

Problem wielu cząstek

Ze wzrostem liczby elementów układu fizycznego, przechodząc od atomów jednoelektronowych, poprzez wieloelektronowe, aż do cząsteczek i ciał stałych, szczegółowy opis zachowania układu staje się coraz bardziej złożony.

Jeden mol zawiera liczbę Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ cząsteczek.

Jeżeli dodatkowo cząsteczki oddziałują ze sobą, to opis zachowania takiego układu zarówno klasycznie poprzez korzystanie z zasad mechaniki Newtona jak i kwantowo rozwiązując równanie Schrödingera aby znaleźć funkcje falowe dla każdej cząsteczki **nie jest możliwy**.

W takim przypadku stosuje się podejście **statystyczne**.

Elementy fizyki statystycznej

Izolowany układ zawiera wielką liczbę **klasycznych** cząstek w **stanie równowagi termodynamicznej** w temperaturze T .

Aby osiągnąć i utrzymać ten stan równowagi cząstki muszą wymieniać między sobą energię. Podczas tych wymian energia będzie fluktuować wokół **średniej** wartości.

Będziemy mogli obliczać **średnią** prędkość cząsteczek, **średnią** energię kinetyczną jeżeli znana jest określona funkcja rozkładu prawdopodobieństwa.

Fizycznie mierzalne wielkości, które charakteryzują układ wielu cząstek mogą zostać obliczone jeśli znane jest prawdopodobieństwo, że w danej temperaturze T układ ma konkretną energię E .

Elementy fizyki statystycznej

W ujęciu statystycznym bierzemy pod uwagę, że cząsteczki mają różne prędkości i energie – rozkład prędkości lub energii.

$f(\vec{v})$ **funkcja gęstości prawdopodobieństwa**

$$f(\vec{v}) = \frac{n(\vec{v})}{n}$$

$n(\vec{v})$ liczba atomów lub cząsteczek (w jednostce objętości) o prędkościach zawartych w przedziale od $\vec{v}$ do $\vec{v} + d^3\vec{v}$

całkowita ilość $n = \int n(\vec{v}) d^3\vec{v}$

Znajomość funkcja gęstości prawdopodobieństwa (funkcji rozkładu) pozwala obliczać wartości średnie

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \int \vec{v}^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v}$$

Elementy fizyki statystycznej

Klasyczne rozkłady prawdopodobieństwa to:

- rozkład Maxwella dla prędkości cząsteczek w gazie doskonałym
- rozkład Boltzmann dla energii

Kwantowe rozkłady prawdopodobieństwa to:

- rozkład Bosego-Einsteina dla cząstek o spinie całkowitym
- rozkład Fermiego-Diraca dla cząstek o spinie połówkowym

Efekty kwantowe dominują w układach wielu cząstek, w tym ciał stałych w temperaturze pokojowej.

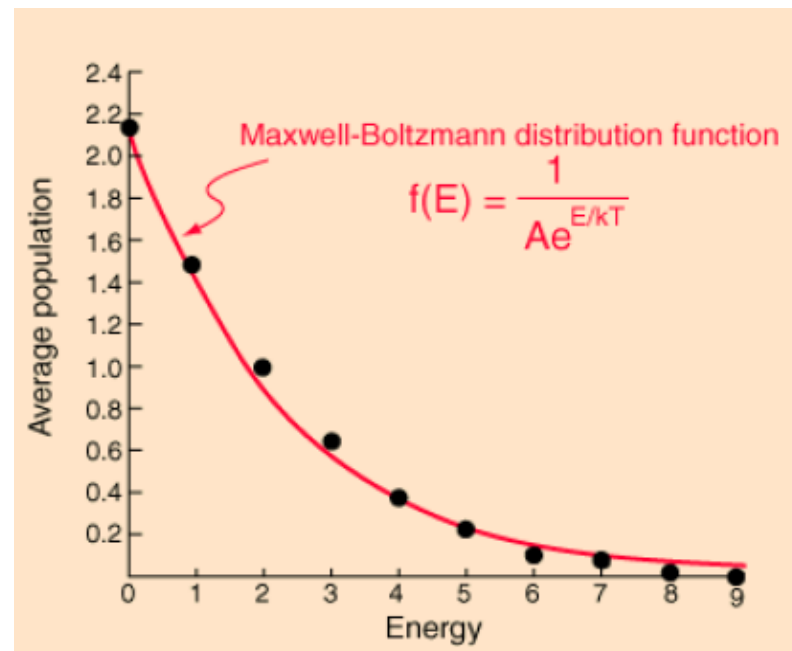
Klasyczna i kwantowa fizyka statystyczna zbliżają się do siebie gdy temperatura układu rośnie.

Rozkład Boltzmana energii cząstek „klasycznych rozróżnialnych”

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$$

Określa też rozkład, sposób rozłożenia, energii w zbiorze molekuł-cząsteczek w stanie równowagi termicznej.

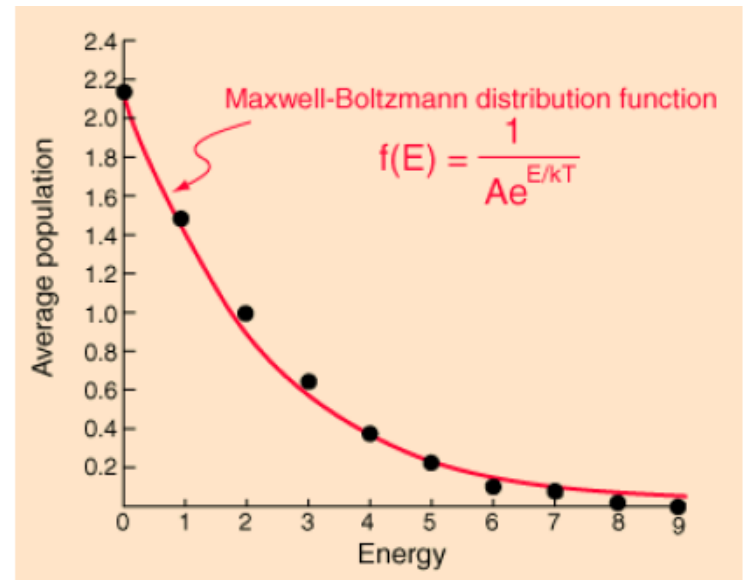
Rozkład ten można wyprowadzić na podstawie założeń statystycznych. Rozkład ten zwany jest **Rozkładem Boltzmana**



Rozkład Boltzmann–przykład numeryczny

Opis klasyczny - cząstki rozróżnialne
np. cząsteczki gazu w naczyniu

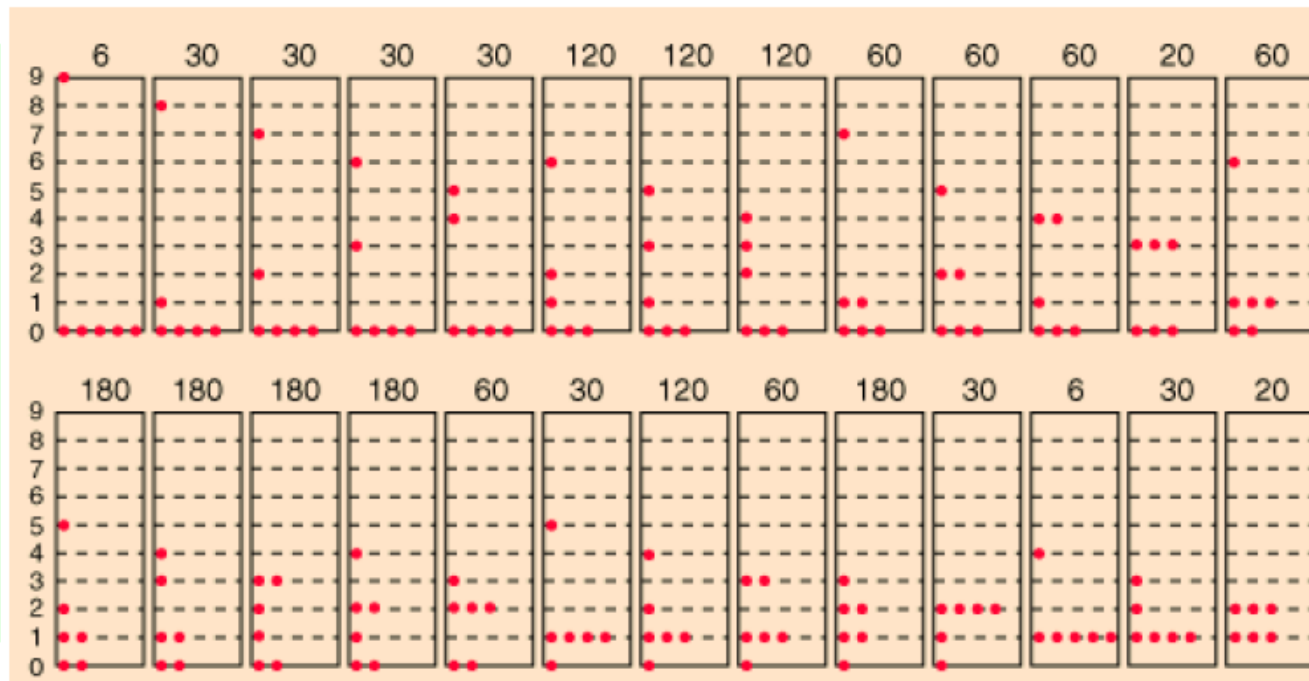
$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$$



Układ 6 rozróżnialnych cząstek ma całkowitą energię $9\Delta E$.

Cząstka może być w jednym z 10 stanów o energiach $E_n = n\Delta E$ ($n=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$).

Mikrostan układu - określony jest stan każdej z cząstek.



Rozkład Boltzmanna - przykład numeryczny

Liczba mikrostanów realizujących każdą dystrybucję cząstek:

N – liczba wszystkich cząstek

n_1 – liczba cząstek o energii na poziomie 1

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!...}$$

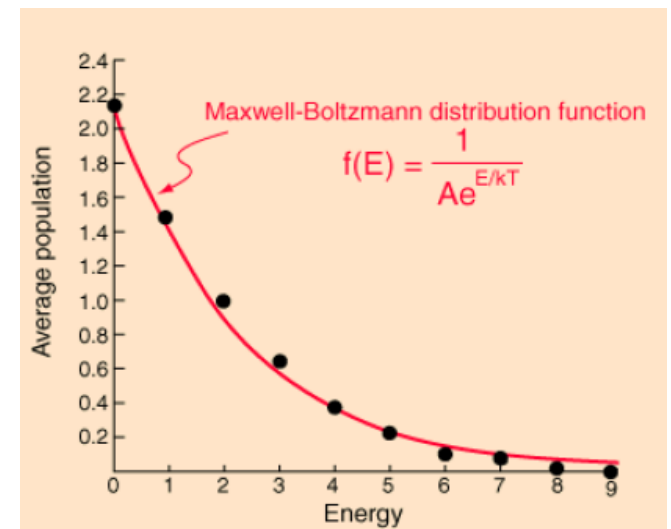
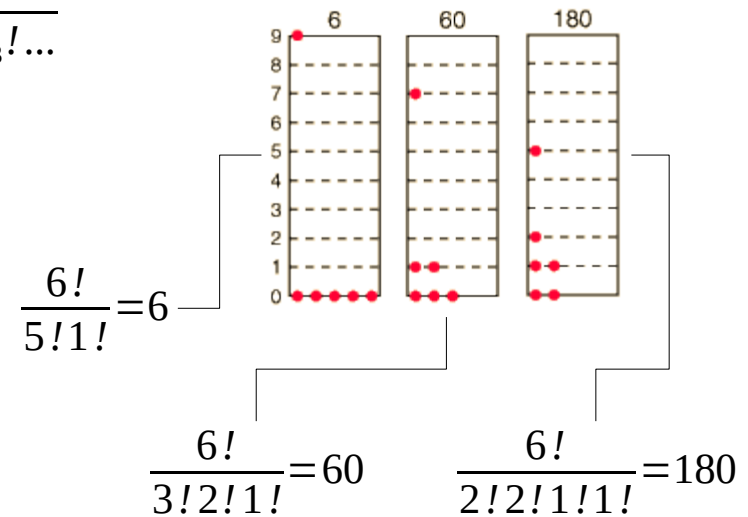
Oszacowanie dystrybucji cząstek w każdym stanie o energii j

$$n_j = \sum_i n_{ij} P_i$$

n_{ij} liczba cząstek o energii j w makroście i

P_i = liczba mikrostanów w makroście i dzielona przez liczbę wszystkich mikrostanów (których jest tutaj 2002) – stanowi to prawdopodobieństwo termodynamiczne

(<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>)



Rozkład prędkości cząsteczek gazu - Maxwell'a-Boltzmann'a

Z funkcji rozkładu Boltzmana'a możemy przyjąć że liczba cząsteczek o danej prędkości $\mathbf{v}$ (czyli o danej energii kinetycznej $m\mathbf{v}^2/2$), będzie proporcjonalna do funkcji :

$$f(v^2) \simeq e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$$

czyli koncentracja cząsteczek o danej prędkości w zakresie od $\mathbf{v}$ do $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$:

$$dn(\mathbf{v}) = C e^{\frac{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

stałą C wyznaczamy z warunku, że znamy liczbę cząsteczek w danej objętości n (sumując-całkując po wszystkich wartościach prędkości):

$$n = \int dn = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-mv_z^2}{2kT}} dv_z$$

po matematycznych przeliczeniach otrzymujemy:

$$C = n \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2}$$

Rozkład prędkości cząsteczek gazu - Maxwell'a-Boltzmann'a

Można wykazać że: $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$

więc koncentracja cz. o danej prędkości w zakresie od v do $v+dv$:

$$dn(v) = n \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv$$

a funkcja, która określa względną liczbę cząsteczek o prędkości w zakresie od v do $v+dv$:

$$f(v) = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$$

funkcja rozkładu
cząsteczek względem ich
prędkości (rozkład
Maxwell'a-Boltzmann'a)

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cz. o prędkości w zakresie od v do $v+dv$

Na podstawie tej funkcji można policzyć kilka innych parametrów dot. prędkości cząsteczek w gazie

$$\int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$$

$$dn(v) = n f(v) dv$$

Rozkład prędkości cząsteczek gazu - Maxwell'a-Boltzmann'a

- Prędkość najbardziej prawdopodobna:**
 - taką prędkość ma największa liczba cząsteczek
 - trzeba policzyć maksimum funkcji f

$$\left(\frac{df}{dv} \right)_{v_p} = 0 \quad \text{po przeliczeniach} \Rightarrow$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

- Prędkość średnia:**

liczba cz. o prędkości v_i

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_i n_i v_i}{\sum_i n_i} \Rightarrow$$

suma wszystkich cz.

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int v \, dn$$

$$dn = n f(v) \, dv$$

po przeliczeniach

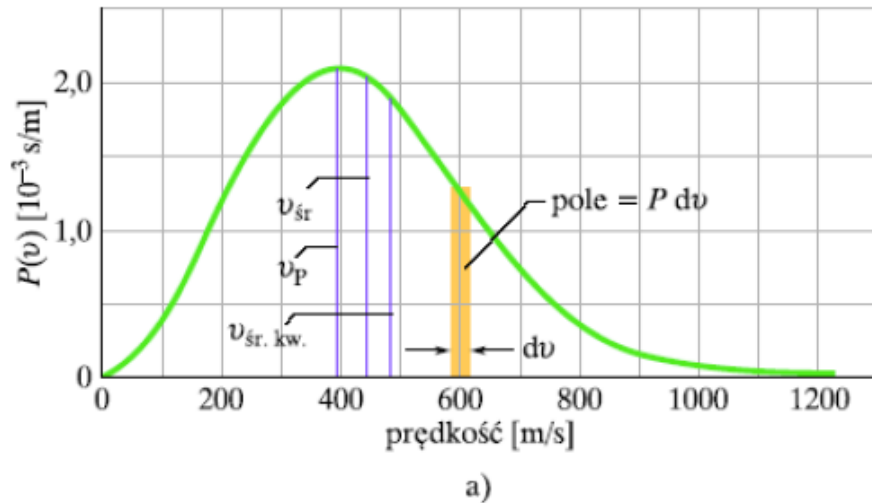
$\Rightarrow$

$$v_p = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

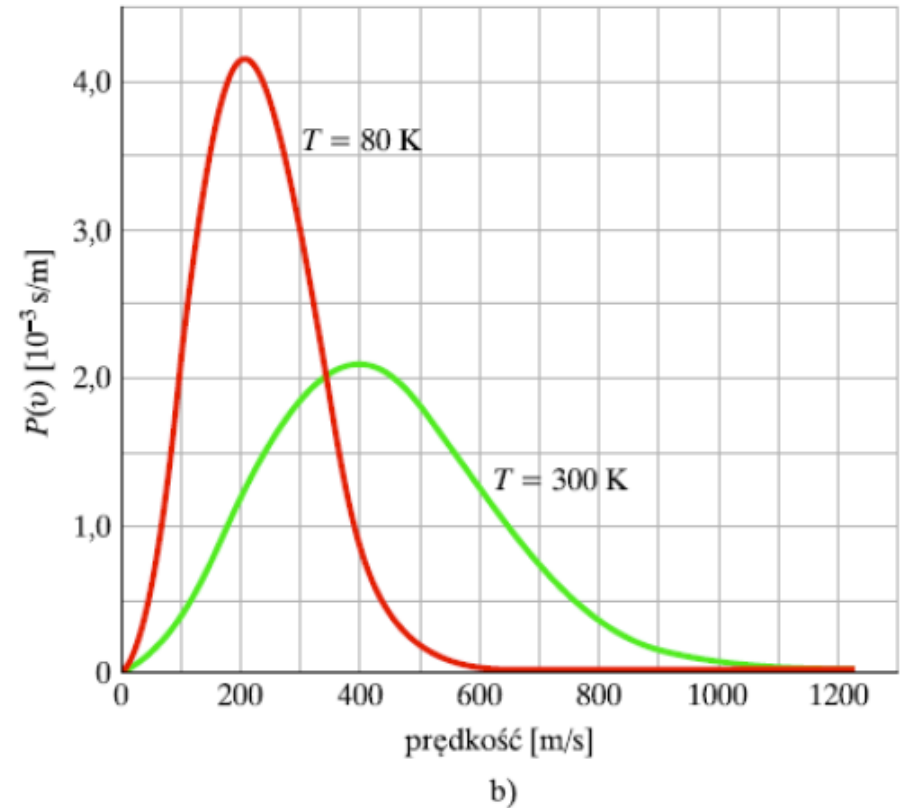
liczba cz. które
mają prędkość od
 v do $v+dv$

Rozkład prędkości cząsteczek gazu - Maxwell'a-Boltzmann'a

$$P(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv$$

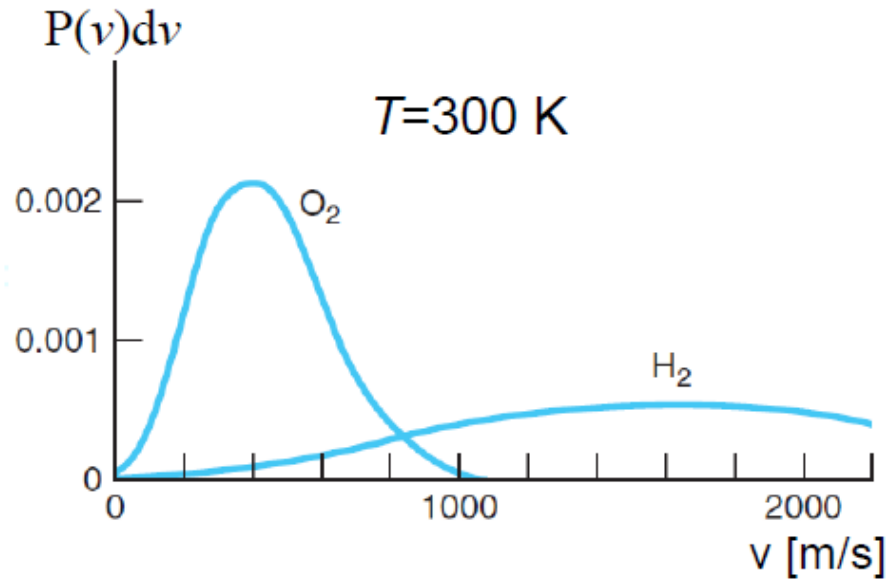


Rys. 20.7. a) Rozkład Maxwella dla prędkości cząsteczek tlenu w temperaturze $T = 300$ K. Na wykresie zaznaczono trzy prędkości charakterystyczne. b) Kształt krzywych dla 300 K i 80 K. Zauważ, że w niższej temperaturze cząsteczki poruszają się wolniej. Ponieważ krzywe opisują prawdopodobieństwo, pole pod każdą z nich musi być równe jedności



$$v_P = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad v_{sr} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad v_{sr.kw} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Rozkład prędkości cząsteczek gazu - Maxwell'a-Boltzmann'a

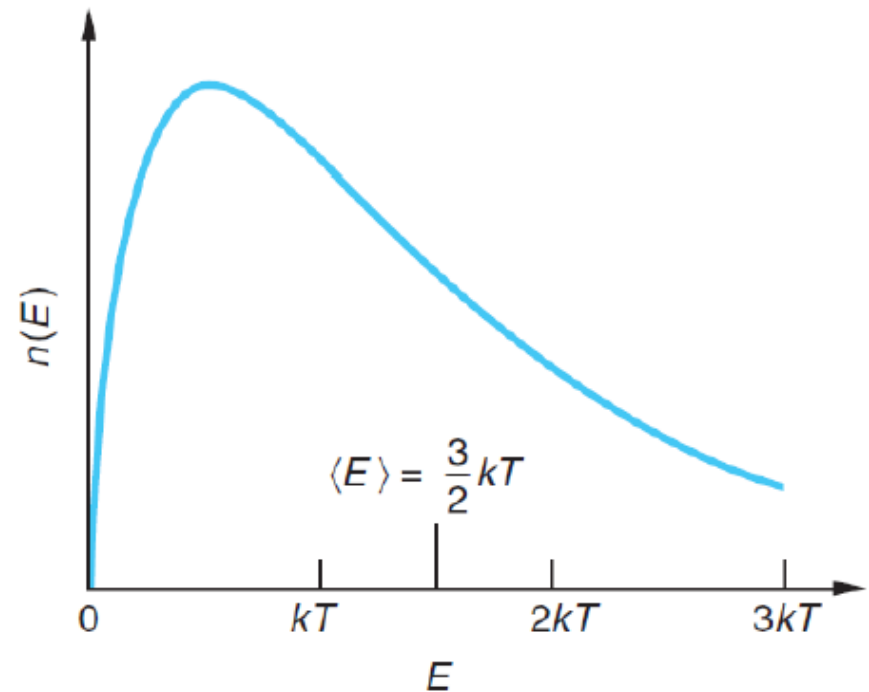


Rozkład prędkości cząsteczek o różnej masie molowej:

$$M_{\text{O}_2} = 32 \text{ g/mol} \quad M_{\text{H}_2} = 2 \text{ g/mol}$$

Rozkład energii kinetycznej cząsteczek gazu

$$n(E) dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$



Statystyki kwantowe

- Fermiego-Diraca dla fermionów
- Bosego-Einsteina dla bozonów

Najbardziej zadziwiającą własności mikroświata jest **nierozróżnialność** cząstek. W skali atomowej nie można rozróżnić składników tego samego rodzaju np. dwóch elektronów. Każdy elektron ma taką samą masę, ładunek, spin.

Fermionami są cząstki, których całkowity moment pędu z uwzględnieniem spinu wynosi $1/2$, $3/2$, $5/2$

Fermionami są: elektron, proton, neutron.

Bozonami są cząstki, których całkowity moment pędu z uwzględnieniem spinu jest liczbą całkowitą.

Bozonami są: foton, cząstka α , atom wodoru.

Funkcje falowe układu dwóch cząstek jednakowych

Rozwiązania równania Schrodingera dla układu dwóch cząstek jednakowych (np.. uwięzionych w studni potencjału). Istnieją dwa:

$$\psi_{nm}(1, 2) = \psi_n(1)\psi_m(2)$$

współrzędne

$$\psi_{nm}(2, 1) = \psi_n(2)\psi_m(1)$$

stan kwantowy pojedynczej cząstki

Gdyby cząstki były rozróżnialne to można by odróżnić te sytuacje, ale tak nie jest w mechanice kwantowej – **cząstek, których funkcje falowe przekrywają się nie da się rozróżnić**, (więc tych rozwiązań nie można brać pod uwagę, gdyż zamieniając współrzędne miejscami, otrzymujemy inne rozwiązania r. S.).

Ale kombinacje liniowe tych propozycji spełniają ten warunek:

Symetryczna, dla cząstek o spinie całkowitym, które nie polegają zakazowi Pauliego

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) + \psi_n(2)\psi_m(1)]$$

Anty-symetryczna, cząstki o spinie połówkowym, podlegające zakazowi Pauliego

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) - \psi_n(2)\psi_m(1)]$$

Funkcje falowe układu dwóch cząstek w tym samym stanie kwantowym

Gdy $m=n$ cząstki są w tym samym stanie kwantowym. Wówczas mamy trzy sytuacje:

1. Cząstki rozróżnialne (klasyczne). ← (jak w rozkładzie Boltzmana)

$$\psi_{nn}(1, 2) = \psi_{nn}(2, 1) = \psi_n(1)\psi_n(2) = \psi_n(2)\psi_n(1) = \psi_B$$

$$\psi_B^* \psi_B = \psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2)$$

2. Cząstki nierozróżnialne („bozony”, o spinie całkowitym, podlegają statystyce Bosego-Einsteina)

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) + \psi_n(2)\psi_n(1)] = \frac{2}{\sqrt{2}}\psi_n(1)\psi_n(2)$$

$$\psi_{BE}^* \psi_{BE} = 2\psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2) = 2\psi_B^* \psi_B$$

Funkcje falowe układu dwóch cząstek w tym samym stanie kwantowym

$$\psi_{BE}^* \psi_{BE} = 2\psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2) = 2\psi_B^* \psi_B$$

Prawdopodobieństwo znalezienia dwóch „bozonów” w tym samym stanie kwantowym jest 2x większe niż dla cząstek klasycznych!!!

Występowanie bozonu w ustalonym stanie kwantowym zwiększa prawdopodobieństwo, że inne, jednakowe bozony znajdować się będą w tym samym stanie.

Najbardziej znanym przykładem praktycznego wykorzystania tego faktu jest laser.

3. Cząstki nierozróżnialne (o spinie połówkowym, „fermiony”, podlegają statystyce Fermiego-Dirac’a)

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) - \psi_n(2)\psi_n(1)] = 0$$

czyli gęstość prawdopodobieństwa jest = 0, czyli taka sytuacja jest niemożliwa do realizacji.

Funkcje falowe układu dwóch cząstek w tym samym stanie kwantowym

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) - \psi_n(2)\psi_n(1)] = 0$$

Występowanie fermionu w ustalonym stanie kwantowym uniemożliwia innemu, jednakowemu fermionowi znalezienie się w tym samym stanie”.

Fermiony zachowują się tak jakby się „odpychały”. Jest to konsekwencja związana z zakazem Pauliego!

Kryterium, kiedy cząstki są nierozróżnialne

Jeśli długość fali de Broglie'a λ jest znacznie mniejsza niż średnia odległość między cząstkami $\langle d \rangle$, możemy zaniedbać przekrywania się funkcji falowych, wówczas cząstki możemy traktować jako rozróżnialne.

$$\lambda \ll \langle d \rangle \qquad \langle d \rangle = (V/N)^{1/3}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m(3kT/2)}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{3mkT}} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

Warunek decyduje o stosowalności rozkładu Boltzmana. Dla cząstek o ustalonej masie jest on spełniony dla dostatecznie niskich gęstości liczby cząstek lub dla dostatecznie wysokich temperatur.

gęstość

$$\left(\frac{N}{V}\right) \frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}} \ll 1$$

temperatura

PRZYKŁAD 8.6. Rozkład helu w atmosferze. Atomy helu mają zerowy spin, są więc bozonami. Cząsteczki helu stanowią $5,24 \cdot 10^{-4}$ wszystkich cząstek w atmosferze. (a) Czy można użyć rozkładu Boltzmann'a do badania właściwości termodynamicznych helu w atmosferze dla $T = 273 \text{ K}$? (b) A dla ciekłego helu w temperaturze $4,2 \text{ K}$?

ROZWIĄZANIE

(a) W warunkach normalnych N_A atomów powietrza ma objętość $2,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$. Koncentracja atomów helu wynosi wówczas

$$\frac{N}{V} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 5,24 \cdot 10^{-6}}{2,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} = 1,41 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}.$$

Lewa strona warunku (8.36) jest wtedy równa:

$$\frac{1,41 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^3}{(3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 273 \text{ K})^{3/2}} = 6,3 \cdot 10^{-11} \ll 1.$$

Właściwości atmosferycznego helu mogą być zatem opisywane przy użyciu rozkładu Boltzmann'a.

(b) Gęstość ciekłego helu w temperaturze wrzenia, wynoszącej 4,2 K, jest równa 0,124 g/cm³. Koncentracja cząstek helu wynosi zatem:

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{4 \text{ g}} \cdot (0,124 \text{ g/cm}^3) \cdot (10^2 \text{ cm/m})^3 = 1,87 \cdot 10^{28} \text{ He atomów/m}^3.$$

Lewa strona warunku (8.36) jest wtedy równa:

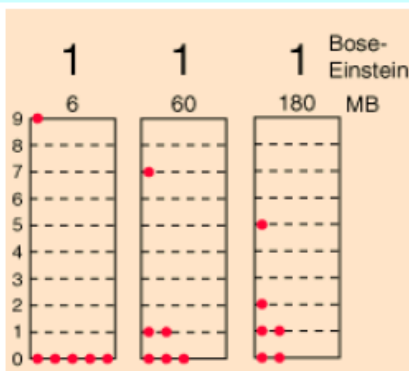
$$\frac{(1,87 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^3}{(3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 4,2 \text{ K})^{3/2}} = 4,39,$$

a zatem nie jest mała w porównaniu z 1. Oznacza to, że rozkład Boltzmann'a nie pozwala poprawnie opisywać właściwości ciekłego helu i konieczne jest użycie rozkładu Bosego–Einsteina.

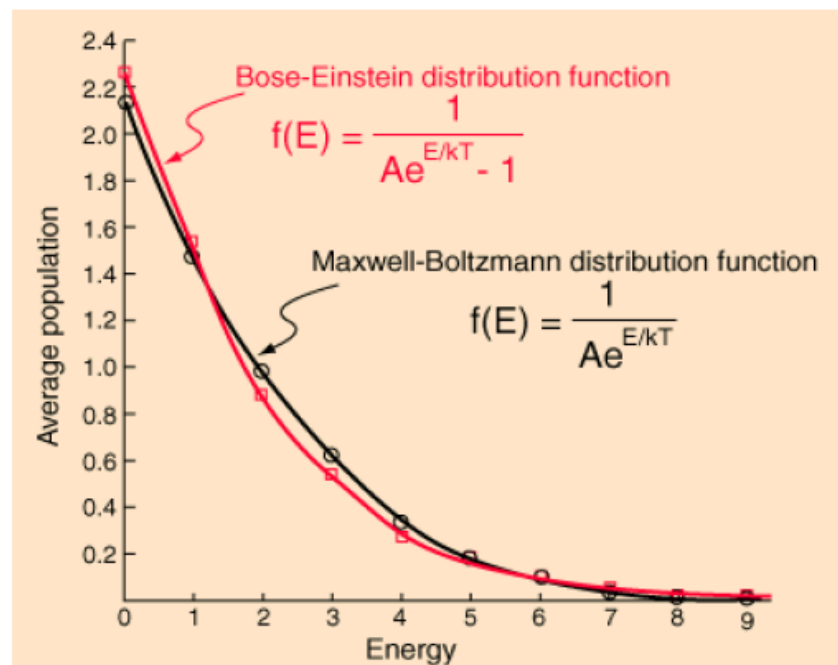
Rozkład Bosego-Einsteina dla bozonów

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1}$$

- cząstki nierozróżnialne
- bozony - cząstki o spinie całkowitym



Układ 6 nierozróżnialnych cząstek o spinie 1 ma całkowitą energię $9\Delta E$. W każdym z 10 stanów o energiach $E_n = n\Delta E$ ($n=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$) może być dowolna liczba cząstek. Mikrostan układu: podana jest liczba cząstek w każdym ze stanów.



Fotony są bozonami. Ze statystyki Bosego-Einsteina można wyprowadzić prawo Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego.

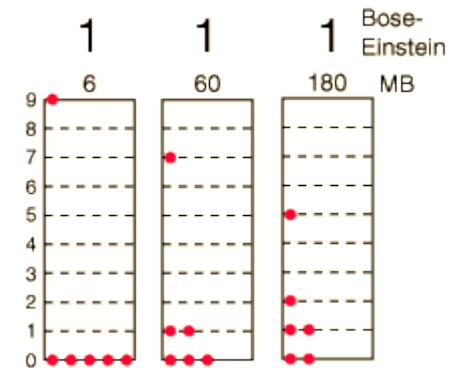
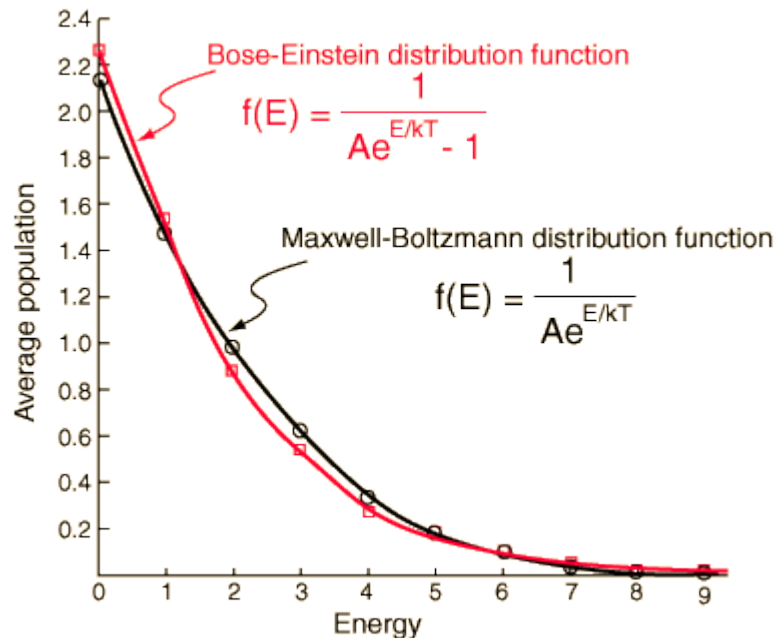
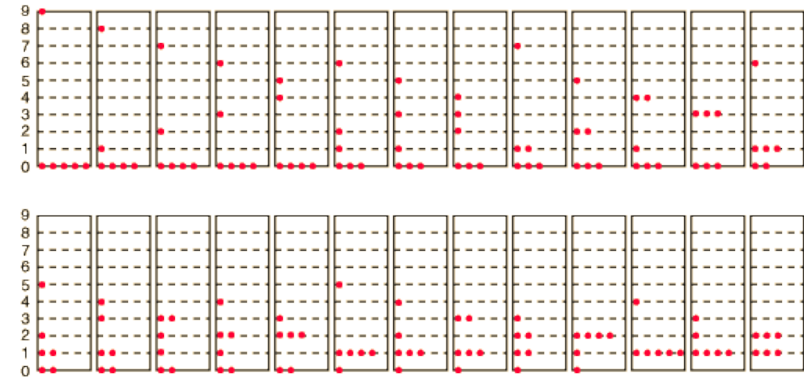
$$u(\nu, T) = \frac{4\pi}{c} I(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Rozkład Bosego-Einsteina – przykład numeryczny

Jest 26 możliwych konfiguracji w przypadku cząstek nierozróżnialnych. Każda z dystrybucji w tym przypadku ma prawdopodobieństwo = 1.

Średnią populację cząstek o energii j :
sumujemy liczbę cząstek o energii j po każdym z 26-ciu makrostanów i dzielimy po liczbie makrostanów czyli przez 26.

(<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>)



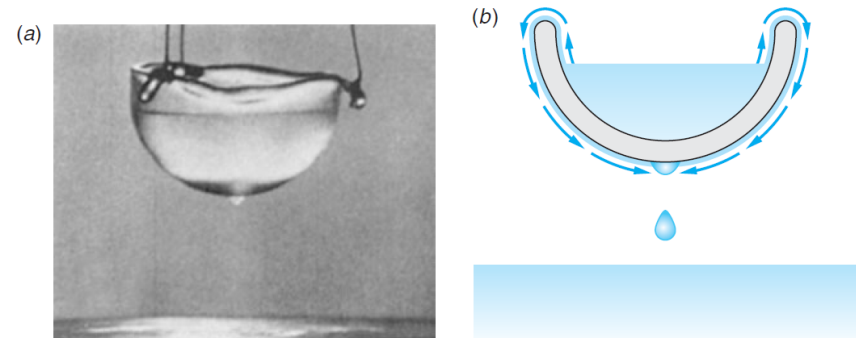
Zastosowanie rozkładu Bosego-Einstein'a

Fotony są bozonami. Ze statystyki Bosego-Einsteina można wyprowadzić prawo Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego.

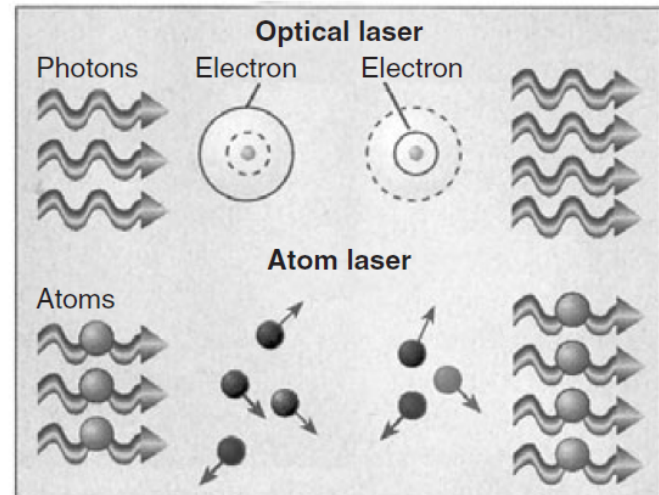
$$u(\nu, T) = \frac{4\pi}{c} I(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Kondesat Bosego-Einsteina -
(temat na mini-seminarium)
laser atomowy,
interferometr atomowy

Własności „nadciekłego” helu
(temat na mini-seminarium)



(b)



Zastosowanie rozkładu Bosego-Einstein'a

Wyjaśnienie zależności ciepła właściwego gazów i ciał stałych od temperatury (w zakresie temperatur bardzo niskich)

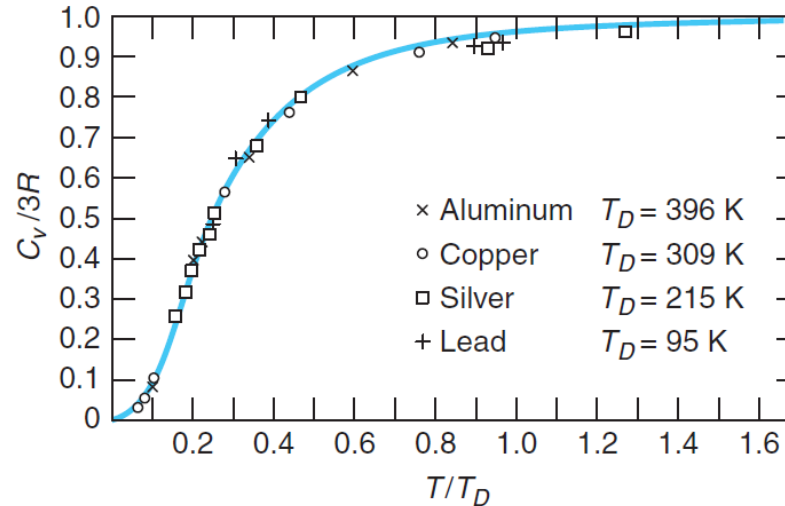


Figure 8-30 Molar heat capacity of several solids versus reduced temperature T/T_D , where T_D is the Debye temperature, defined as $T_D = hf_D/k$. The solid curve is that predicted by Debye. The data are taken from Debye's original paper. $C_v/3R = 1$ is the Dulong-Petit value. [From *Annalen der Physik* **39** (4), 789 (1912), as adapted by David MacDonald, *Introductory Statistical Mechanics for Physicists* (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963); by permission.]

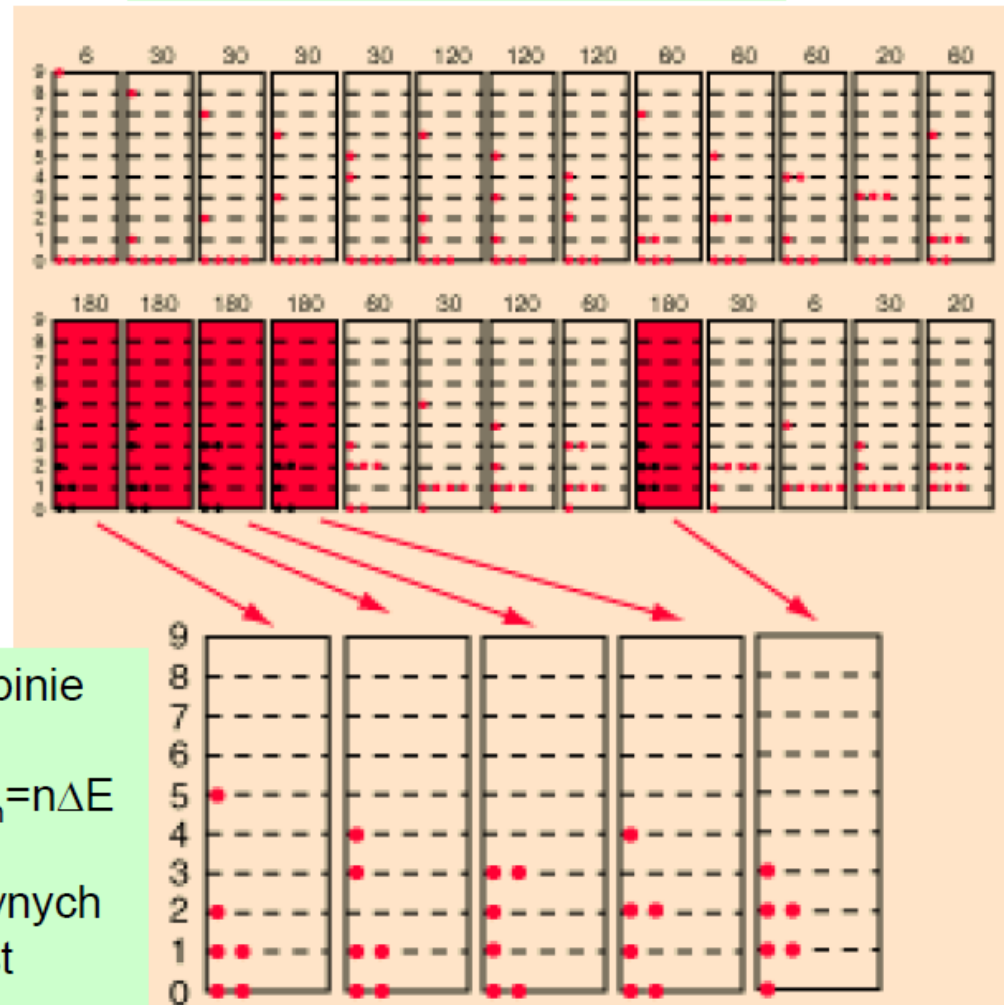
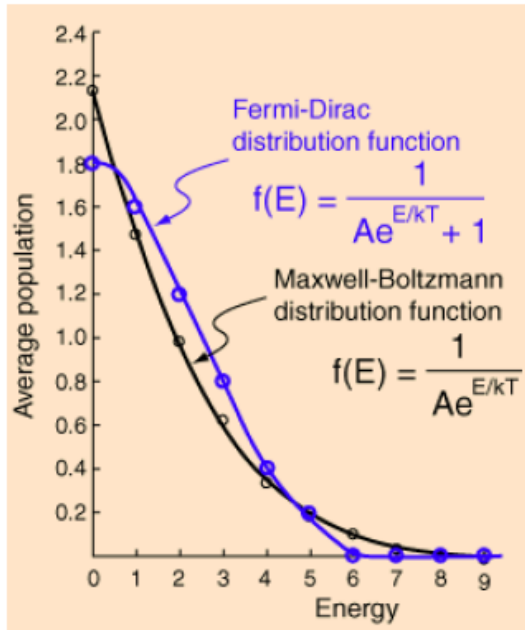
$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3N_A k \left(\frac{hf}{kT} \right)^2 \frac{e^{hf/kT}}{(e^{hf/kT} - 1)^2}$$

$$C_v \rightarrow 0 \text{ as } T \rightarrow 0 \text{ and } C_v \rightarrow 3N_A k = 3R \text{ as } T \rightarrow \infty.$$

Rozkład Fermiego-Diraca dla fermionów

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$$

- cząstki nierozróżnialne
- cząstki o spinie połówkowym (obowiązuje zakaz Pauliego)



Układ 6 nierozróżnialnych cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ ma całkowitą energię $9\Delta E$.
 W każdym z 10 stanów o energiach $E_n = n\Delta E$ ($n=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$) mogą być najwyżej 2 cząstki o przeciwnych spinach. Mikrostan układu: podana jest liczba cząstek w każdym ze stanów.

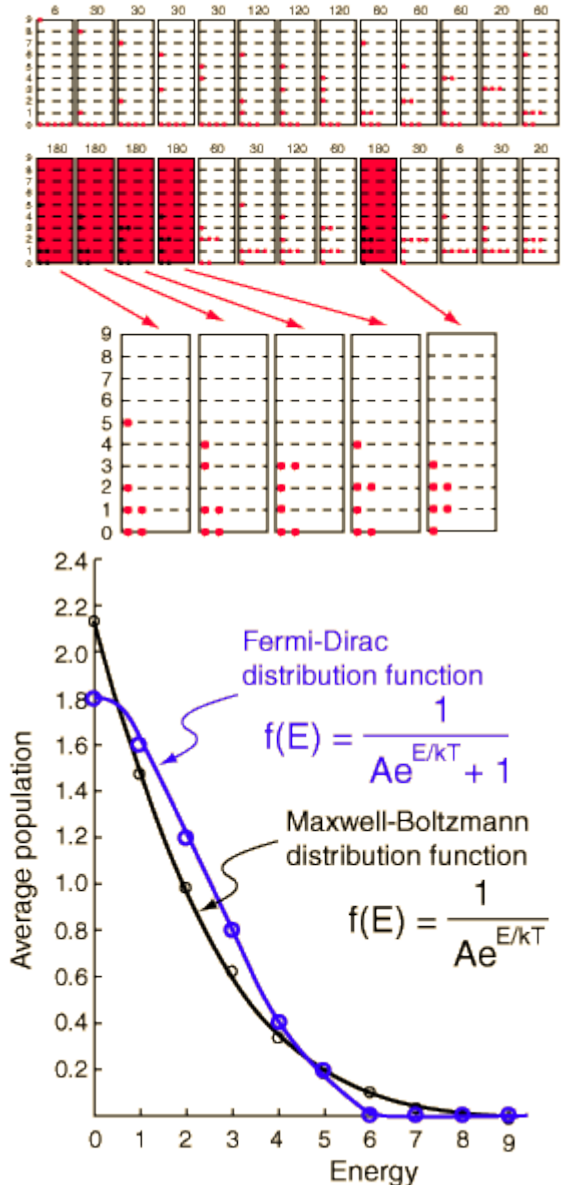
Rozkład Fermiego-przykład numeryczny

Możliwe są tylko takie mikrostanu gdzie na jednym poziomie energetycznym mogą być max. tylko dwie cząstki.

Dlatego jest tylko 26 możliwych konfiguracji rozłożenia energii cząstek w przypadku cząstek nieróżnialnych, która redukuje się do 5 w przypadku cząstek - fermionów. Każdy makrostan w tym przypadku ma prawdopodobieństwo = 1.

Średnią populację cząstek o energii j :
sumujemy liczbę cząstek o energii j po każdym z 5-ciu makrostanów i dzielimy po liczbie makrostanów czyli przez 5.

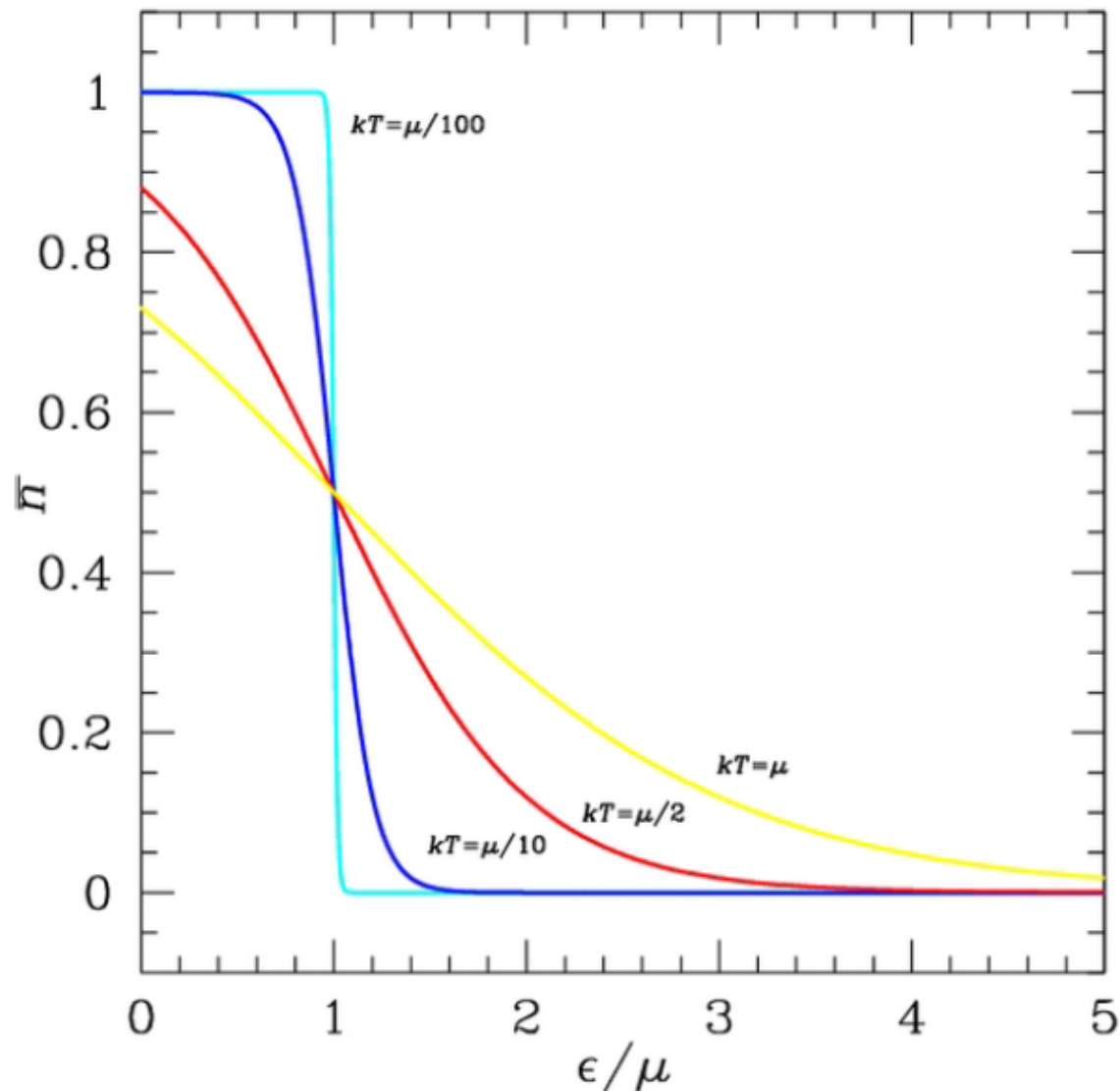
(<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>)



Rozkład Fermiego-Diraca

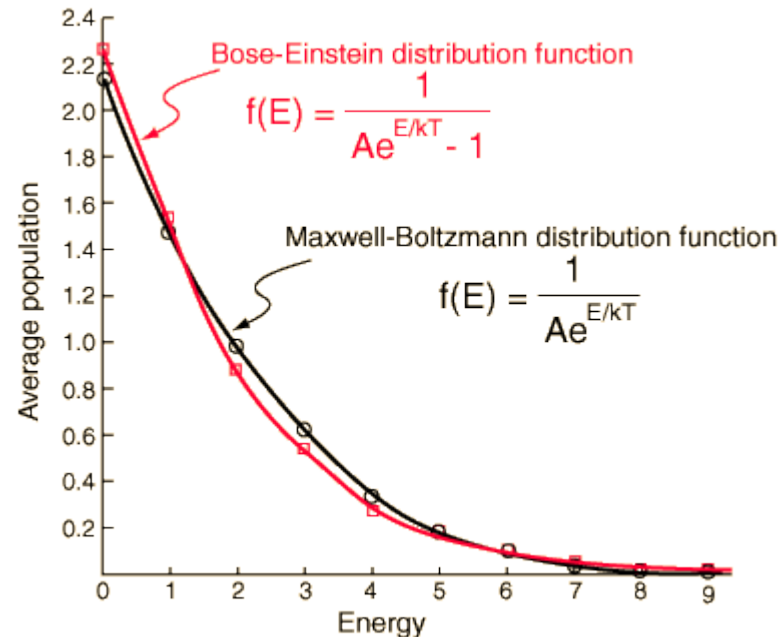
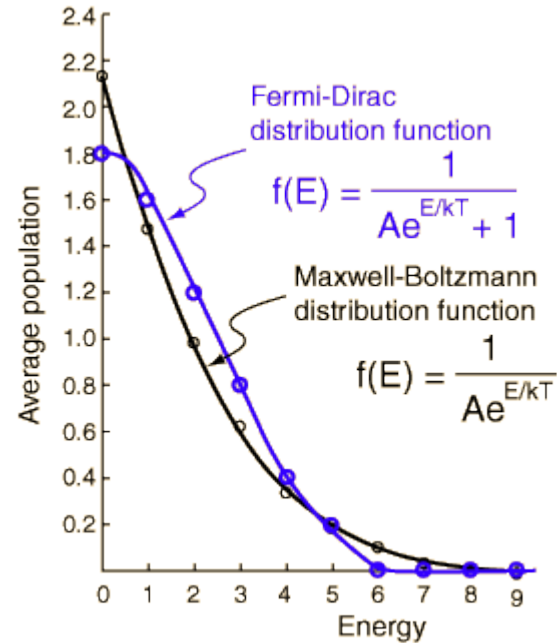
$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$$

Energia Fermiego E_F
(lub μ potencjał chemiczny) -
prawdopodobieństwo
obsadzenia stanu o energii
 $E=E_F$ jest $f(E_F)=1/2$



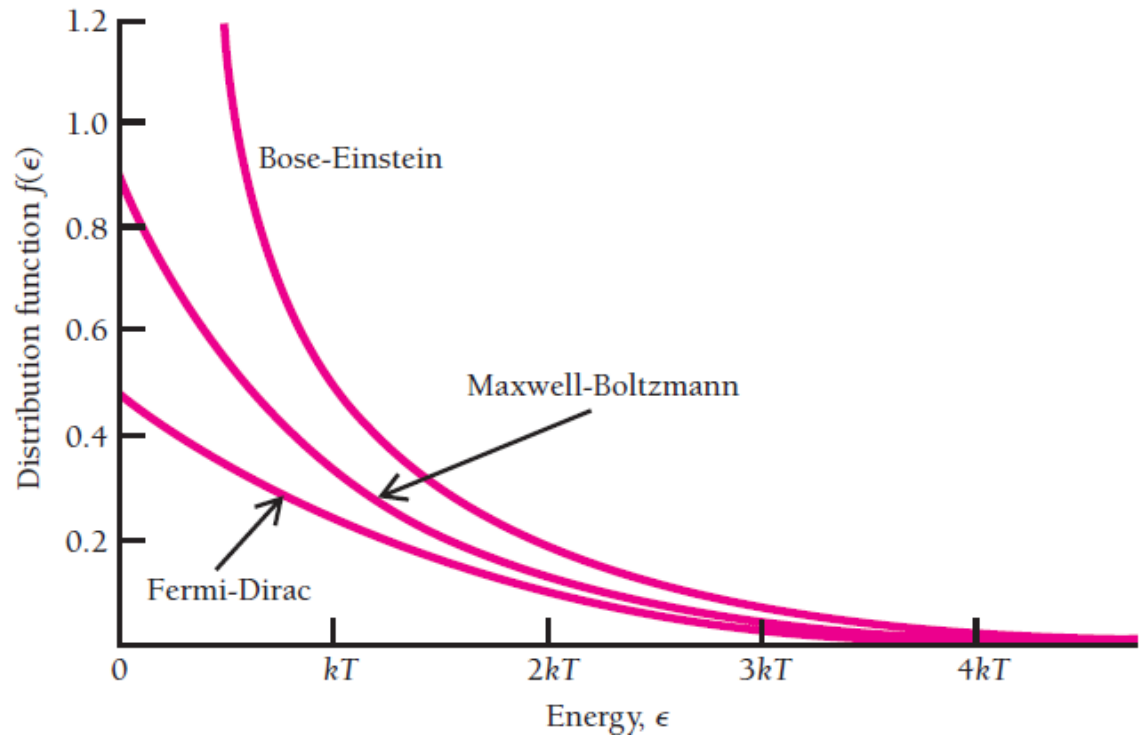
Przykłady numerycznych obliczeń

E	Average number Maxwell-Boltzmann	Average number Bose-Einstein	Average number Fermi-Dirac
0	2.143	2.269	1.8
1	1.484	1.538	1.6
2	0.989	0.885	1.2
3	0.629	0.538	0.8
4	0.378	0.269	0.4
5	0.210	0.192	0.2
6	0.105	0.115	0
7	0.045	0.077	0
8	0.015	0.038	0
9	0.003	0.038	0



Porównanie rozkładów

Figure 9.5 A comparison of the three distribution functions for the same value of α . The Bose-Einstein function is always higher than the Maxwell-Boltzmann one, which is a pure exponential, and the Fermi-Dirac function is always lower. The functions give the probability of occupancy of a state of energy ϵ at the absolute temperature T .



Podsumowanie

The Energy Distribution Function

The distribution function $f(E)$ is the probability that a particle is in energy state E . The [distribution function](#) is a generalization of the ideas of [discrete probability](#) to the case where energy can be treated as a continuous variable. Three distinctly different distribution functions are found in nature. The term A in the denominator of each distribution is a normalization term which may change with temperature.

Maxwell-Boltzmann (classical)	Bose-Einstein (quantum)	Fermi-Dirac (quantum)
$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$	$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1}$	$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} + 1}$
Identical but distinguishable particles.	Identical indistinguishable particles with integer spin (bosons).	Identical indistinguishable particles with half-integer spin (fermions).
Examples: Molecular speed distribution	Examples: Thermal radiation Specific heat	Examples: Electrons in a metal Conduction in semiconductor .

Table 9.1 The Three Statistical Distribution Functions

	Maxwell-Boltzmann	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
Applies to systems of	Identical, distinguishable particles	Identical, indistinguishable particles that do not obey exclusion principle	Identical, indistinguishable particles that obey exclusion principle
Category of particles	Classical	Bosons	Fermions
Properties of particles	Any spin, particles far enough apart so wave functions do not overlap	Spin 0, 1, 2, . . . ; wave functions are symmetric to interchange of particle labels	Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$; wave functions are antisymmetric to interchange of particle labels
Examples	Molecules of a gas	Photons in a cavity; phonons in a solid; liquid helium at low temperatures	Free electrons in a metal; electrons in a star whose atoms have collapsed (white dwarf stars)
Distribution function (number of particles in each state of energy ϵ at the temperature T)	$f_{MB}(\epsilon) = Ae^{-\epsilon/kT}$	$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{\epsilon/kT} - 1}$	$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\epsilon_F)/kT} + 1}$
Properties of distribution	No limit to number of particles per state	No limit to number of particles per state; more particles per state than f_{MB} at low energies; approaches f_{MB} at high energies	Never more than 1 particle per state; fewer particles per state than f_{MB} at low energies; approaches f_{MB} at high energies