układzie xy

$$x = \gamma(x' + ut')$$
$$y = y'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux}{c^2}\right)$$

<u>to r.M. będą nie-zmienniczce!!!</u>

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- Transformacje Lorentz'a przechodzą w transformacje Galileusza gdy prędkość *u* << *c*.

  czyli – dla małych prędkości nadal transformacje G. są dobre!

- „Skrócenie Lorentz'a”

  liniowy wymiar (rozmiar) obiektu poruszającego się względem inercjalnego układu odniesienia **zmniejsza sie** w kierunku ruchu!

$$l = x_2 - x_1 = \left(x_2' - x_1'\right)\sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

- rozmiar „własny” - rozmiar mierzony przez obserwatora w układzie „prim”

- jeśli u<<c to pierwiastek ten jest bliski 1
- jeśli u jest duże to pierwiastek ten < 1

$$\boxed{l < l_0}$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- „Dylatacja czasu”

czas inaczej płynie w różnych układach poruszających się względem siebie

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-u^2/c^2}$$

- czas „własny” -czas mierzony przez obserwatora w układzie „prim”-poruszającym się

- czas mierzony przez obserwatora w układzie spoczywającym

- jeśli u<<c to pierwiastek ten jest bliski 1
- jeśli u jest duże to pierwiastek ten < 1

$$\boxed{\tau_0 > \tau}$$

- Procesy w układzie poruszającym się zachodzą **WOLNIEJ** niż w uk. odniesienia (spoczywającym)
- Zegar poruszający się z prędkością ***u*** względem danego inercjalnego układu odniesienia idzie wolniej tyle razy :

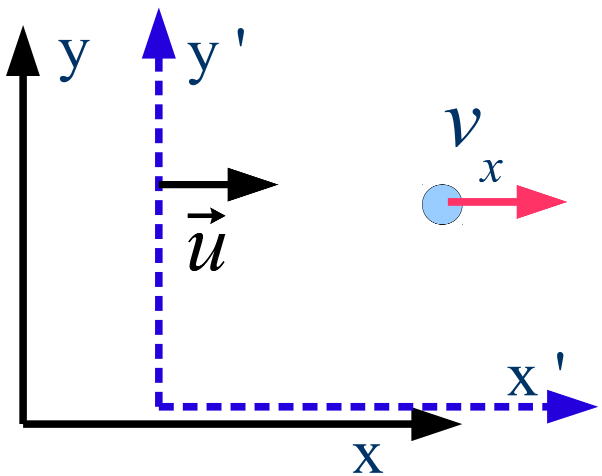
$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- Nowe „składanie prędkości”

  jeśli obiekt ma prędkość $v_x^{/}$ w układzie poruszającym się („prim”) to po przekształceniach otrzymujemy wyrażenie na prędkość tego obiektu w układzie spoczywającym :

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_x^{/}}{1 + \frac{u v_x^{/}}{c^2}}$$



Uwaga! Dla transformacji Galileusza (tak jak obserwujemy to w gdy prędkości są małe) byłoby:

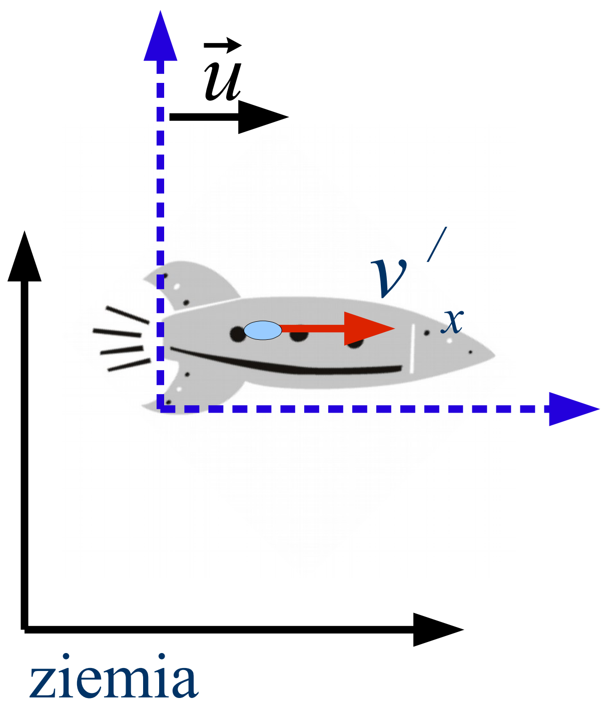
$$v_x = u + v_x^{/}$$

Zatem transformacje Lorentz'a wprowadzają nam inne prawo dodawania-składania prędkości !

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- Przykład:

  Z jaką prędkością względem ziemi porusza się kula karabinowa wystrzelona w środku rakiety, która porusza się z prędkością $u=1/2\ c$?
  (obserwator w rakiecie zmierzył że kula porusza się z prędkością $v_x^{/}=1/2\ c$)



$$v_x = \frac{1/2c+1/2c}{1+\frac{1/2c\ 1/2c}{c^2}} = \frac{4}{5}c$$

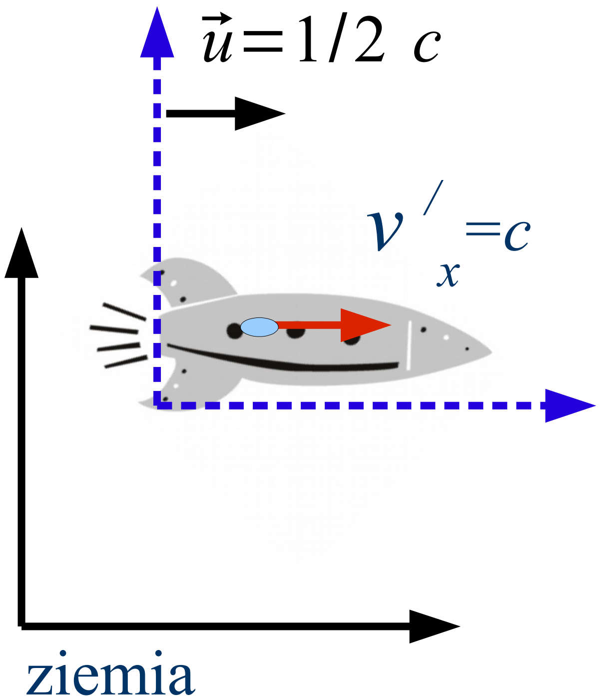
Uwaga! „klasycznie dla transformacji Galileusza byłoby:

$$v_x = 1/2c+1/2c = c$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- Przykład:

Co by było gdyby pocisk miał prędkość w rakiecie równą $v_x^{/} = c$?



$$v_x = \frac{1/2c + c}{1 + \frac{1/2cc}{c^2}} = c$$

Uwaga! „klasycznie dla transformacji Galileusza byłoby:

$$v_x = 1/2c + c = 3/2\ c \quad !!!$$

Okazuje się, że prędkości sygnału świetlnego wynosi niezależnie od układu odniesienia tyle samo, czyli równe jest c ≈ 300 000 km/s

Uwaga! Ten fakt został potwierdzony doświadczalnie już w końcu XIX w. przez Michelsona-Morley'a

Szczególna teoria względności Einsteina

Na podstawie rozważań Lorentz'a Einstein wysunął postulaty

- Postulat I
  - Prawa fizyczne muszą być takie same we wszystkich układach odniesienia (ale uwaga: obserwacje tego samego zawiaska mogą być różne w różnych układach odniesienia!)

- Postulat II
  - Prędkość światła jest prędkością specjalną! Jest zawsze taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

To jest zgodne z doświadczeniem!!!
W 1887 r. taki pomiaru prędkości przeprowadzili Michelson i Morley szukając hipotetycznego „eteru”.

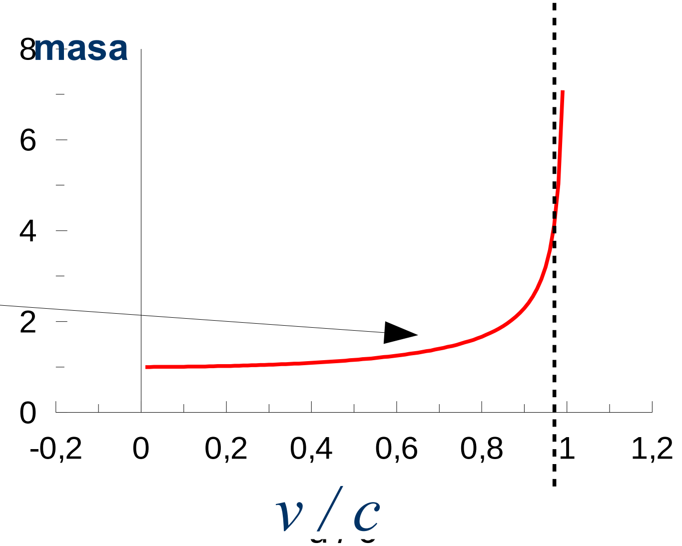
Einstein przyjął że wszystkie **prawa fizyczne** powinny mieć tę własność żeby pozostawały **niezmiennicze względem transformacji Lorentz'a!**

Jakie są tego konsekwencje?

Nowe równania mechaniki

- Trzeba więc zmienić ... prawa mechaniki Newtona!!!
- Modyfikacja równań Newtona: jeśli masa może zmieniać się z prędkością v i będzie wynosić:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$



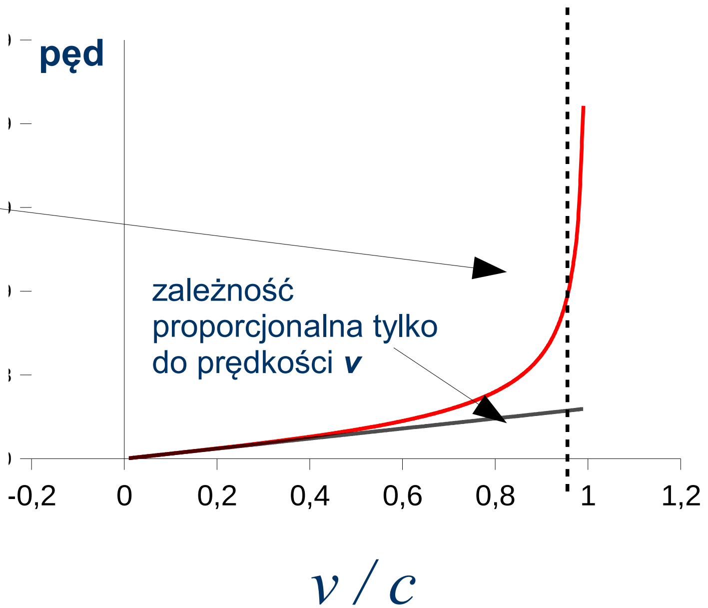
to prawa mechaniki będą niezmiennicze względem transformacji Lorentz'a

siła

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

pęd

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$



okazuje się, że pęd rośnie szybciej niż prędkość!

Równoważność masy i energii

- Einstein ustalił, że **<u>całkowita energia</u>** obiektu o masie ***m*** wynosi:

$$\boxed{E = mc^2}$$

To wyrażenie zawiera całkowitą energię spoczynkową i kinetyczną obiektu

gdzie masa równa jest:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$$

- **<u>Pęd</u>** takiego obiektu wynosi:

$$\boxed{p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$$

- **<u>Energię całkowitą</u>** można jeszcze wyrazić w następujący sposób:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = c^2 \left(m_0^2 c^2 + p^2 \right)$$

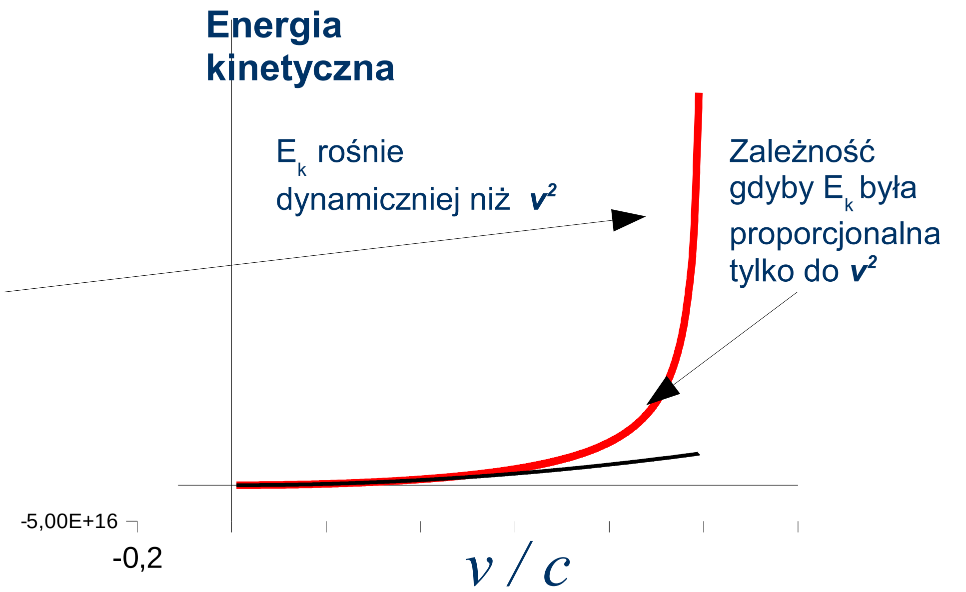
$$\boxed{E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$$

Energia kinetyczna – nowa definicja

- **Energia kinetyczna** obiektu w prędkości ***v*** wynosi:

$$E_k = E - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

$$\boxed{E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)}$$



lub bardziej formalnie:

$$E_k = \int F\,dx = \int \frac{dp}{dt} v\,dt = \int_0^v v\,dp$$

$$E_k = \int_0^v \frac{v\,m_0\,dv}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)\Bigg|_0^v$$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

Ale uwaga!

En. kinetyczna nie jest równa w prosty sposób:

$$\cancel{E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

dopiero gdy ***v*** jest dużo mniejsze od ***c*** wówczas:

$$E_k \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

Nowe sformułowanie zasady zachowania energii

- Dla układu zamkniętego zasada zachowania energii przyjmuje postać:

$$\Sigma\left(m_{i0}c^2 + E_i\right) = const$$

suma energii spoczynkowych wszystkich obiektów układu

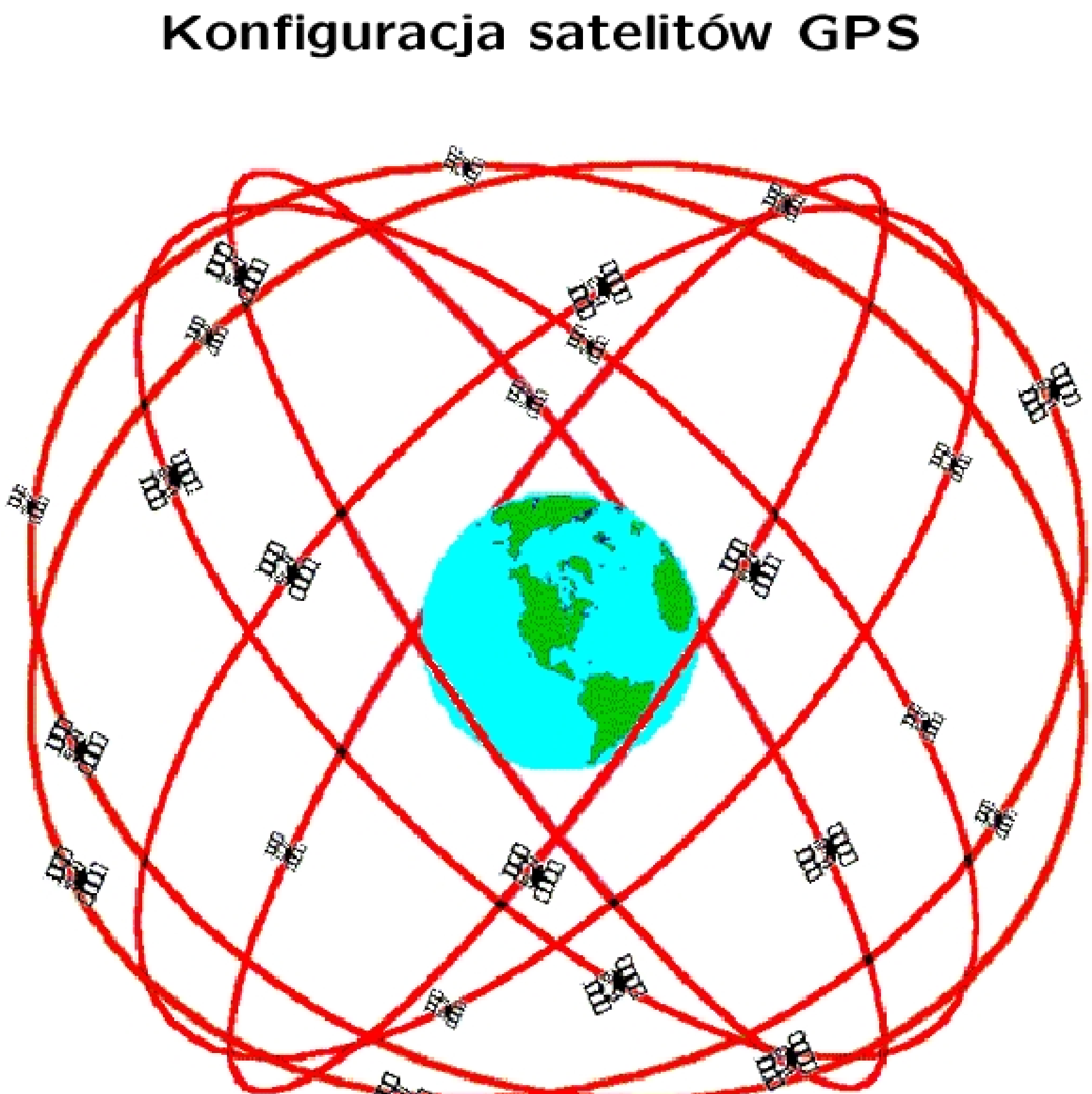
suma wszystkich innych rodzajów energii wszystkich obiektów

musi być stała !

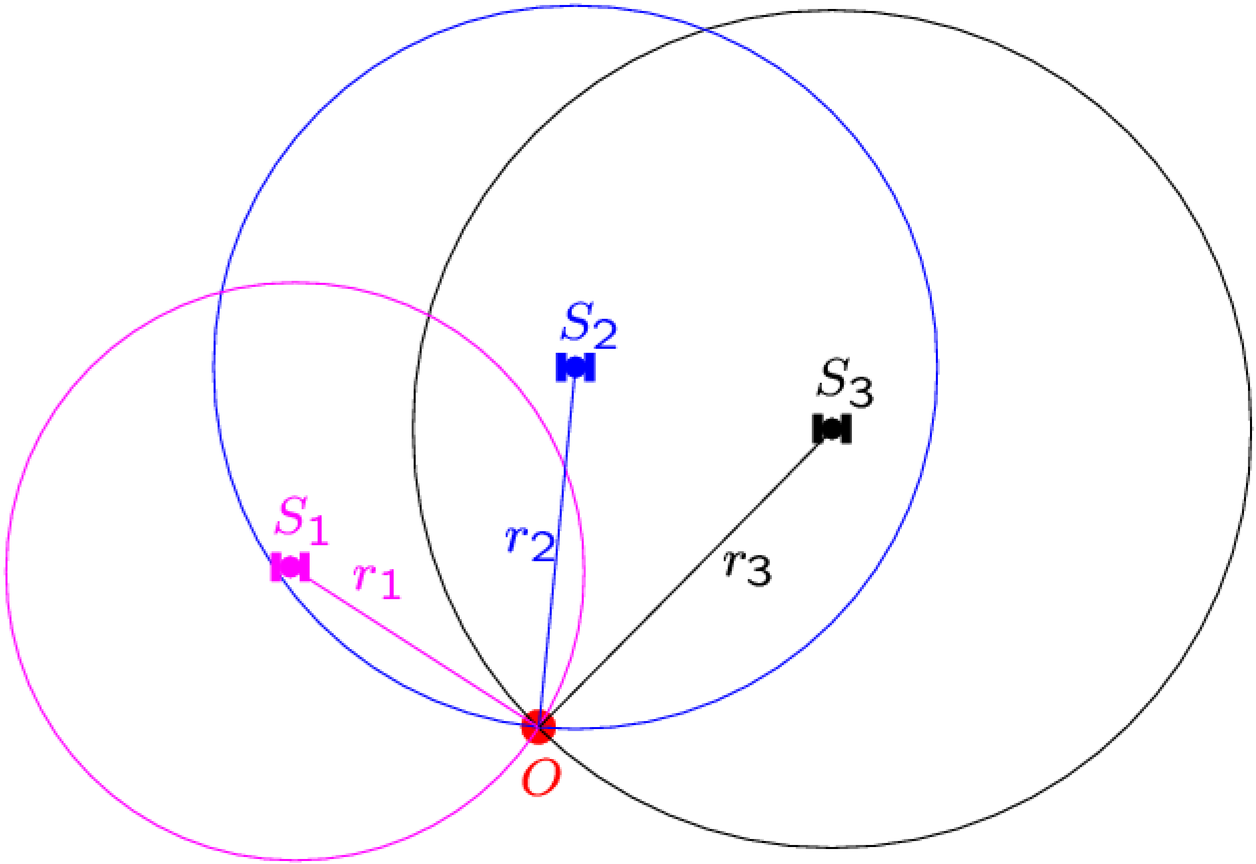
- Energia spoczynkowa obiektów może przyjmować „ogromne” wartości

	masa	energia spoczynkowa
elektron	$9.11\cdot 10^{-31}$ kg	$8.19\cdot 10^{-14}$ J
proton	$1.67\cdot 10^{-27}$ kg	$1.5\cdot 10^{-10}$ J
pyłek kurzu	$1\cdot 10^{-13}$ kg	$1.0\cdot 10^{4}$ J
moneta	$3.1\cdot 10^{-3}$ kg	$2.8\cdot 10^{14}$ J

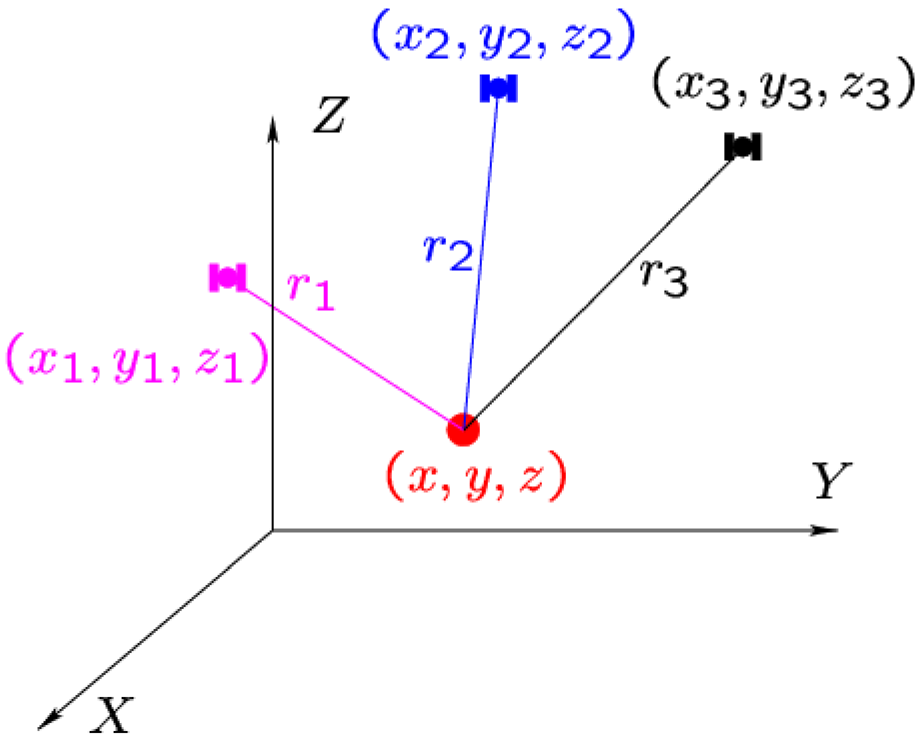
http://info.fuw.edu.pl/festiwal/2004/gps_prezentacja/



Idea pomiaru położenia



Idea pomiaru położenia — c.d.



$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} &= r_1 \\
\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} &= r_2 \\
\sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} &= r_3
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Wyznaczanie położenia odbiornika

♠ Aby określić położenie (x, y, z) odbiornika należy zmierzyć:

◇ położenie satelitów: (x_i, y_i, z_i), $(i = 1, 2, 3)$,

◇ odległość odbiornika od satelitów: r_i.

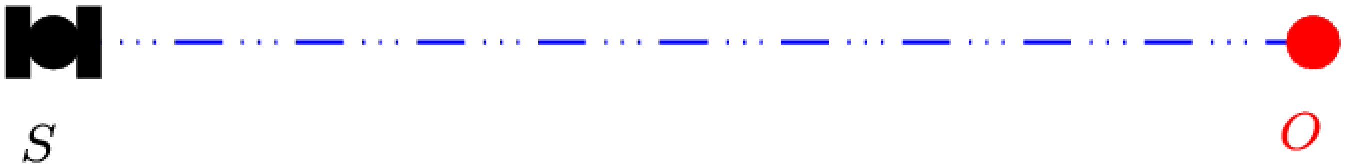
♠ Segment naziemny mierzy *parametry orbit* satelitów i za ich pośrednictwem przesyła uzyskane dane do odbiornika GPS, który wylicza z nich *położenie* (x_i, y_i, z_i) satelitów.

♠ Na podstawie sygnałów wysyłanych przez satelity odbiornik dokonuje pomiaru *odległości* r_i.

♠ Mając komplet danych odbiornik rozwiązuje układ równań (1) obliczając swe położenie (x, y, z).

Pomiar odległości odbiornik–satelita

$$r = c \cdot \Delta t$$



♠ Satelita S wysyła sygnał radiowy oraz informację o czasie t_0 wysłania sygnału. Odbiornik O odbiera sygnał w czasie t_1.

$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

♠ W czasie $3 \cdot 10^{-8}$ s fala radiowa przebywa drogę 9 m.

Efekty relatywistyczne

♠ Czas t_0 wysłania sygnału przez satelitę mierzony jest przez zegar atomowy. Ale:

♢ zegar ten *porusza się* względem zegarów spoczywających na powierzchni Ziemi,

♢ zegar ten znajduje się w *słabszym* polu grawitacyjnym niż zegary znajdujące się na powierzchni Ziemi.

♠ *Teoria względności* stwierdza, że:

♢ ruch *spowalnia* bieg zegarów — zjawisko *dylatacji* czasu,

♢ słabsze pole grawitacyjne *przyspiesza* bieg zegarów.

Wielkość efektów grawitacyjnych

♠ Dylatacja czasu:

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

$$7 \cdot 10^{-9} \text{ sekundy/dzień},$$

♠ Przyspieszenie biegu zegarów przez pole grawitacyjne:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

$$45 \cdot 10^{-9} \text{ sekundy/dzień},$$

♠ Efekt sumaryczny — przyspieszenie biegu zegarów o:

$$38 \cdot 10^{-9} \text{ sekundy/dzień}.$$

♠ Bez uwzględnienia tych efektów po *jednym* dniu błąd pomiaru odległości satelita–odbiornik urasta do

$$38 \cdot 10^{-9} s \;\cdot\; 3 \cdot 10^{8} m/s \;= 11{,}4 m.$$