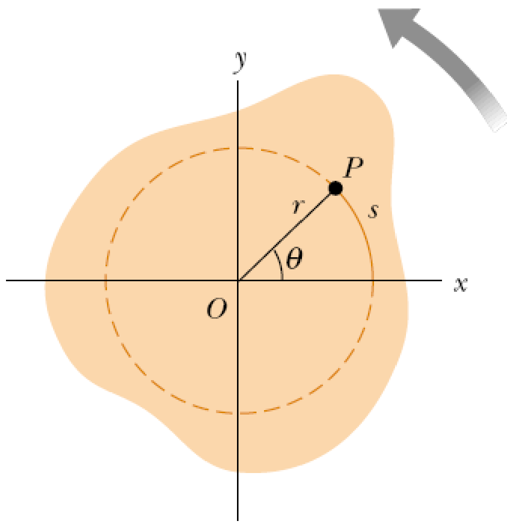
Opis ruchu obrotowego

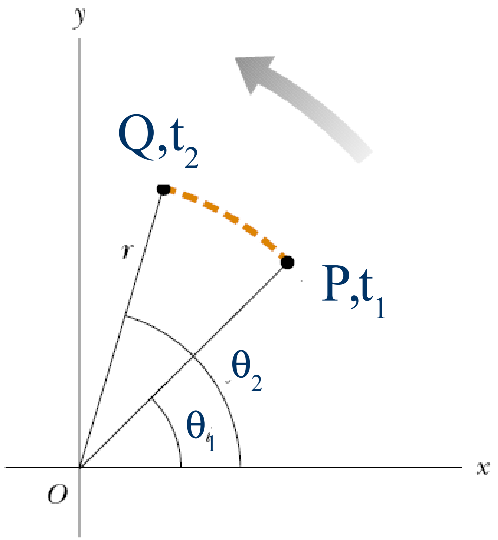
- Oprócz ruchu translacyjnego ciała obserwujemy w przyrodzie inną jego odmianę: <u>ruch obrotowy</u>
  - Ruch obrotowy jest zawsze względem osi obrotu
  - W ruchu obrotowym wszystkie punkty zakreślają okręgi których środkiem jest oś obrotu

- Położenie kątowe



- Przesunięcie kątowe

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



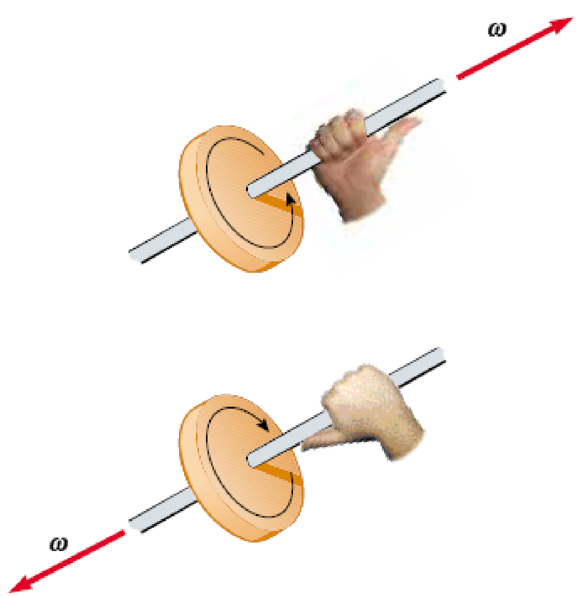
Opis ruchu obrotowego

- Prędkość kątowa średnia

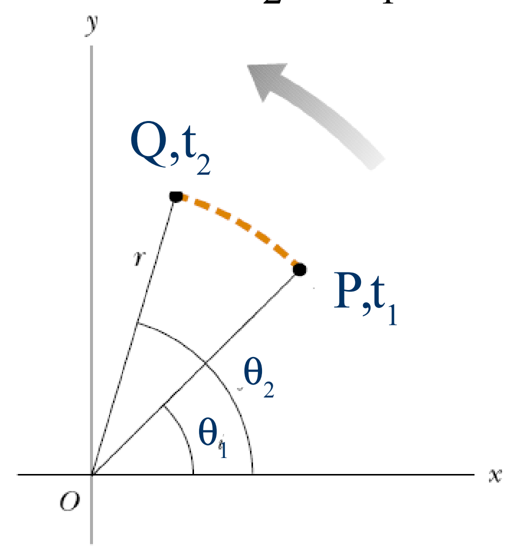
$$\omega_{śr} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad.}{s}\right]$$

- Prędkość kątowa chwilowa

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



Opis ruchu obrotowego

- Przyspieszenie kątowe średnie

$$\varepsilon_{śr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \left[\frac{rad.}{s^2}\right]$$

- Przyspieszenie kątowe chwilowe

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

„druga pochodna"

- Prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe jest takie samo dla wszystkich punktów bryły sztywnej, ale punkty nie poruszają się z taką samą prędkością liniową

Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem

- Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem opisujemy podobnie jak dla ruchu postępowego

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

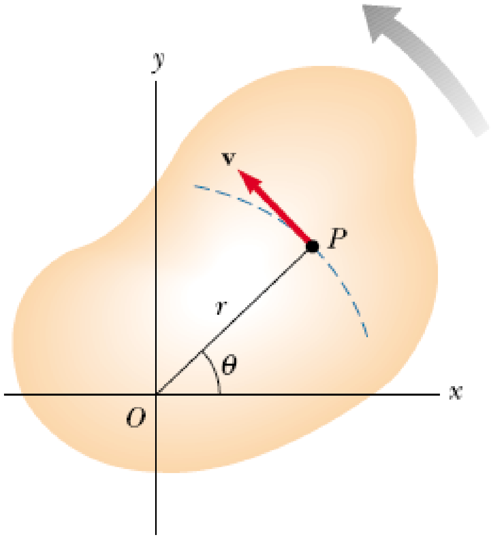
Związek między prędkością kątową a prędkością liniową

- kiedy punkt P przemieszcza się to zakreśla łuk

$$s = \Delta\theta\, r$$

- wartość prędkości liniowej

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta r)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r = \omega r$$



- wartość przyspieszenia

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(v/r)}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{r} = \frac{a_t}{r}$$

jest przyspieszeniem stycznym do toru !!!

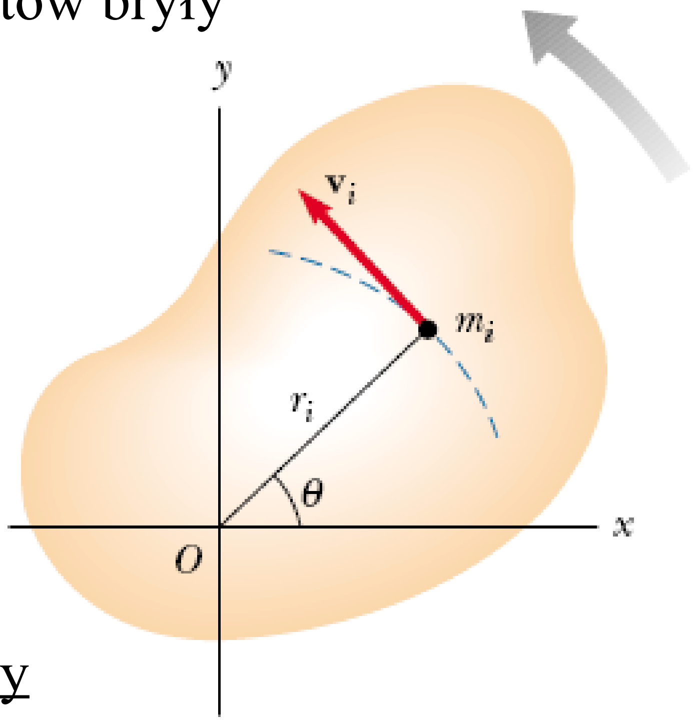
$$a_t = \varepsilon r$$

Energia ruchu obrotowego

- Każdy punkt materialny ma energię kinetyczną

$$E_{k(i)} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2}$$

- Kiedy sumujemy energię wszystkich punktów bryły



$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2}$$

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2$$

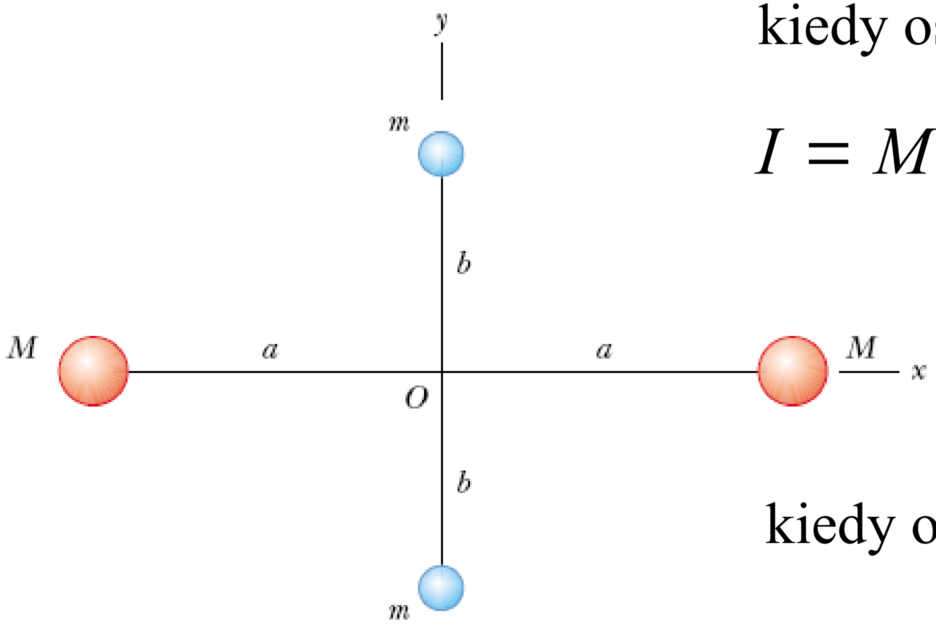
gdzie $I = \sum_i m_i r_i^2$

nazywamy <u>momentem bezwładności bryły</u>

więc $E_k = \frac{I \omega^2}{2}$

Moment bezwładności bryły

- Moment bezwładności zależy od osi obrotu, np.:



kiedy oś obrotu jest wzdłuż *y*

$$I = M a^2 + M a^2 + m 0^2 + m 0^2 = 2\mathrm{Ma}^2$$

kiedy oś obrotu jest prostopadła do *x* i *y*

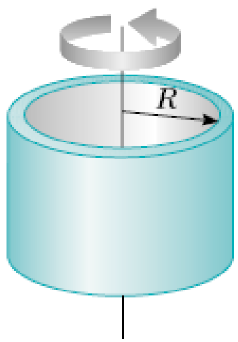
$$I = M a^2 + M a^2 + m b^2 + m b^2$$

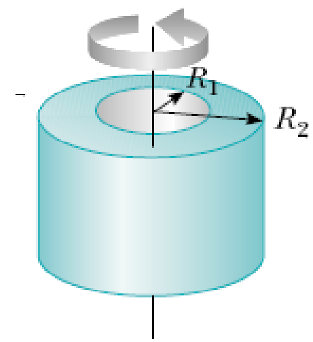
$$I = 2\left(M a^2 + m b^2\right)$$

Moment bezwładności bryły

- Ogólnie moment bezwładności liczy się wg formuły: $I = \int r^2 dm$
- Oto przykłady momentów bezwładności:

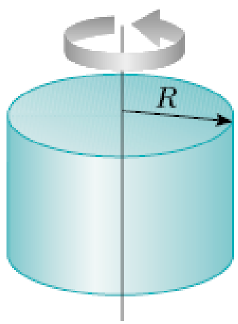
$$I = M R^2$$

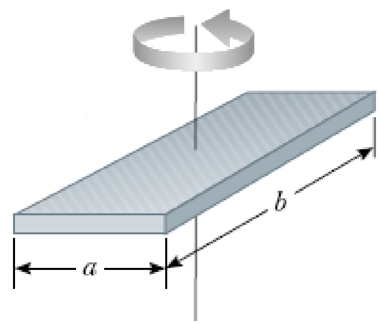




$$I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$





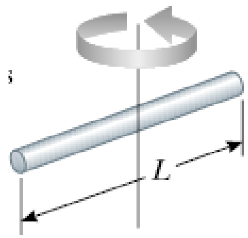
$$I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

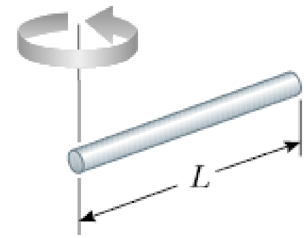
Trzeba zwrócić uwagę gdzie jest oś obrotu!!!

Moment bezwładności bryły

- Ogólnie moment bezwładności liczy się wg formuły: $I = \int r^2\, dm$
- Oto przykłady momentów bezwładności:

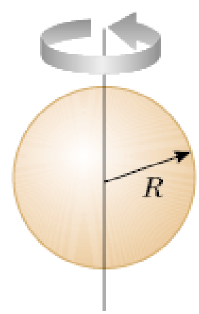
$$I = \frac{1}{12} M\, L^2$$

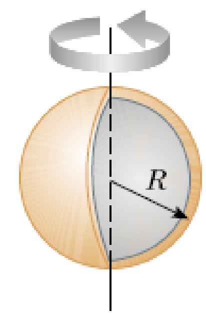




$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I = \frac{2}{5} M\, R^2$$





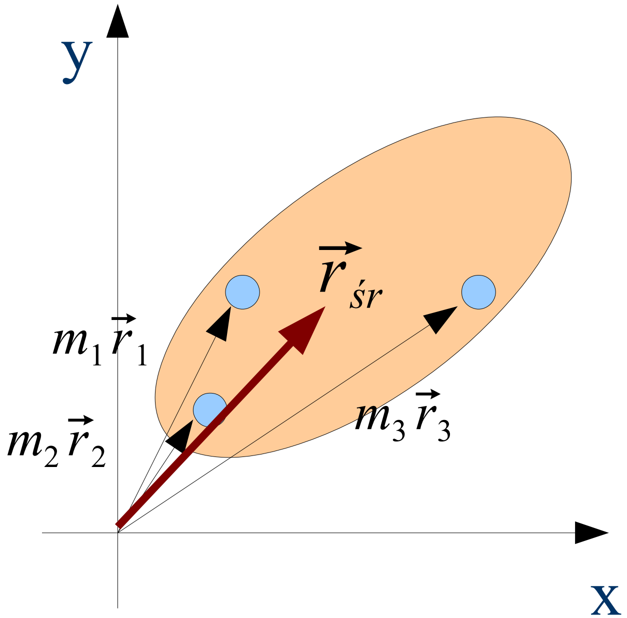
$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

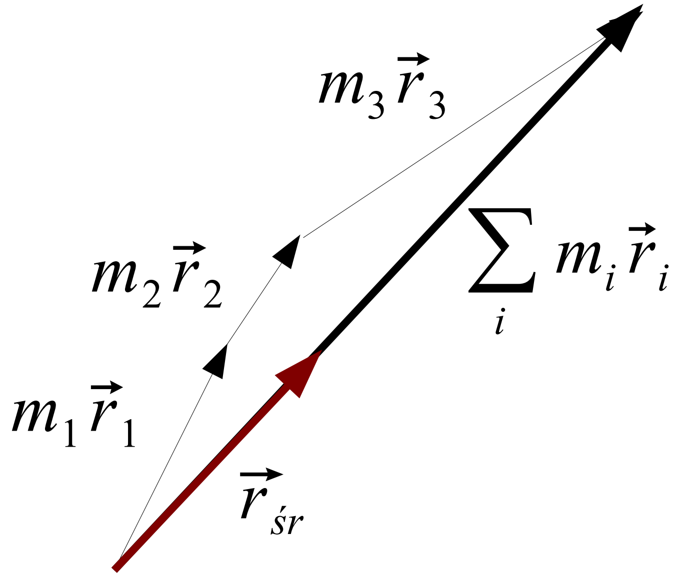
Trzeba zwrócić uwagę gdzie jest oś obrotu!!!

Moment bezwładności bryły

- szczególny punkt – środek masy
- środek masy jest wektorem położenia

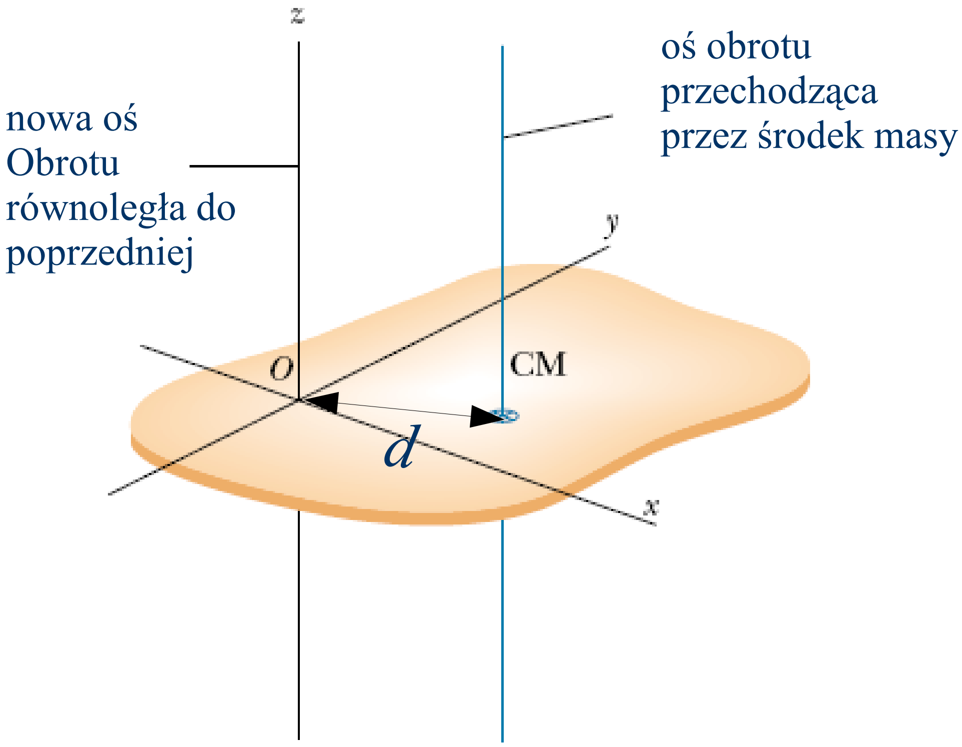
$$\vec{r}_{śr} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$





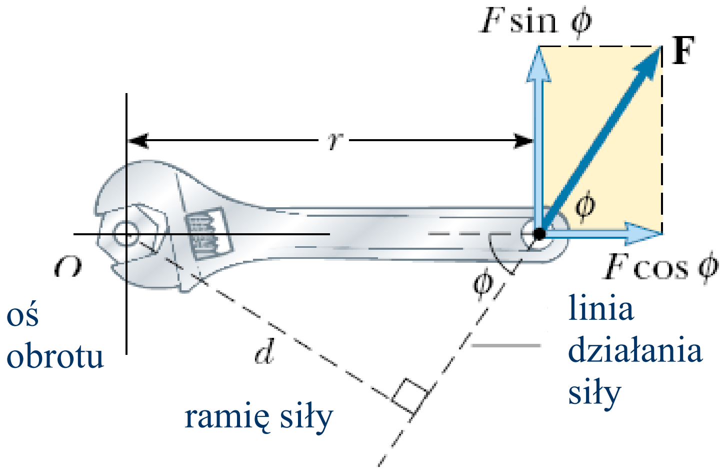
Moment bezwładności bryły – równoległe przesuniecie osi obrotu

- Twierdzenie Steinera



$$I = I_0 + M d^2$$

Moment siły obracającej obiekt



Def.: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Wartość momentu siły:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin \phi$$

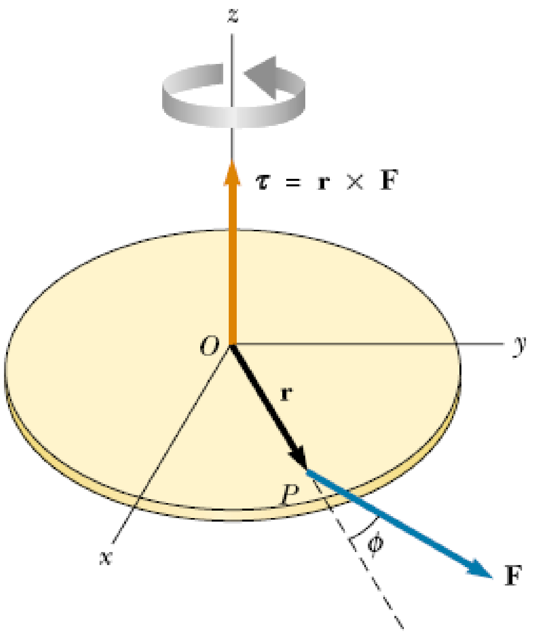
$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| d$$

ramię siły

$$d = \left|\vec{r}\right| \cdot \sin \phi$$

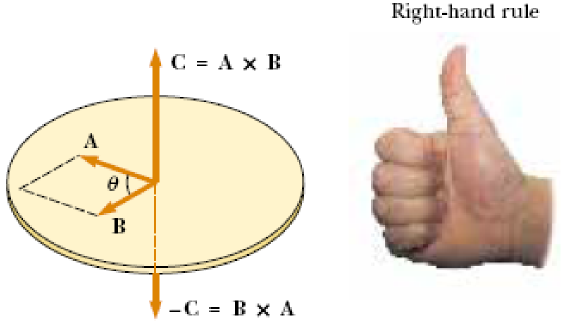
Kierunek i zwrot momentu siły określa reguła śruby prawoskrętnej

Moment siły obracającej obiekt

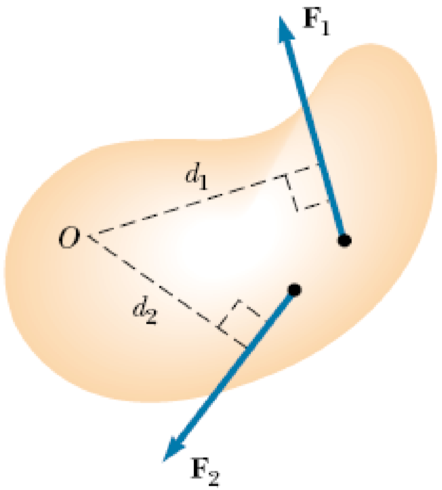


Def.: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Kierunek i zwrot momentu siły określa reguła śruby prawoskrętnej



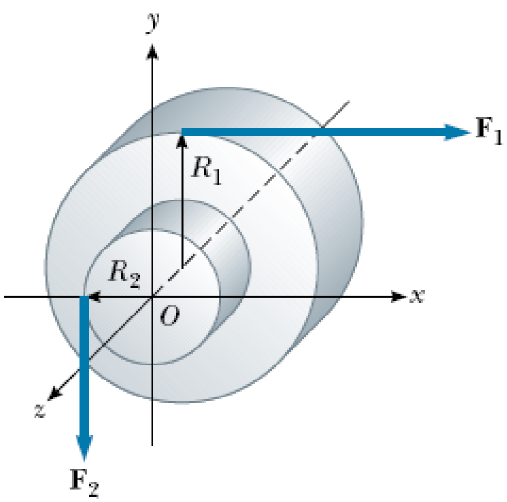
Moment sił obracających - przykład



$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

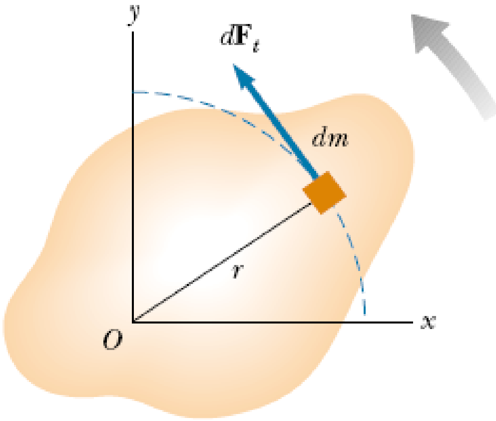
Momenty sił F_1 i F_2 są przeciwnie skierowane

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}_1\right| \cdot d_1 - \left|\vec{F}_2\right| \cdot d_2$$



$$\left|\vec{M}\right| = -\left|\vec{F}_1\right| \cdot R_1 + \left|\vec{F}_2\right| \cdot R_2$$

Moment siły obracającej i przyspieszenie kątowe



Faktyczna siła która obraca obiekt jest prostopadła do promienia obrotu

$$F_t = m a_t$$

$$r F_t = r m a_t = m \varepsilon r^2$$

$$M = \varepsilon m r^2 \qquad \text{ogólnie :} \qquad \vec{M} = \vec{\varepsilon} I$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

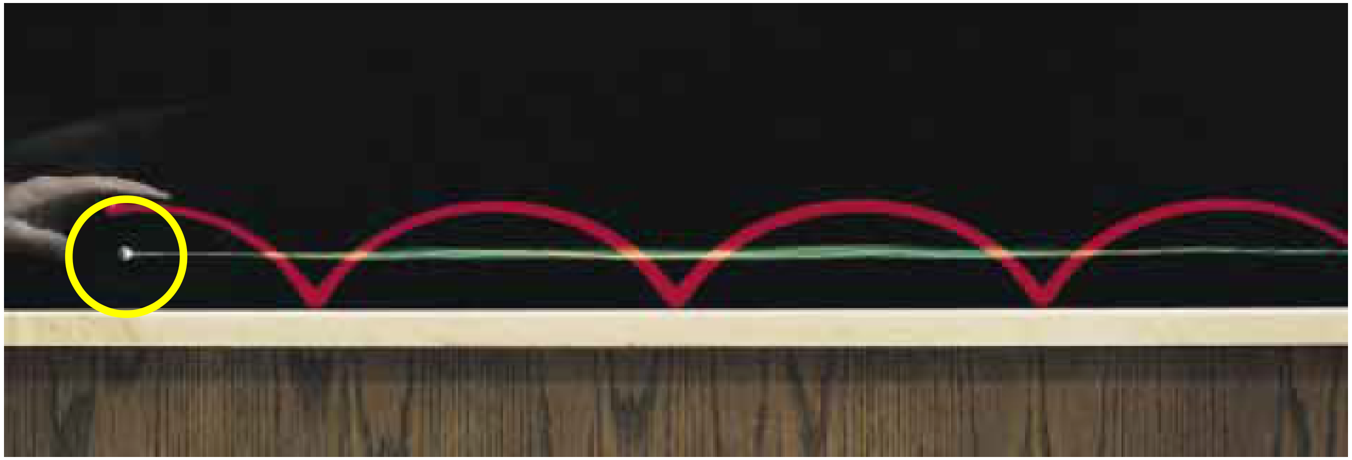
$$\vec{M} = \vec{\varepsilon} I$$

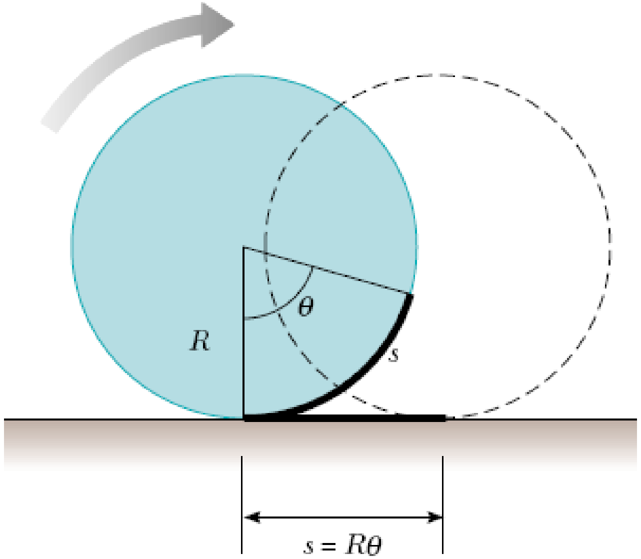
Całkowity moment sił działających na bryłę

Przyspieszenie kątowe

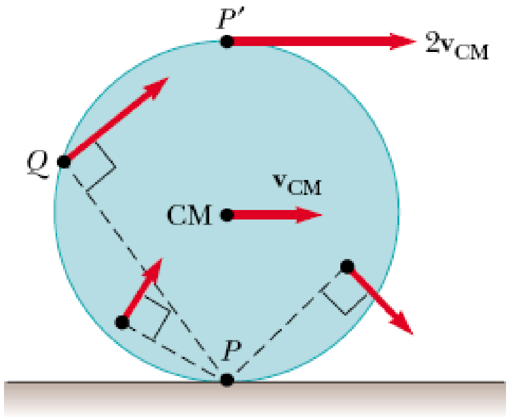
Moment bezwładności względem osi obrotu

Energia toczącego się obiektu





Energia toczącego się obiektu



Ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu w punkcie P

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

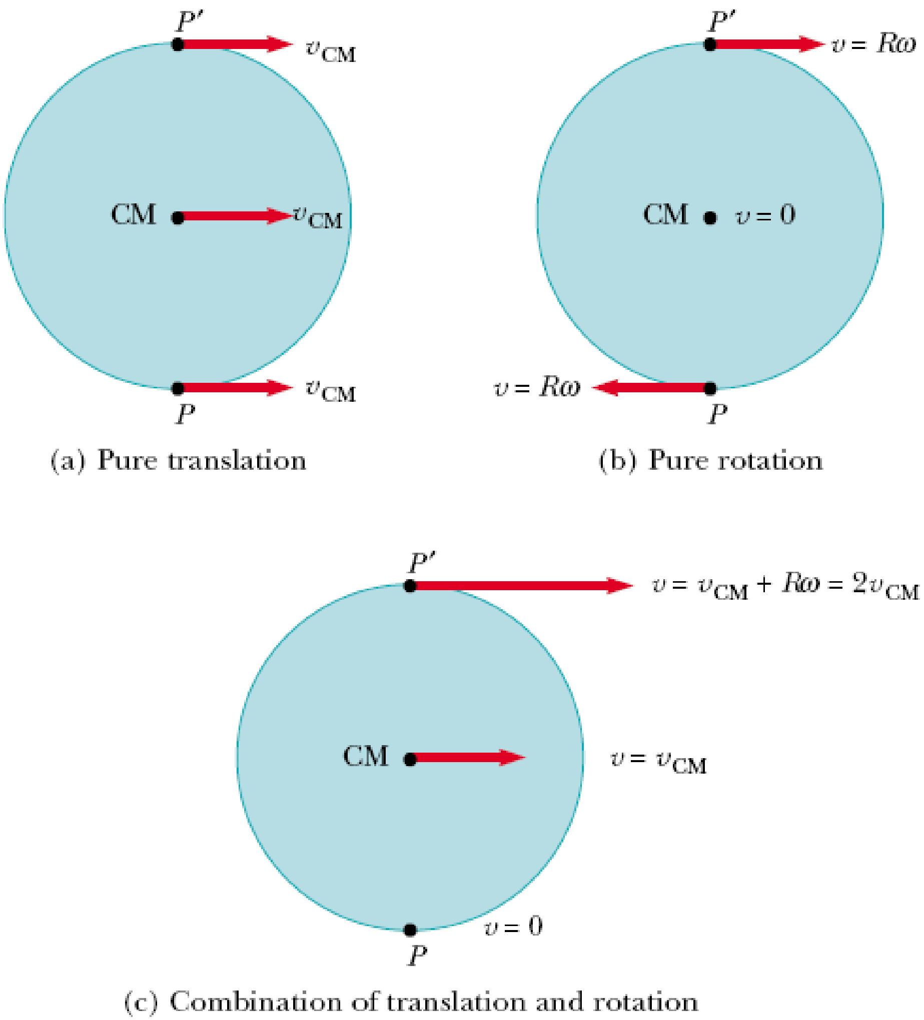
Z tw. Steinera

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

albo

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{śr.m}^2$$

Energia toczącego się obiektu



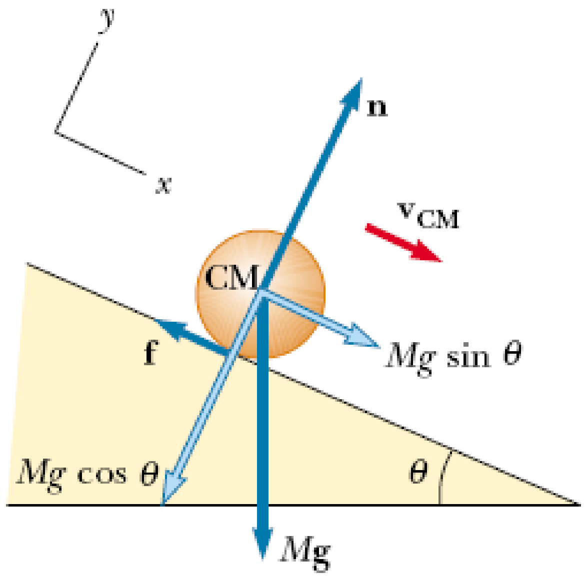
Ruch toczącego się obiektu jest złożeniem ruchu obrotowego i ruchu translacyjnego

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{śr.m}^2$$

Energia ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy

Energia ruchu translacyjnego środka masy

Energia toczącego się obiektu - przykład



$$\sum F_x = mg\sin\theta - T = ma$$

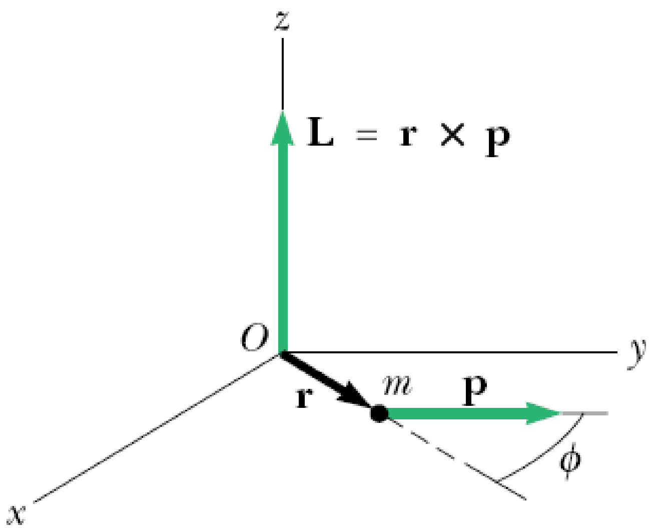
$$\sum F_y = n - mg\cos\theta$$

$$T\,R = I_0\,\varepsilon \qquad\qquad a = \varepsilon\,R$$

Moment siły tarcia,
które powoduje obrót

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I_0}{mR^2}}$$

Moment pędu obracającej się masy m



Def.: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Wartość momentu pędu:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{mv}\right| \cdot \sin\theta$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r} \times \overrightarrow{mv}\right)}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

0

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Całkowity moment sił działających na cząstkę

Zmiana w czasie momentu pędu cząstki

Moment pędu bryły (układu cząstek)

Def.: $$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_N = \sum_i \vec{L}_i$$

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L = I \omega$$

Moment bezwładności bryły względem osi obrotu

Prędkość kątowa bryły

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Całkowity moment sił działających na bryłę

Zmiana w czasie momentu pędu bryły

Zasada zachowania momentu pędu

Wynika z II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Jeśli na układ cząstek nie działają żadne momenty sił zewnętrznych (albo momenty te się równoważą) to moment pędu układu jest stały w czasie

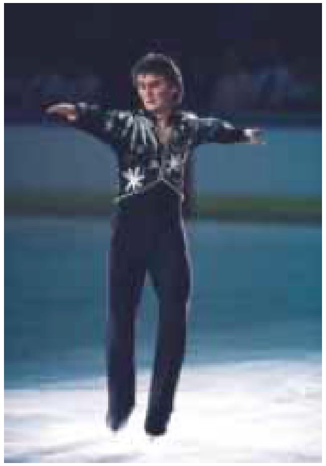
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L} = const$$

$$I\omega = const$$

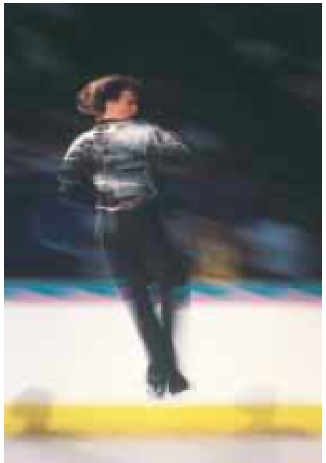
Zasada zachowania momentu pędu - przykłady

$$I\omega = const$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$



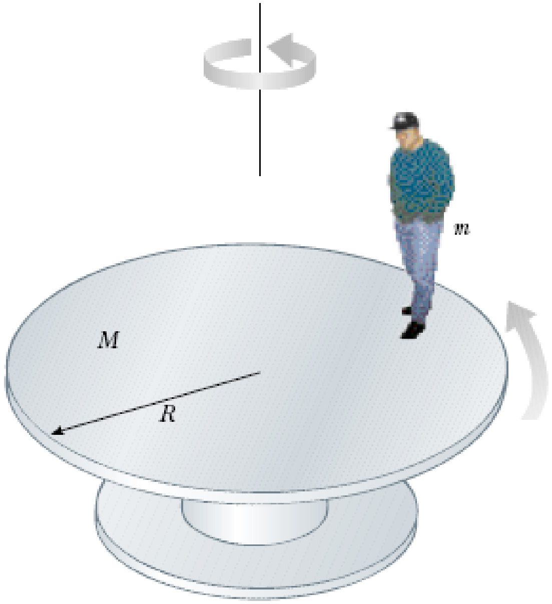
Łyżwiarz w trakcie wolnego obrotu zmienia (zmniejsza) swój moment bezwładności



$$\omega_2 = \frac{I_2}{I_1}\omega_1$$

W konsekwencji rośnie jego prędkość obrotowa

Zasada zachowania momentu pędu - przykłady



$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m r^2} \right) \omega_1$$