

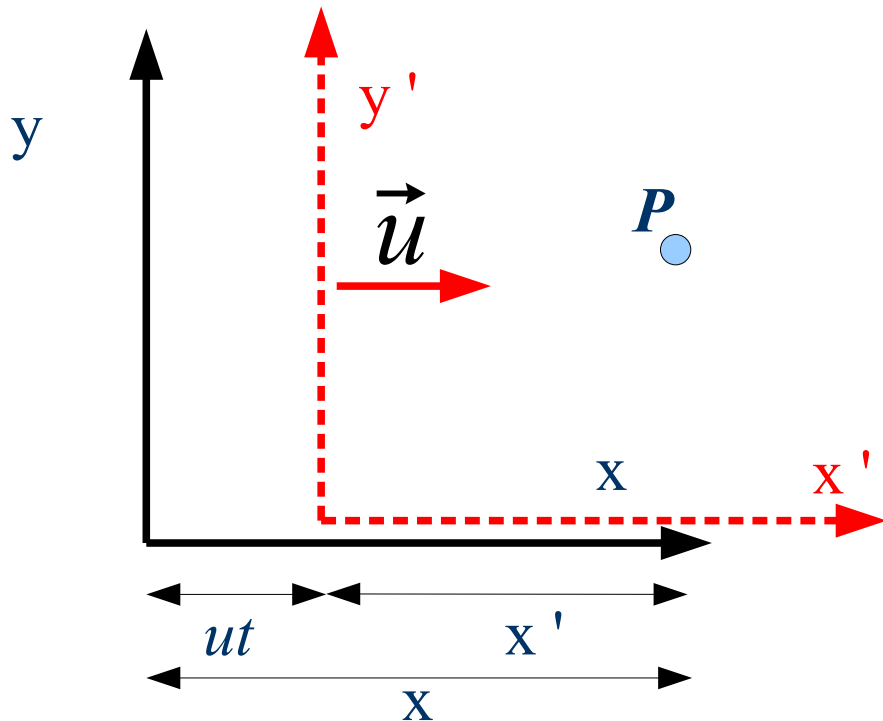
Elementy fizyki relatywistycznej

- Transformacje Galileusza i ich konsekwencje
- Transformacje Lorentz'a
 - „skracanie” przedmiotów w kierunku ruchu
 - „dylatacja” czasu
 - nowe składanie prędkości
- Szczególna teoria względności
 - postulaty Einstein'a
 - równoważność masy i energii

Transformacje Galileusza

- Co się dzieje z prawami mechaniki Newtona gdy analizujemy je w innym inercyjnym układzie odniesienia?
- Analizujemy nowy układ odniesienia przesuwany się z prędkością u wzdłuż osi x układu odniesienia

Nowe współrzędne transformują się w następujący sposób:



Po czasie t
współrzędne w
układzie „prim”

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$t' = t$$

Po czasie t
współrzędne w
układzie xy

$$x = x' + ut$$

$$y = y'$$

$$t = t'$$

czas biegnie tak samo w każdym układzie

Transformacje Galileusza

- Co się dzieje gdy P porusza się względem układu „prim”?

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u \quad \text{czyli} \quad v'_x = v_x - u$$

- Co się dzieje gdy P przyspiesza względem układu „prim” (działa na niego wypadkowa siła F) ?

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{dv}{dt} = a$$

$$ma' = ma$$

$$F' = F$$

Czyli zmiany prędkości w obu układach są takie same!

Zatem prawa mechaniki są takie same w obu układach : spoczywającym i poruszającym się !

Transformacje Galileusza - wnioski

- ♦ W układach inercjalnych w tych samych warunkach zjawiska mechaniczne przebiegają jednakowo!
- ♦ Równania mechaniki są nieimiennicze względem transformacji Galileusza tzn. nie zmieniają one swojej formy w wyniku transformacji współrzędnych i czasu przy przejściu z jednego układu do drugiego
- ♦ Prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia! - jest to zasada względności Galileusza

Transformacje Lorentz'a

- Zjawiska elektro-magnetyczne opisują równania Maxwell'a (sformułowane w II połowie XIX w.)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

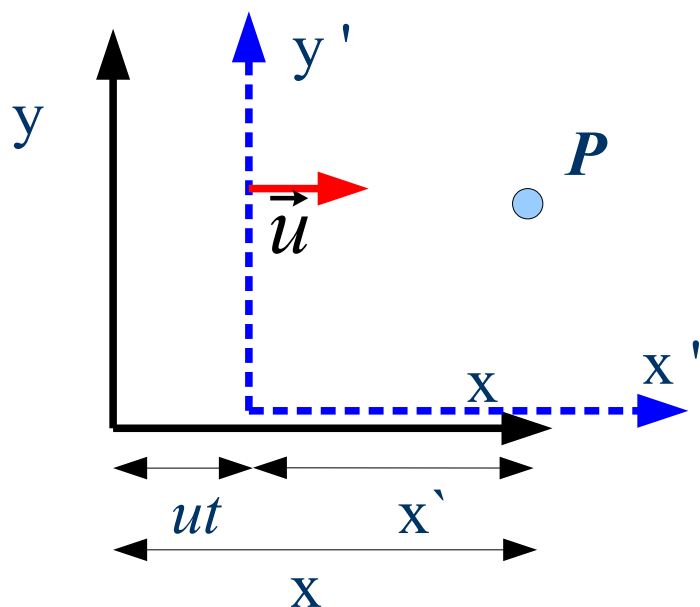
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i$$

- ♦ Okazuje się że r.Maxwella **nie są nie-zmiennicze** względem prostych transformacji Galileusza
 - tzn. że przechodząc do nowego uk. współrzędnych nie otrzymujemy tych samych równań (t.j. równań tego samego typu)!
 - Jest problem – czy to oznacza że zjawiska e-m nie są takie same w różnych układach odniesienia?
 - Jest to w sprzeczności z zasadą względności Galileusza!

Transformacje Lorentz'a

- ♦ Lorentz zaproponował poprawki do przekształceń Galileusza, które likwidują problem z r. Maxwella.
- ♦ Jeśli współrzędne będą się przekształcały w następujący sposób:



to r.M. będą nie-zmiennicze!!!

Po czasie t
współrzędne w
układzie „prim” $x'y'$



$$x' = \gamma (x - ut)$$

$$y' = y$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right)$$

$c \rightarrow$ prędkość światła
 $\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$u \rightarrow$ prędkość układu „prim”

Uwaga! Tutaj czas **nie**
biegnie tak samo w
każdym układzie !



gdzie współczynnik:



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Po czasie t
współrzędne w
układzie xy



$$x = \gamma (x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right)$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- ♦ Transformacje Lorentz'a przechodzą w transformacje Galileusza gdy prędkość $u \ll c$.

czyli – dla małych prędkości nadal transformacje G. są dobre!

- ♦ „Skrócenie Lorentz'a”

liniowy wymiar (rozmiar) obiektu poruszającego się względem inercjalnego układu odniesienia **zmniejsza się** w kierunku ruchu!

$$l = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$


- ♦ rozmiar „własny” - rozmiar mierzony przez obserwatora w układzie „prim”

- ♦ jeśli $u \ll c$ to pierwiastek ten jest bliski 1
- ♦ jeśli u jest duże to pierwiastek ten < 1

$$l < l_0$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

♦ „Dylatacja czasu”

czas inaczej płynie w różnych układach poruszających się względem siebie

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

♦ czas „własny” - czas mierzony przez obserwatora w układzie „prim”-poruszającym się

♦ czas mierzony przez obserwatora w układzie spoczywającym

♦ jeśli $u \ll c$ to pierwiastek ten jest bliski 1
♦ jeśli u jest duże to pierwiastek ten < 1

♦ Procesy w układzie poruszającym się zachodzą **WOLNIEJ** niż w uk. odniesienia (spoczywającym)

♦ Zegar poruszający się z prędkością u względem danego inercjalnego układu odniesienia idzie wolniej tyle razy :

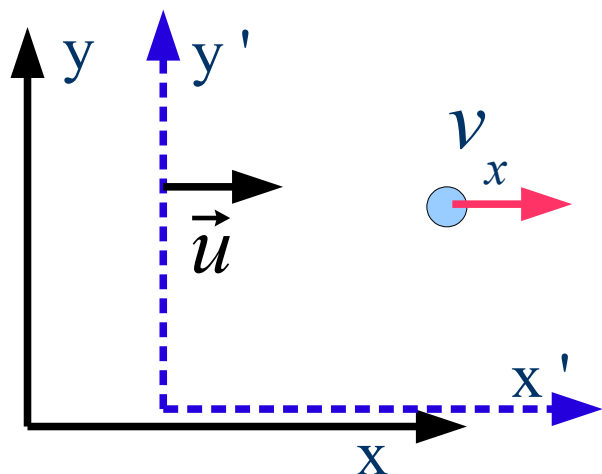
$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\tau_0 > \tau$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

- ◆ Nowe „składanie prędkości”

jeśli obiekt ma prędkość v'_x w układzie poruszającym się („prim”) to po przekształceniach otrzymujemy wyrażenie na prędkość tego obiektu w układzie spoczywającym :



$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v'_x}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

Uwaga! Dla transformacji Galileusza (tak jak obserwujemy to w gdy prędkości są małe) byłoby:

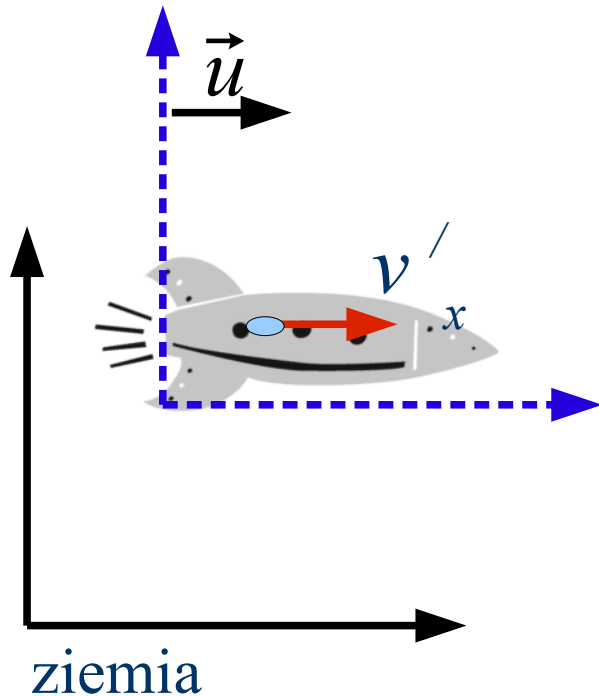
$$v_x = u + v'_x$$

Zatem transformacje Lorentz'a wprowadzają nam inne prawo dodawania-składania prędkości !

Transformacje Lorentz'a - wnioski

♦ Przykład:

Z jaką prędkością względem ziemi porusza się kula karabinowa wystrzelona w środku rakiety, która porusza się z prędkością $u = 1/2 c$?
(obserwator w rakiecie zmierzył że kula porusza się z prędkością $v'_x = 1/2 c$)



$$v_x = \frac{1/2c + 1/2c}{1 + \frac{1/2c \cdot 1/2c}{c^2}} = \frac{4}{5}c$$

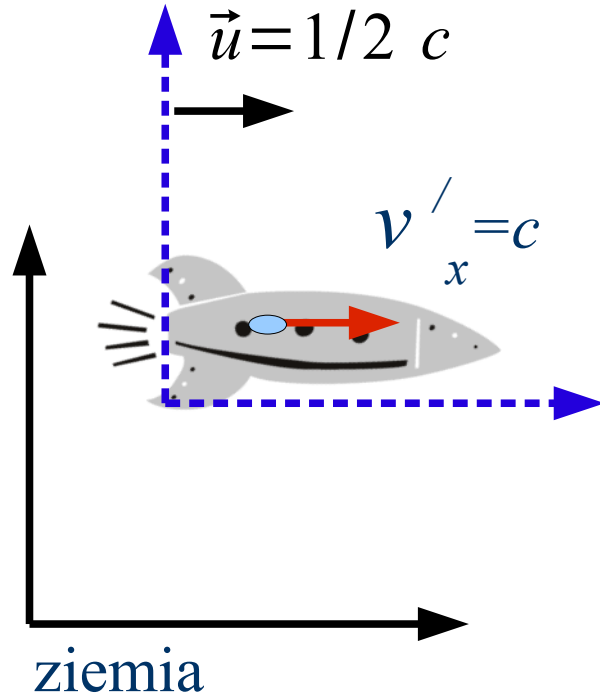
Uwaga! „klasycznie dla transformacji Galileusza byłoby:

$$v_x = 1/2c + 1/2c = c$$

Transformacje Lorentz'a - wnioski

■ Przykład:

Co by było gdyby pocisk miał prędkość w rakiecie równą $v'_x = c$?



$$v_x = \frac{1/2c + c}{1 + \frac{1/2cc}{c^2}} = c$$

Uwaga! „klasycznie dla transformacji Galileusza byłoby:

$$v_x = 1/2c + c = 3/2 c \quad !!!$$

Okazuje się, że prędkości sygnału świetlnego wynosi niezależnie od układu odniesienia tyle samo, czyli równe jest $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$

Uwaga! Ten fakt został potwierdzony doświadczalnie już w końcu XIX w. przez Michelsona-Morley'a

Szczególna teoria względności Einsteina

Na podstawie rozważań Lorentz'a Einstein wysunął postulaty

- ◆ Postulat I

- Prawa fizyczne muszą być takie same we wszystkich układach odniesienia (ale uwaga: obserwacje tego samego zjawiska mogą być różne w różnych układach odniesienia!)

- ◆ Postulat II

- Prędkość światła jest prędkością specjalną! Jest zawsze taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia

To jest zgodne z doświadczeniem!!!

W 1887 r. taki pomiaru prędkości przeprowadzili Michelson i Morley szukając hipotetycznego „eteru”.

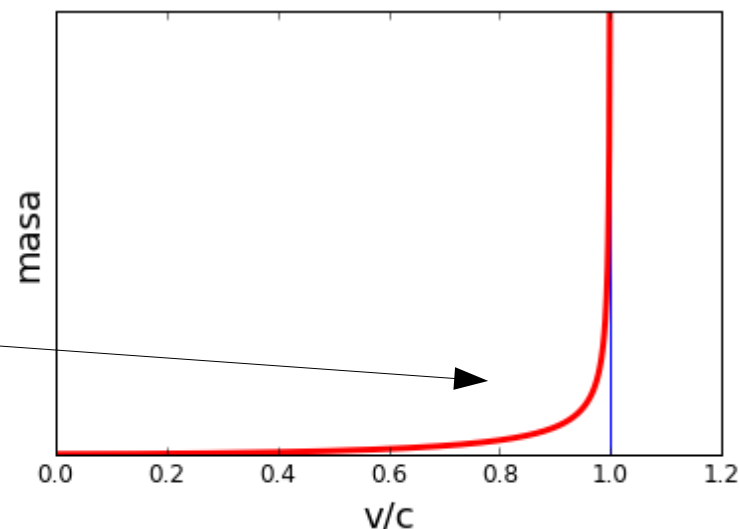
Einstein przyjął że wszystkie **prawa fizyczne** powinny mieć tę własność żeby pozostawały **niezmiennicze względem transformacji Lorentz'a!**

Jakie są tego konsekwencje?

Nowe równania mechaniki

- ◆ Trzeba więc zmienić ... prawa mechaniki Newtona!!!
- ◆ Modyfikacja równań Newtona: jeśli masa może zmieniać się z prędkością v i będzie wynosić:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



to prawa mechaniki będą niezmiennicze
względem transformacji Lorentz'a

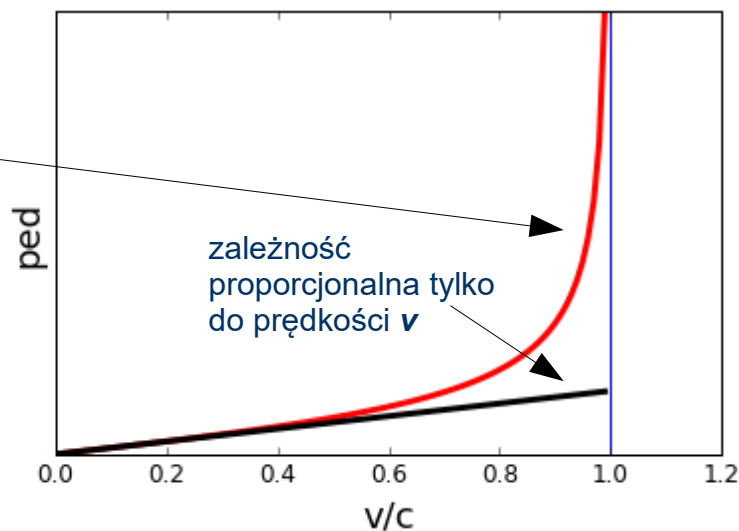
siła

pęd

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

okazuje się, że pęd rośnie szybciej niż prędkość!



Równoważność masy i energii

- ♦ Einstein ustalił, że całkowita energia obiektu o masie m wynosi:

$$E = mc^2$$

← To wyrażenie zawiera całkowitą energię spoczynkową i kinetyczną obiektu gdzie masa równa jest:

- ♦ Pęd takiego obiektu wynosi:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- ♦ Energię całkowitą można jeszcze wyrazić w następujący sposób:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = c^2 (m_0^2 c^2 + p^2)$$

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

Energia kinetyczna – nowa definicja

- ♦ **Energia kinetyczna** obiektu w prędkości v wynosi:

$$E_k = E - m_0 c^2 = m c^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

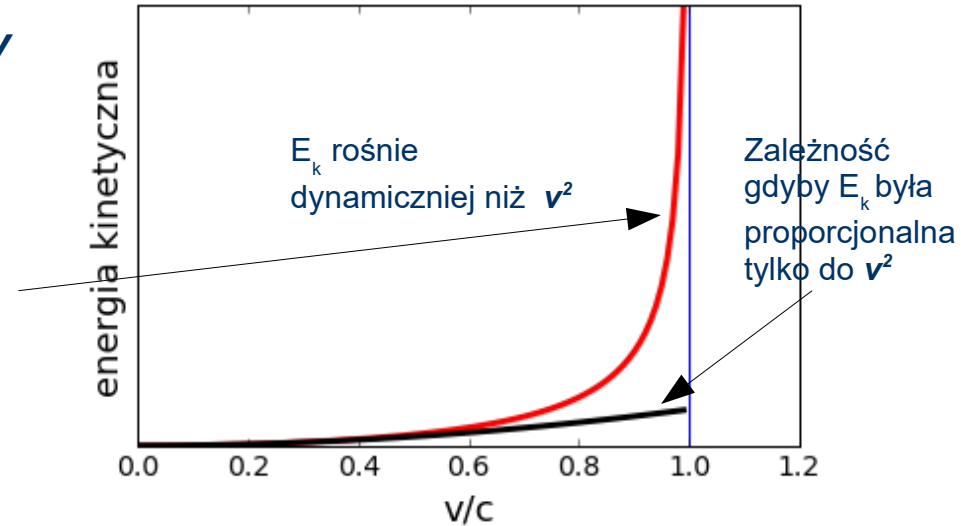
lub bardziej formalnie:

$$E_k = \int_0^x F dx = \int_0^t \frac{dp}{dt} v dt = \int_0^p v dp^{(*)}$$

$$E_k = \int_0^v \frac{m_0 v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \Big|_0^v$$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

(*) jako ćwiczenie można policzyć dp/dv i udowodnić że równe jest $\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$



Ale uwaga!

En. kinetyczna nie jest równa w prosty sposób:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dopiero gdy v jest dużo mniejsze od c wówczas:

$$E_k \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

Nowe sformułowanie zasady zachowania energii

- ♦ Dla układu zamkniętego zasada zachowania energii przyjmuje postać:

$$\Sigma(m_{i0}c^2 + E_i) = \text{const}$$

Diagram illustrating the components of the energy conservation equation:

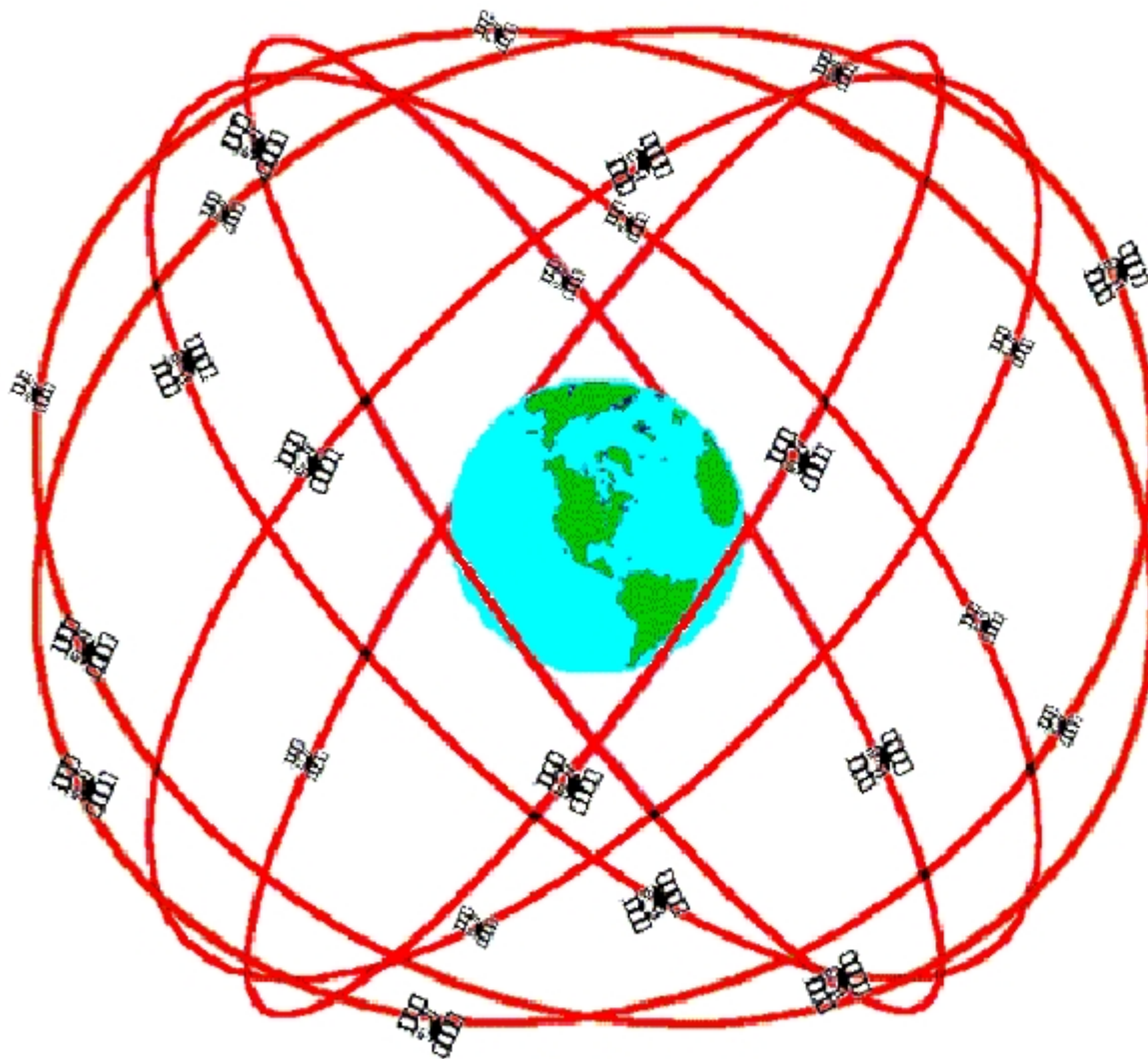
- sumy energii spoczynkowych wszystkich obiektów układu (points to $m_{i0}c^2$)
- sumy wszystkich innych rodzajów energii wszystkich obiektów (points to E_i)
- musi być stała ! (points to const)

- ♦ Energia spoczynkowa obiektów może przyjmować „ogromne” wartości

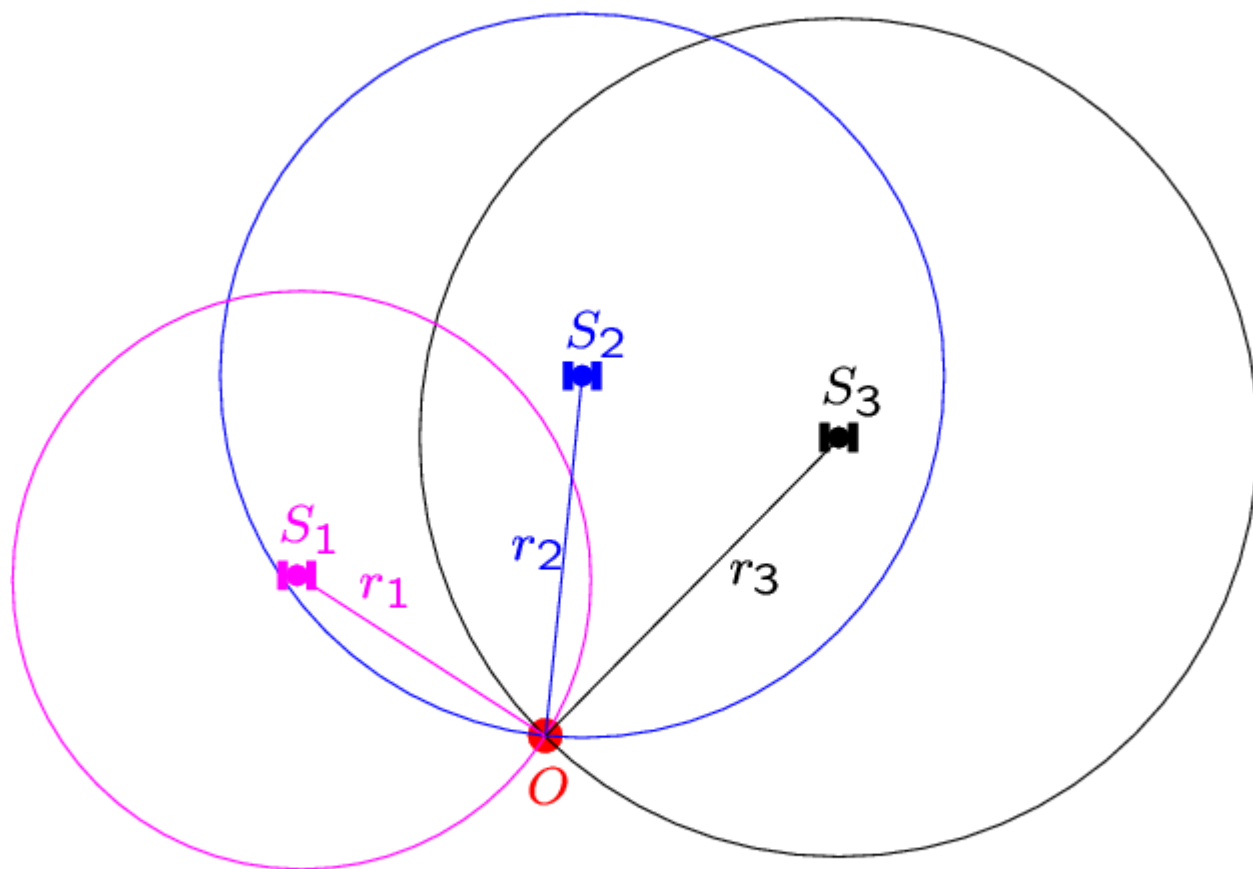
	masa	energia spoczynkowa
elektron	$9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$8.19 \cdot 10^{-14} \text{ J}$
proton	$1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1.5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
pyłek kurzu	$1 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$	$1.0 \cdot 10^4 \text{ J}$
moneta	$3.1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	$2.8 \cdot 10^{14} \text{ J}$

http://info.fuw.edu.pl/festiwal/2004/gps_prezentacja/

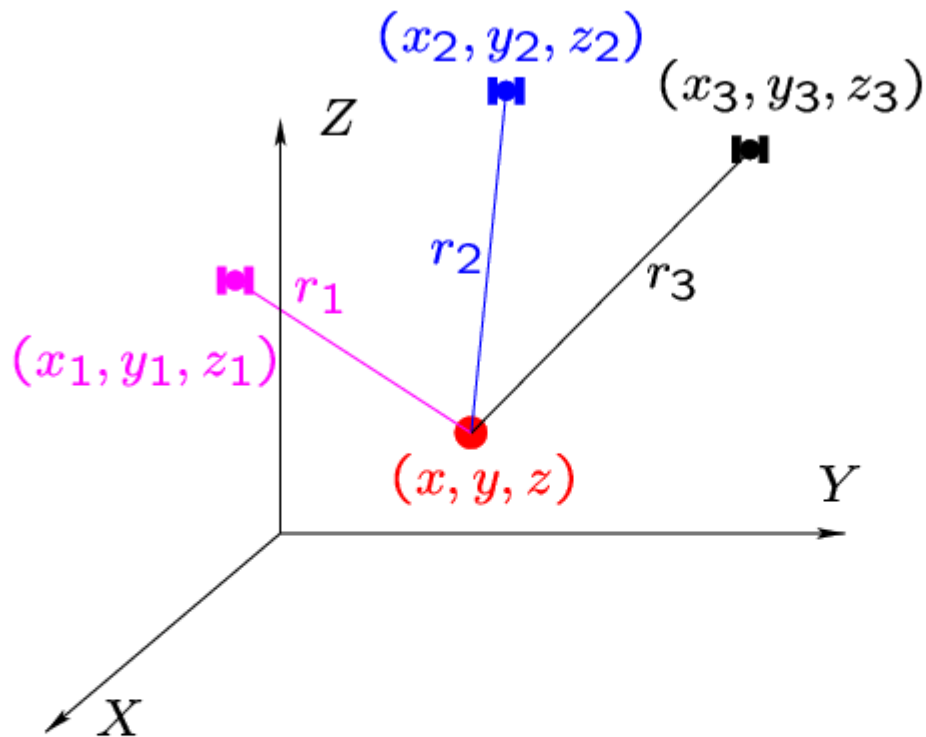
Konfiguracja satelitów GPS



Idea pomiaru położenia



Idea pomiaru położenia — c.d.

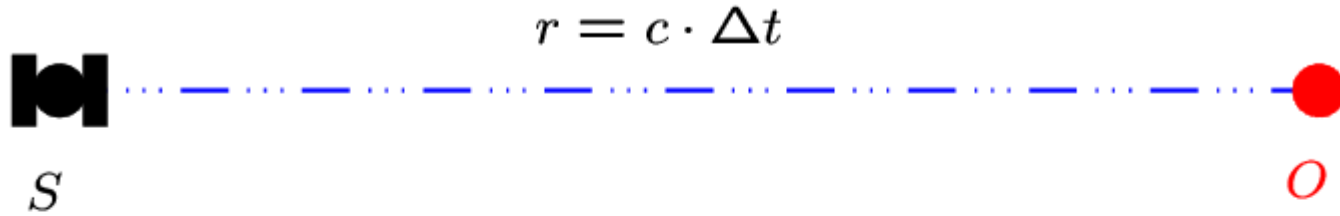


$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} &= r_1 \\ \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} &= r_2 \\ \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} &= r_3\end{aligned}\tag{1}$$

Wyznaczanie położenia odbiornika

- ♠ Aby określić położenie (x, y, z) odbiornika należy zmierzyć:
 - ◇ położenie satelitów: (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1, 2, 3)$,
 - ◇ odległość odbiornika od satelitów: r_i .
- ♠ Segment naziemny mierzy *parametry orbit* satelitów i za ich pośrednictwem przesyła uzyskane dane do odbiornika GPS, który wylicza z nich *położenie* (x_i, y_i, z_i) satelitów.
- ♠ Na podstawie sygnałów wysyłanych przez satelity odbiornik dokonuje pomiaru *odległości* r_i .
- ♠ Mając komplet danych odbiornik rozwiązuje układ równań
(1) obliczając swe położenie (x, y, z) .

Pomiar odległości odbiornik–satelita



♠ Satelita S wysyła sygnał radiowy oraz informację o czasie t_0 wysłania sygnału. Odbiornik O odbiera sygnał w czasie t_1 .

$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

♠ W czasie $3 \cdot 10^{-8}$ s fala radiowa przebywa drogę 9 m.

Efekty relatywistyczne

♠ Czas t_0 wysłania sygnału przez satelitę mierzony jest przez zegar atomowy. Ale:

- ◇ zegar ten *porusza się* względem zegarów spoczywających na powierzchni Ziemi,

- ◇ zegar ten znajduje się w *słabszym* polu grawitacyjnym niż zegary znajdujące się na powierzchni Ziemi.

♠ *Teoria względności* stwierdza, że:

- ◇ ruch *spowalnia* bieg zegarów — zjawisko *dylatacji* czasu,

- ◇ słabsze pole grawitacyjne *przyspiesza* bieg zegarów.

Wielkość efektów grawitacyjnych

♠ Dylatacja czasu:

$7 \cdot 10^{-9}$ sekundy/dzień,

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

♠ Przyspieszenie biegu zegarów przez pole grawitacyjne:

$45 \cdot 10^{-9}$ sekundy/dzień,

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

♠ Efekt sumaryczny — przyspieszenie biegu zegarów o:

$38 \cdot 10^{-9}$ sekundy/dzień.

♠ Bez uwzględnienia tych efektów po *jednym* dniu błąd pomiaru odległości satelita–odbiornik urasta do

$$38 \cdot 10^{-9} s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s = 11,4 m.$$