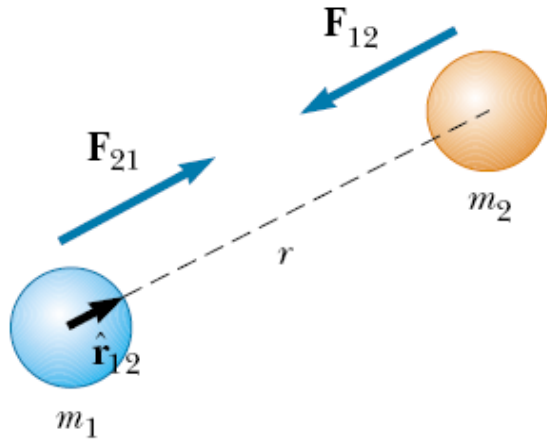


Prawo powszechnego ciążenia, siła grawitacyjna, pole grawitacyjne

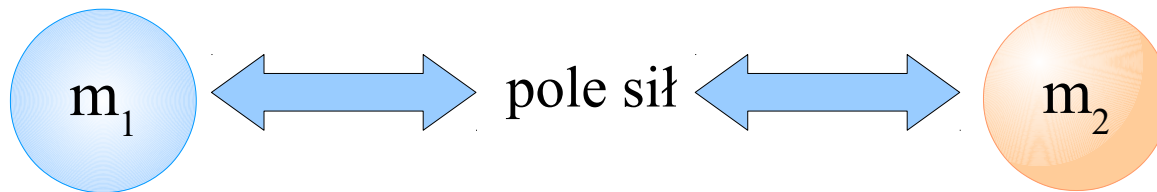


$$\vec{F}_{12} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

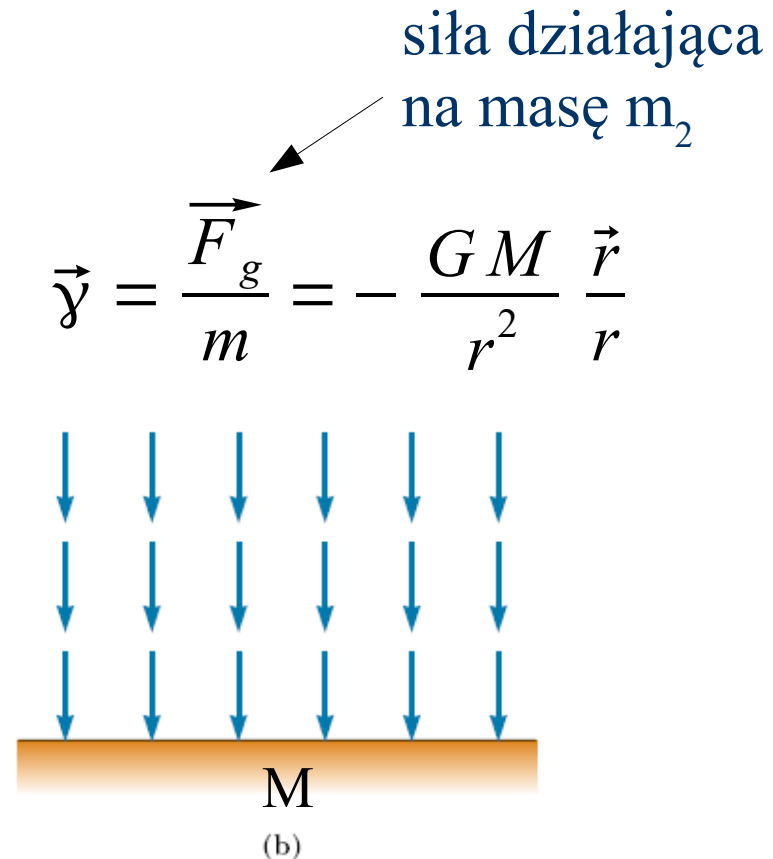
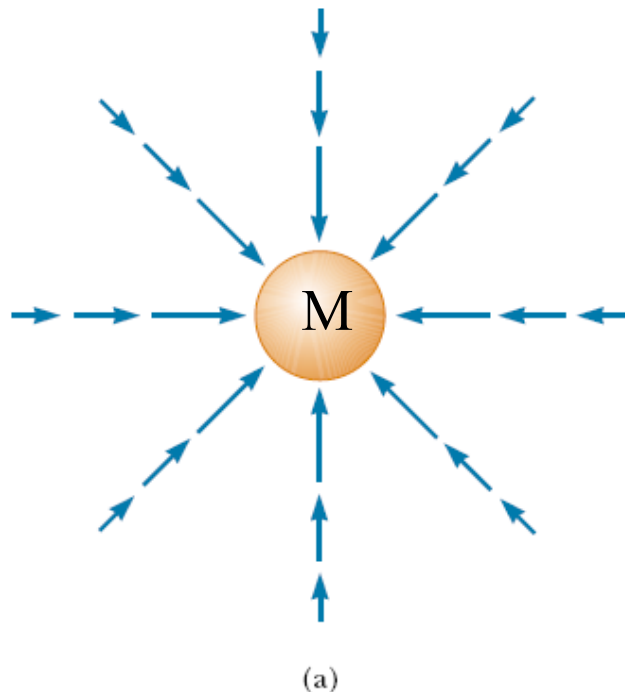
$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Schemat oddziaływania:



Prawo powszechnego ciążenia, siła grawitacyjna, pole grawitacyjne

- ♦ Masa M jest źródłem pola grawitacyjnego
- ♦ Masa m jest niewielką „masą próbą” tzn, $m \ll M$
- ♦ Można zdefiniować wielkość charakteryzującą pole masy M :
natężenie pola grawitacyjnego



Przyspieszenie ziemskie

- ♦ Z natężeniem pola grawitacyjnego związane jest tzw. przyspieszenie ziemskie g
- ♦ Na powierzchni Ziemi:

$$\vec{\gamma} m = \vec{F}_g = m \vec{g}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{g}$$

- ♦ Przyspieszenie ziemskie g nie jest stałe...

$$\vec{\gamma} m = \vec{F}_g = m \vec{g}$$

- ♦ jego wartość zmienia się wraz z wysokością h nad powierzchnią Ziemi:

$$g = \gamma = \frac{G M}{r^2} = \frac{G M}{(R_Z + h)^2}$$

Przyspieszenie ziemskie

Zmiany g z wysokością dla szerokości geograficznej 45°

Wysokość m	g m/s^2	Wysokość m	g m/s^2
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000*	7,41
16 000	9,757	380 000 000**	0,00271

★ Wysokość typowej orbity satelitarnej.

★★ Promień orbity Księżyca.

Energia potencjalna cząstki m w polu grawitacyjnym

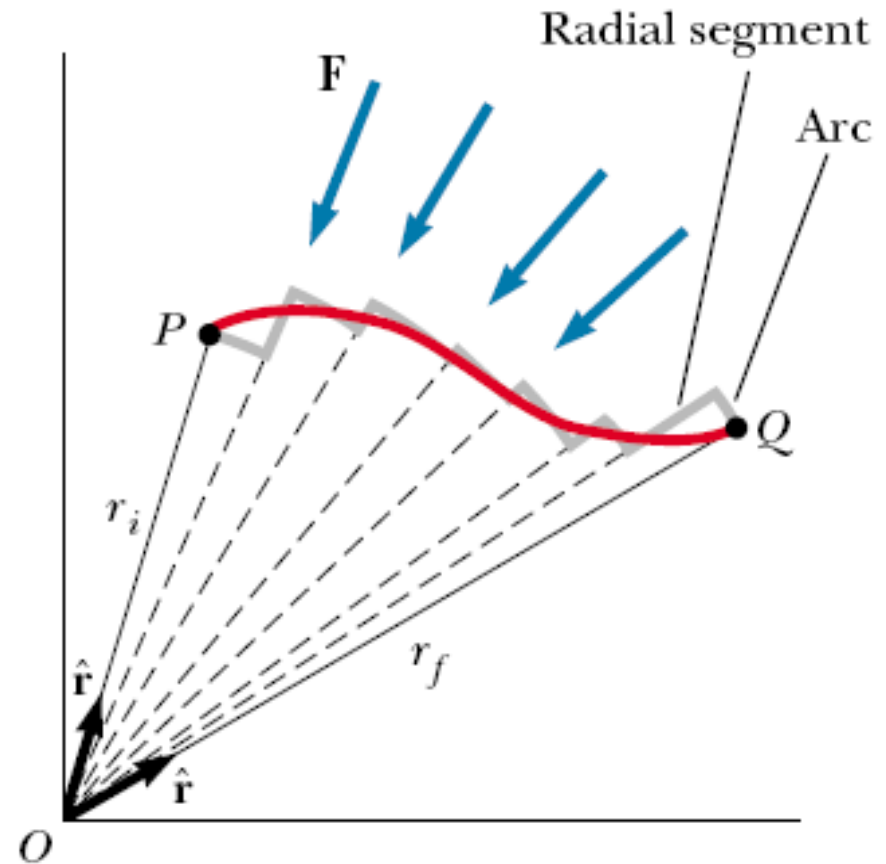
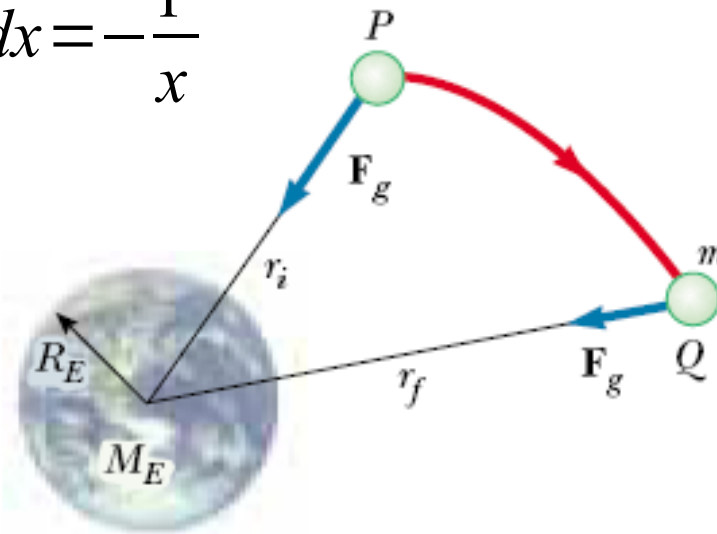
Work done by a central force

$$\Delta U = -W = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} (-1) G \frac{M m}{r^2} dr$$

$$\Delta U = -G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

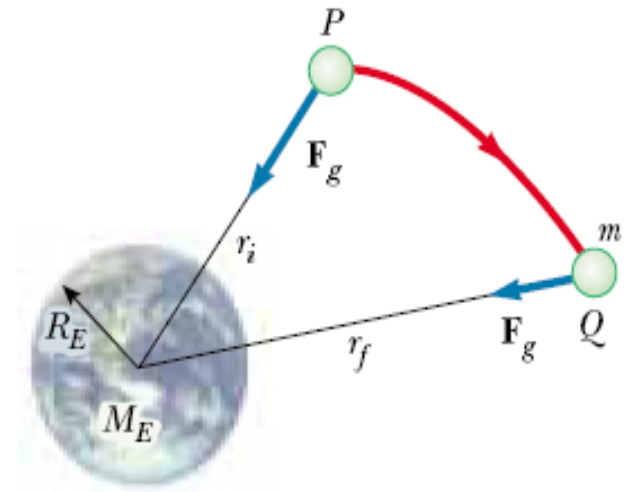


Energia potencjalna cząstki m w polu grawitacyjnym

- ◆ Energię potencjalną w polu grawitacyjnym liczy się względem punktu w nieskończoności czyli $1/r_1$. W nieskończoności przyjmujemy że U dąży do 0

$$U(r) - U(\infty) = -GMm \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$U(r) = -GMm \left(\frac{1}{r} \right)$$



- ◆ Wzór na siłę grawitacyjną możemy wyprowadzić z energii potencjalnej

$$F_g = -\frac{dU}{dr}$$

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}.$$

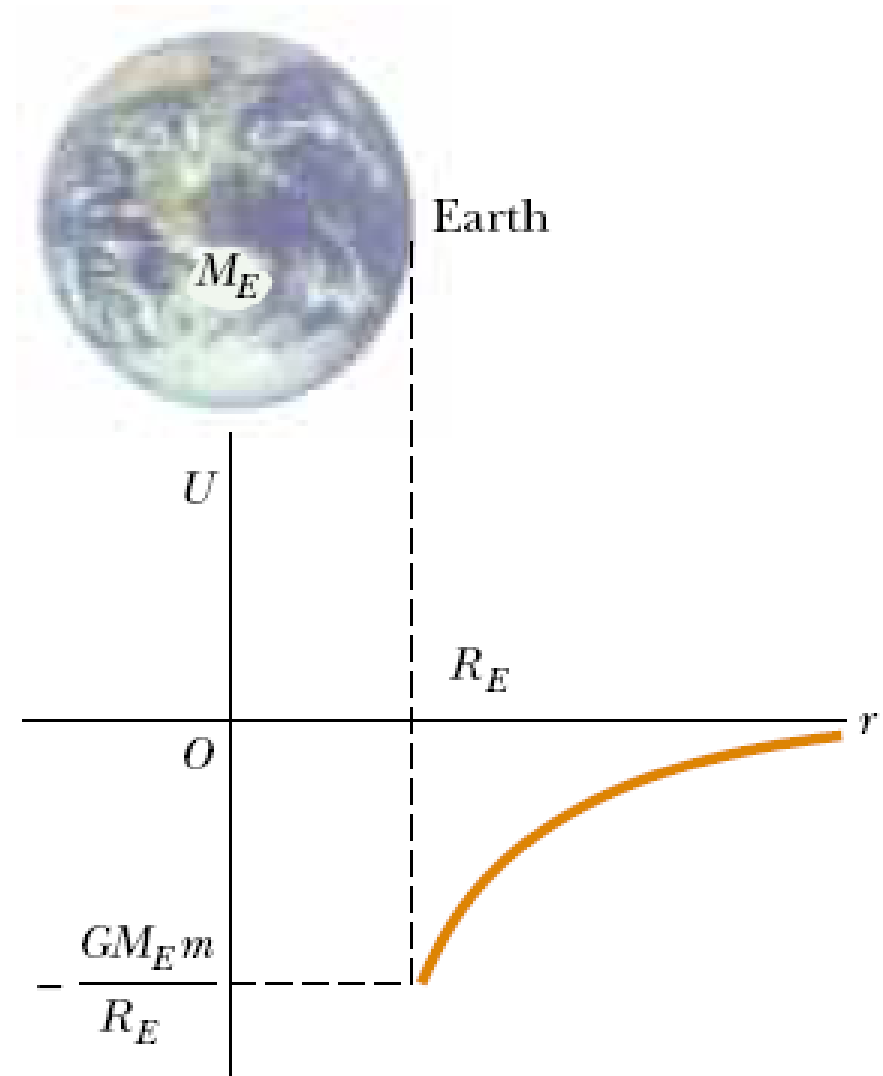
Potencjał pola grawitacyjnego

- ♦ Energia potencjalna

$$U(r) = - G M m \left(\frac{1}{r} \right)$$

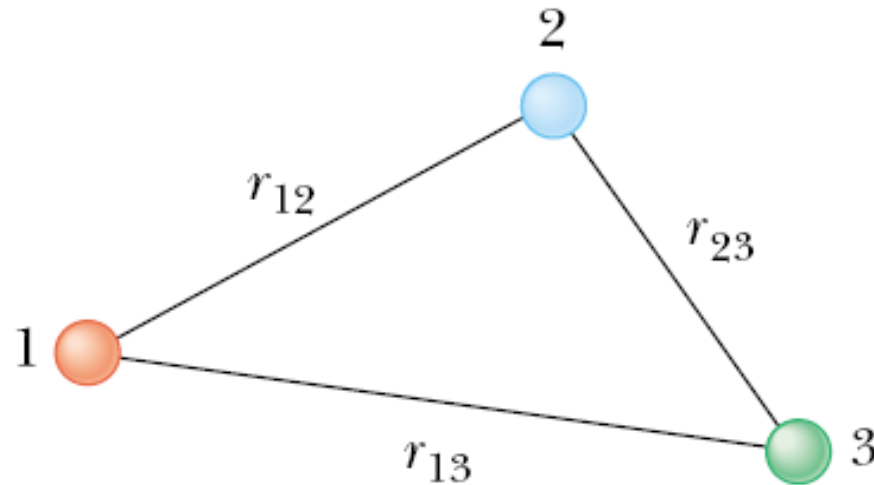
- ♦ Potencjał pola grawitacyjnego

$$\psi = \frac{U(r)}{m} = - G M \left(\frac{1}{r} \right)$$



Energia potencjalna układu ciał

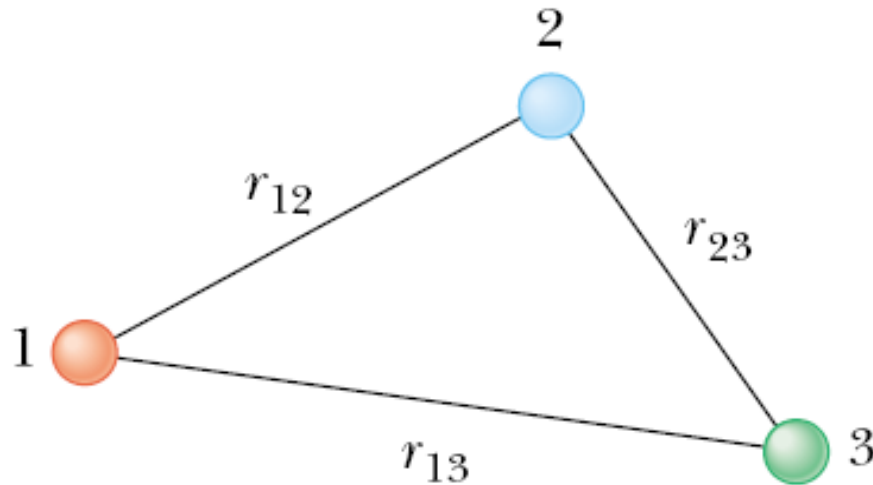
- ◆ Potocznie mówimy, że obiekt m ma energię potencjalną – mając na myśli oddziaływanie obiektu z Ziemią
- ◆ Powinniśmy raczej mówić o energii potencjalnej układu obiekt - Ziemia
 - Jest to OK, gdy $M \gg m$, bowiem widzimy, że niewielka zmiana energii potencjalnej powoduje bardziej zauważalny ruch mniejszej masy
- ◆ Jednak jeśli mówimy o układzie ciał o porównywalnych masach to musimy mówić o energii potencjalnej układu ciał



Energia potencjalna układu ciał

- ◆ Energię potencjalną możemy wyznaczyć w następujący sposób:

$$U(r) = - G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - G m_2 m_3 \left(\frac{1}{r_{23}} \right) - G m_1 m_3 \left(\frac{1}{r_{13}} \right)$$



II prędkość kosmiczna – prędkość ucieczki

- ◆ Ciało o masie m nabiera prędkości v

- ◆ Jego energia kinetyczna

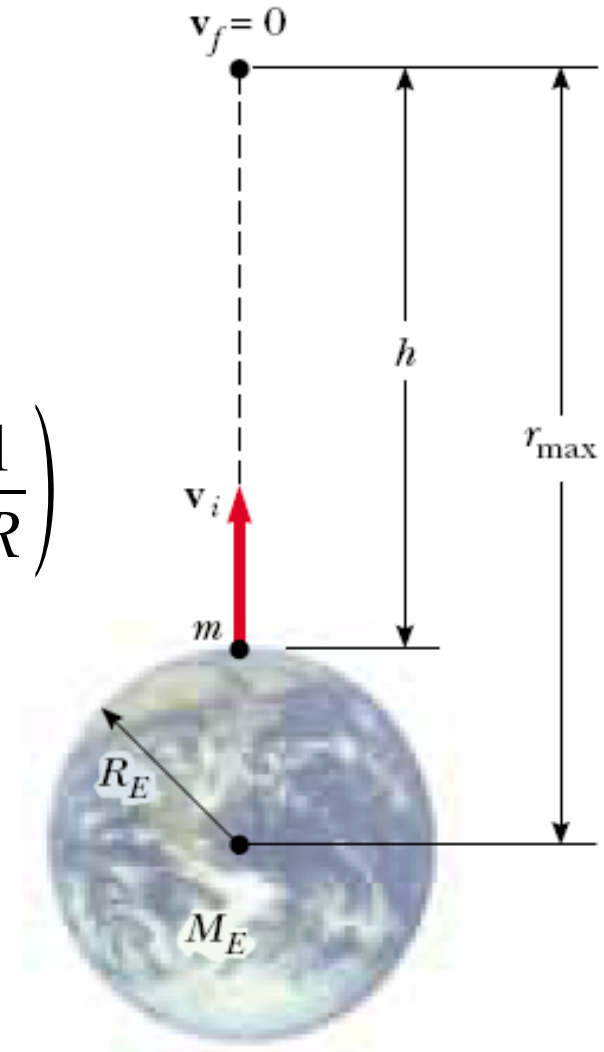
$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

- ◆ Jego energia potencjalna na powierzchni planety:

$$U(r) = -GMm\left(\frac{1}{R}\right)$$

- ◆ Na początku en. mechaniczna układu planeta + ciało:

$$\frac{mv^2}{2} + \left\{ -GMm\left(\frac{1}{R}\right) \right\}$$

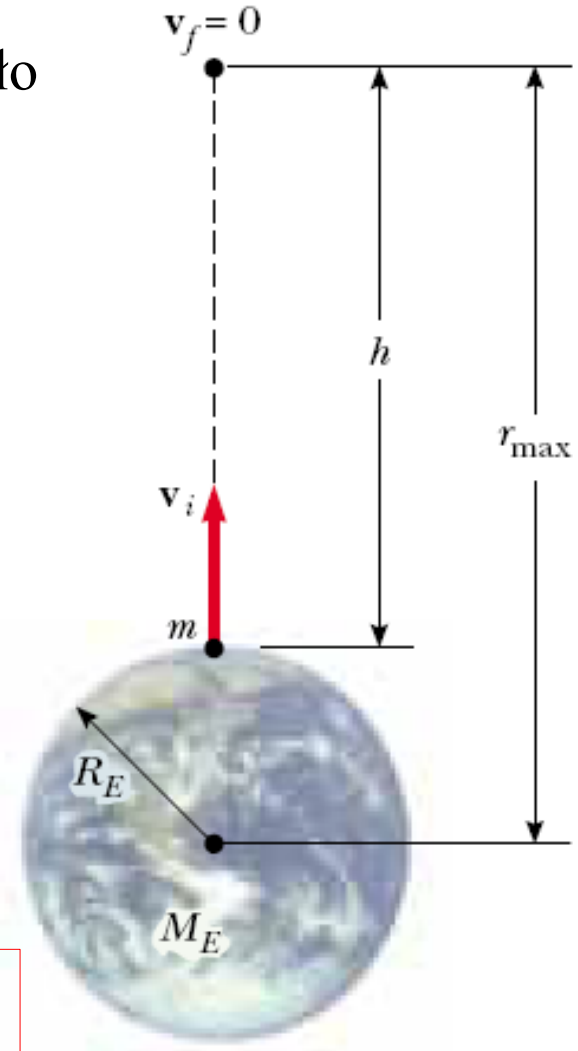


II prędkość kosmiczna – prędkość ucieczki

- ◆ Po ucieczce do nieskończoności ciało utraciło prędkość $v = 0$
- ◆ W nieskończoności ciało nie ma też energii potencjalnej $U = 0$
- ◆ Ale energia całkowita musi być zachowana więc:
$$\frac{mv^2}{2} + \left\{ -GMm \left(\frac{1}{R} \right) \right\} = 0$$
- ◆ Dlatego minimalna prędkość ucieczki wynosi:

$$\frac{mv^2}{2} = GMm \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



II prędkość kosmiczna – prędkość ucieczki

♦ Prędkości ucieczki dla kilku ciał niebieskich

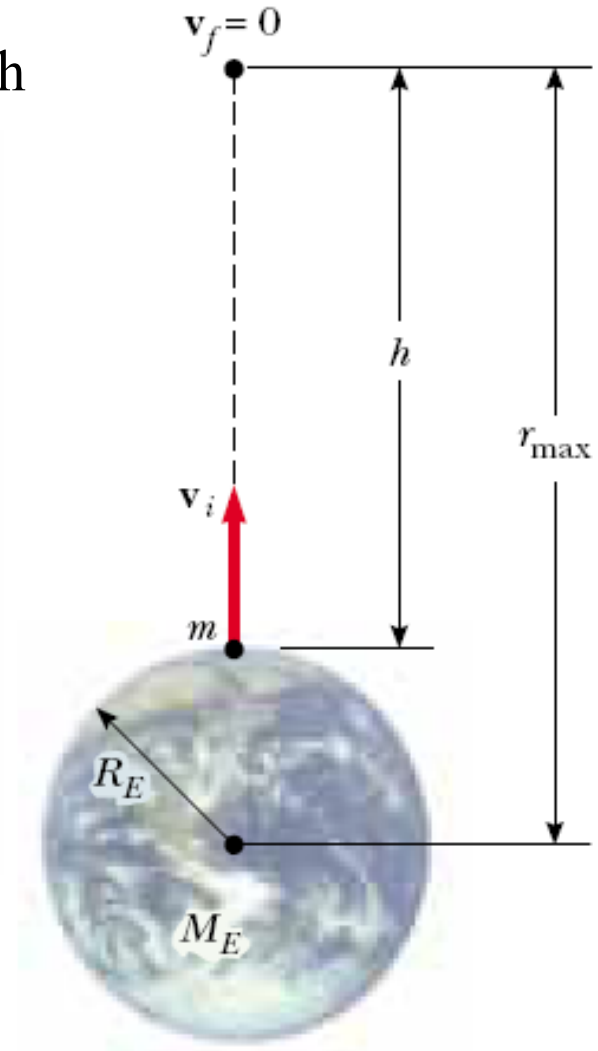
Tablica 14.2. Prędkość ucieczki z kilku ciał niebieskich

Ciało	Masa [kg]	Promień [m]	Prędkość ucieczki [km/s]
Ceres ^a	$1,17 \cdot 10^{21}$	$3,8 \cdot 10^5$	0,64
Księżyc Ziemi	$7,36 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	2,38
Ziemia	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	11,2
Jowisz	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,15 \cdot 10^7$	59,5
Słońce	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	618
Syriusz B ^b	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^7$	5200
Gwiazda neutronowa ^c	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$

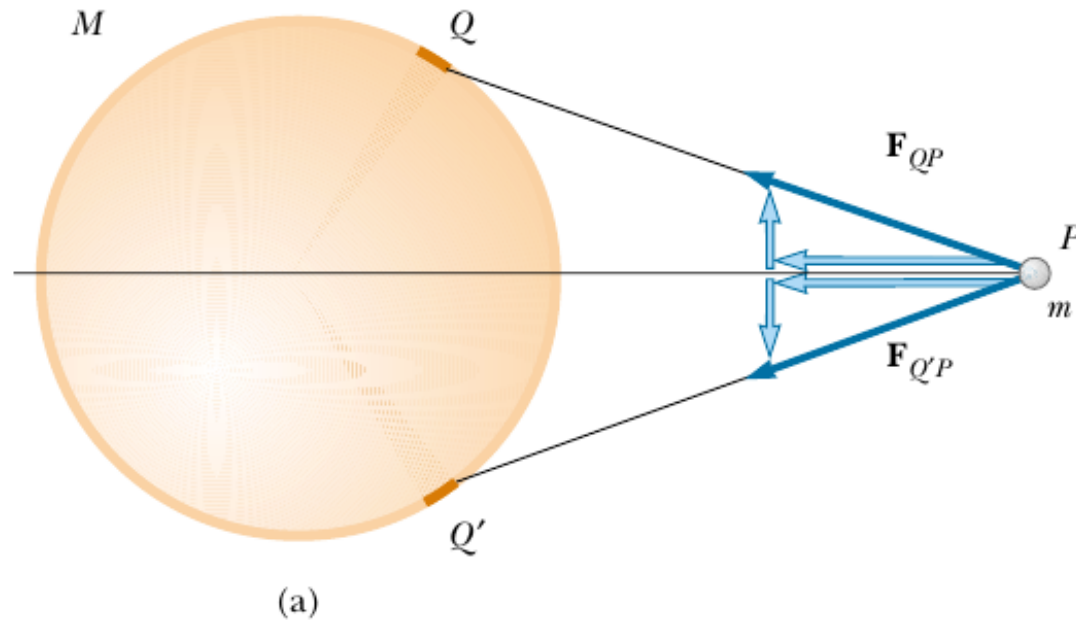
^aNajcięższa planetoida.

^bBiały karzeł (gwiazda w jednym z końcowych etapów ewolucji) tworzący układ z bardzo jasną gwiazdą — Syriuszem.

^cObiekt gwiazdowy powstały podczas wybuchu supernowej w wyniku zapadania grawitacyjnego jądra gwiazdy.

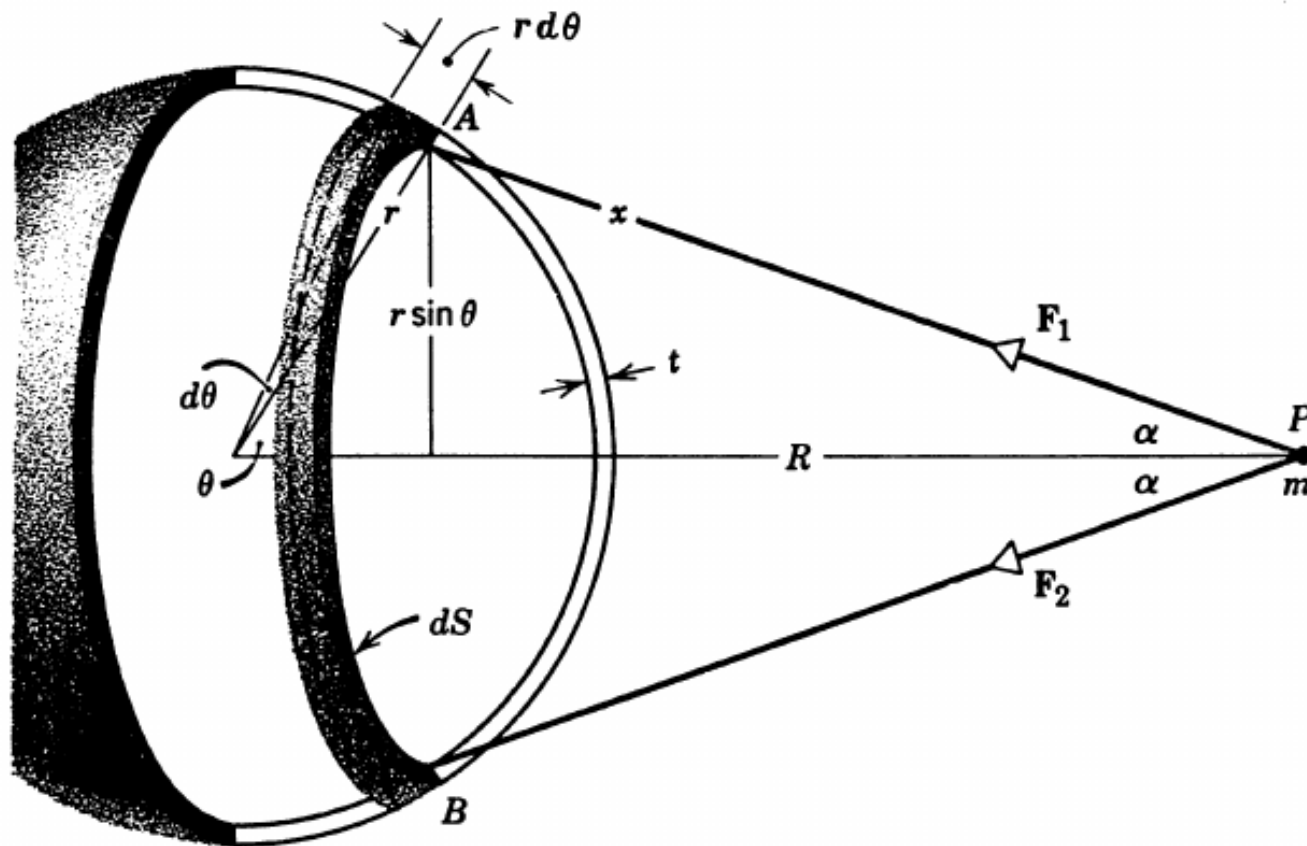


Działanie grawitacyjne masy rozmieszczonej kulisto- symetrycznie



- ◆ Powłoka kulista o jednostajnej gęstości przyciąga znajdujący się na zewnątrz punkt materialny tak, jakby cała masa była skoncentrowana w jej środku

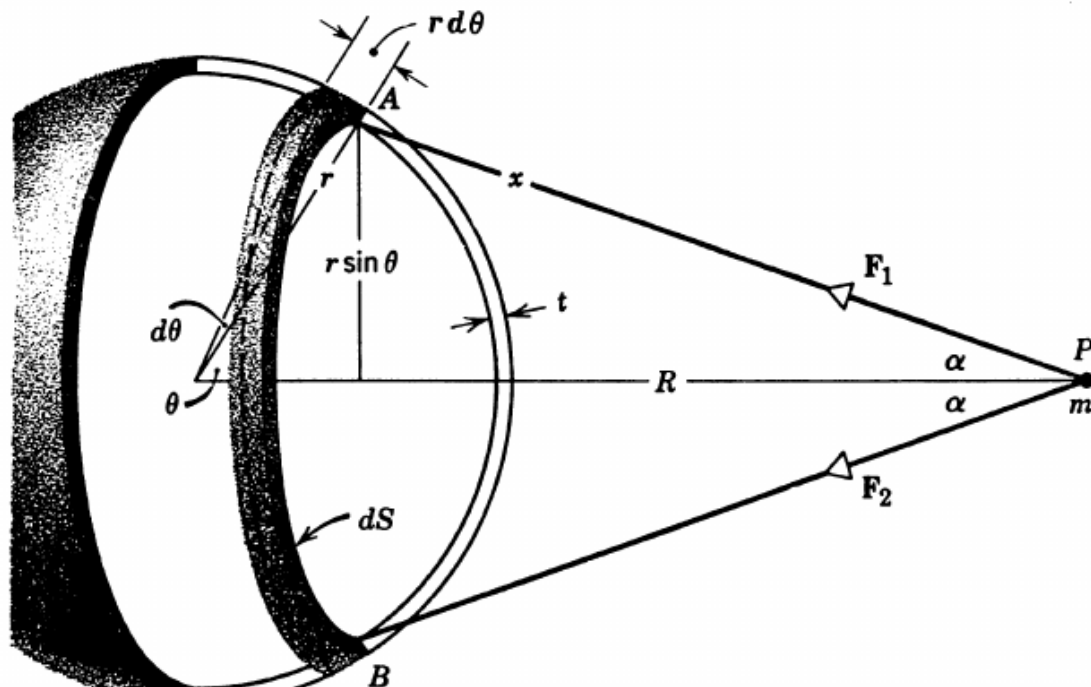
Działanie grawitacyjne masy rozmieszczonej kulisto - symetrycznie



Można udowodnić (przez odpowiednie całkowania), że

$$dF = \frac{\pi G t \rho m r}{R^2} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx.$$

Jest to wyrażenie na siłę, jaką kołowy pasek dS działa na punkt o masie m .



Musimy teraz wziąć pod uwagę wszystkie elementy masy i wykonać sumowanie po wszystkich paskach składających się na powłokę. Operacja ta jest całkowaniem po całej powłoce względem dx . Ale x zmienia się w przedziale od wartości minimalnej $R-r$ do maksymalnej $R+r$.

Ponieważ

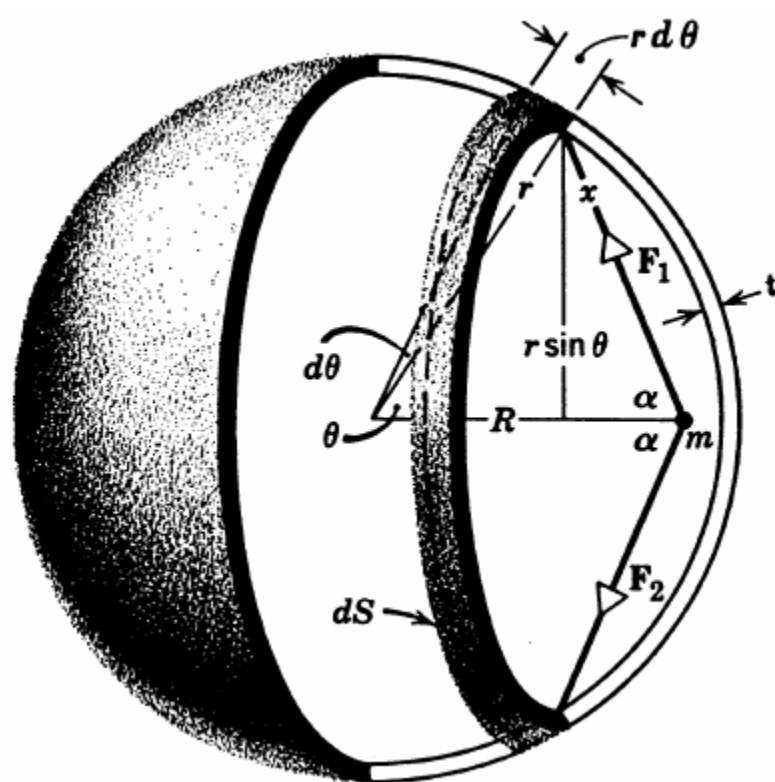
$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 4r,$$

więc dla siły wypadkowej otrzymujemy

$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = G \frac{(4\pi r^2 \rho t)m}{R^2} = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (16-9)$$

gdzie

$$M = (4\pi r^2 \rho t)$$



Rys. 16-7. Przyciąganie grawitacyjne punktu materialnego o masie m przez wycinek dS kulistej powłoki materii. Punkt materialny znajduje się tutaj wewnątrz powłoki

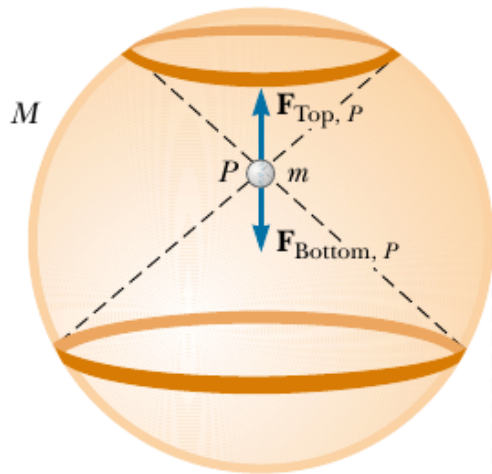
Interesujący i mający pewne znaczenie wynik otrzymuje się dla siły, jaką powłoka kulista działa na punkt materialny znajdujący się *wewnątrz* niej. Siła ta jest równa zero. Przy dowodzeniu tego faktu korzystamy z rys. 16-7, na którym m znajduje się wewnątrz powłoki. Granicami całkowania są teraz $r - R$ i $R + r$. Ale

$$\int_{r-R}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0,$$

czyli $F = 0$.

Działanie grawitacyjne masy rozmieszczonej kulisto- symetrycznie

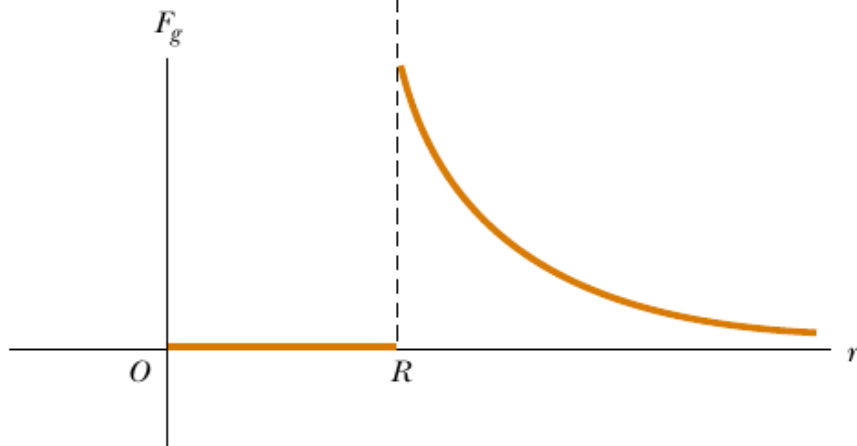
Okazuje się że siła pochodząca od „paska górnego” równoważy siłę pochodzącą od „paska dolnego”



(b)

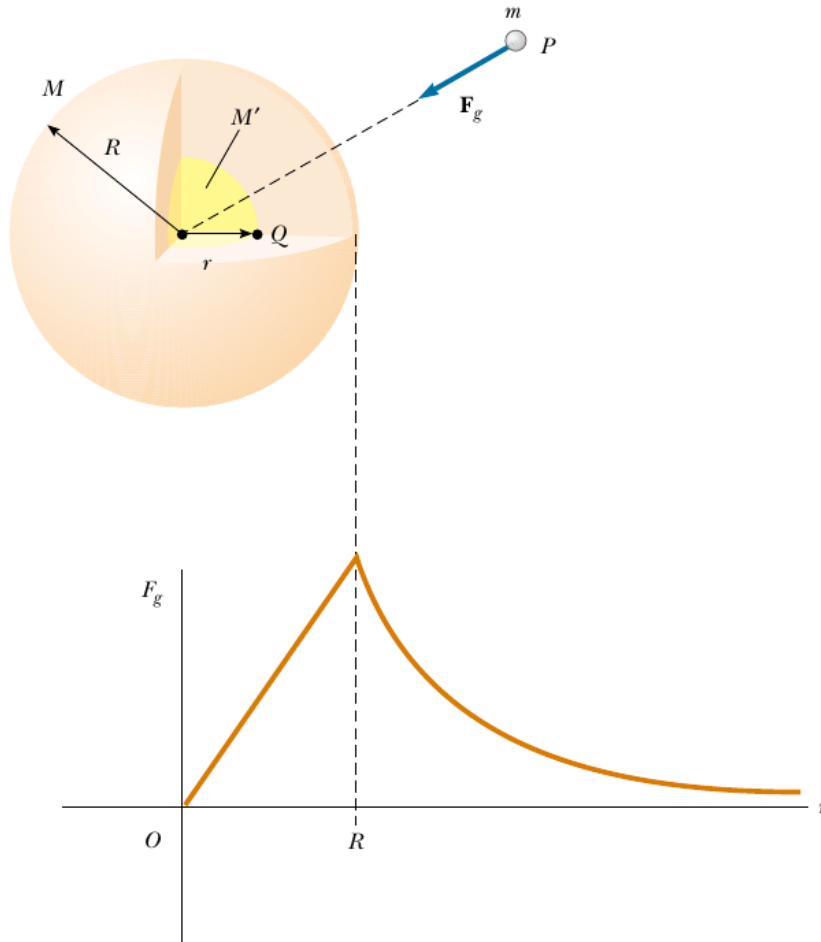
$$\vec{F}_g = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{dla } r > R$$

$$\vec{F}_g = 0 \quad \text{dla } r < R$$



(c)

Działanie grawitacyjne masy rozmieszczonej w kuli równomiernie



$$M' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

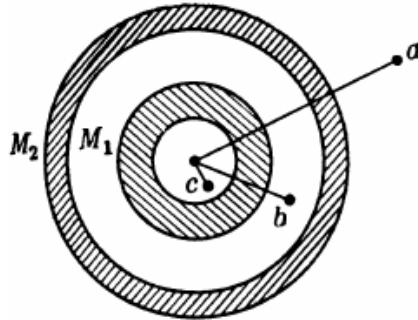
$$F_g = - \frac{G m M'}{r^2}$$

$$F_g \simeq - r \quad \text{dla } r \leq R$$

Figure 14.22 The gravitational force acting on a particle when it is outside a uniform solid sphere is $G M m / r^2$ and is directed toward the center of the sphere. The gravitational force acting on the particle when it is inside such a sphere is proportional to r and goes to zero at the center.

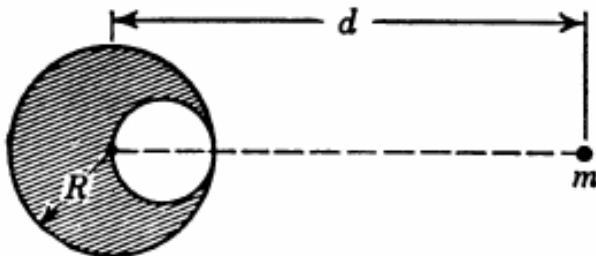
Zadanie:

11. Dwie współśrodkowe powłoki kuliste o jednorodnej gęstości i masach M_1 i M_2 są umieszczone tak, jak na rys. 16-17. Znaleźć siłę działającą na punkt o masie m , kiedy punkt ten jest umieszczony w odległości (a) $r = a$, (b) $r = b$ oraz (c) $r = c$. Odległość r jest mierzona od środka powłok.



Rys. 16-17. Zadanie 11

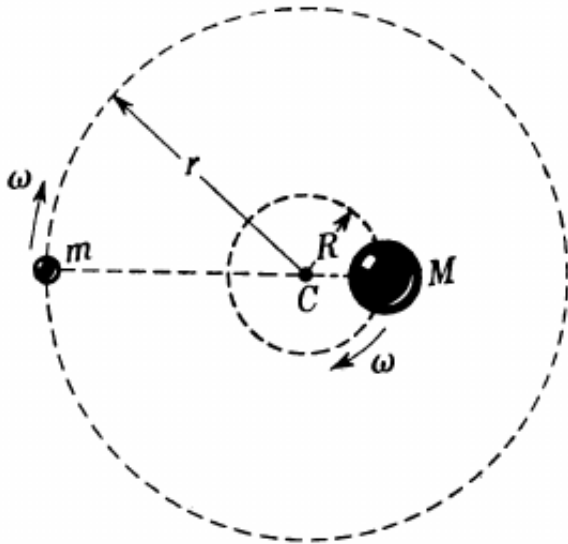
15. Zadanie to pochodzi z olimpiady fizycznej na Uniwersytecie Moskiewskim z 1946 roku (patrz rys. 16-18): W ołowianej kuli o promieniu R wydrążono kulistą wnękę tak, że powierzchnia wydrążenia styka się z zewnętrzną powierzchnią kuli oraz przechodzi przez jej środek. Masa kuli przed wydrążeniem wynosiła M . Jaką siłą, zgodnie z prawem powszechnego ciążenia, kula ołowiana będzie przyciągać małą kulkę o masie m , umieszczoną w odległości d od środka kuli na prostej łączącej środki kul i wydrążenia?



Rys. 16-18. Zadanie 15

$$\text{Odp.: } \frac{GmM}{d^2} \left[1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2} \right].$$

Ruch planet i satelitów



Rys. 16-9. Dwa ciała poruszające się po orbitach kołowych pod wpływem wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Oba ciała mają tę samą prędkość kątową ω

Siły dośrodkowe planet są sobie równe:

$$m \omega^2 r = M \omega^2 R$$
$$mr = M R$$

Równoważność siły grawitacji i dośrodkowej:

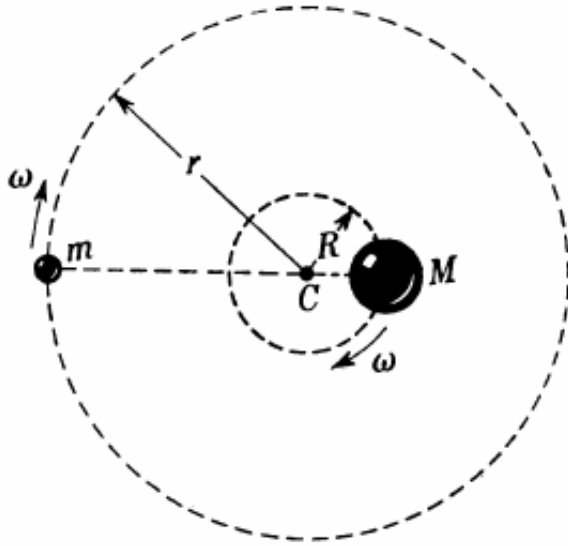
$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = m \omega^2 r$$

Gdy $M \gg m$ to R można pominąć w porównaniu do r

$$GM \approx \omega^2 r^3$$
$$GM \approx \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

Jest to podstawowe równanie ruchu planetarnego – pozostaje słuszne dla orbit eliptycznych.

III Prawo Keplera



$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Równanie może być wykorzystane do
określenia masy Słońca:

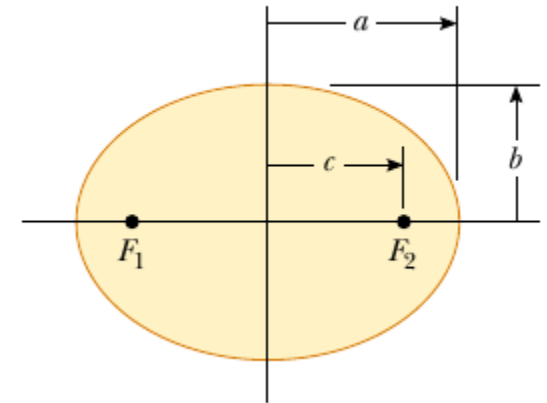
$$T = 365 \text{ dni} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

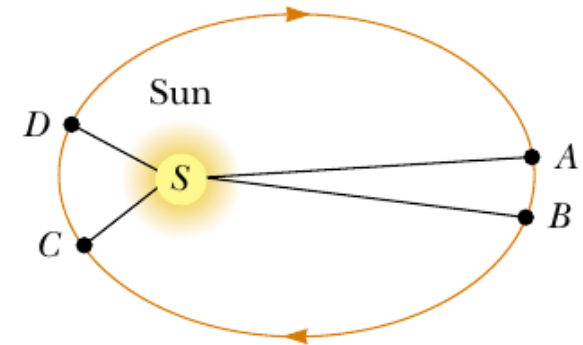
$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \approx 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 300\,000 \cdot \text{masy Ziemi}$$

Prawa Keplera

- 1. Wszystkie planety poruszają się po orbitach eliptycznych, w których w jednym z ognisk znajduje się Słońce (prawo orbit).



- 2. Odcinek łączący jakąkolwiek planetę ze Słońcem zakreśla w równych odstępach czasu równe pola (prawo okresów).



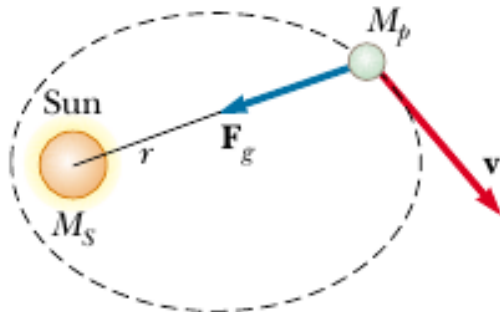
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(r\omega\Delta t)r}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

- 3. Kwadrat okresu obiegu dowolnej planety jest proporcjonalny do sześciangu średniej odległości planety od Słońca (prawo okresów).

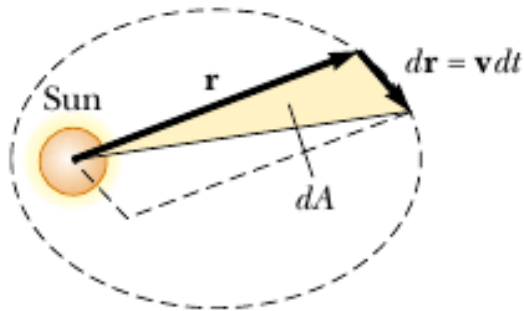
$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Prawa Keplera stanowiły silne poparcie teorii Kopernika.

Ruch planet po eliptycznej orbicie

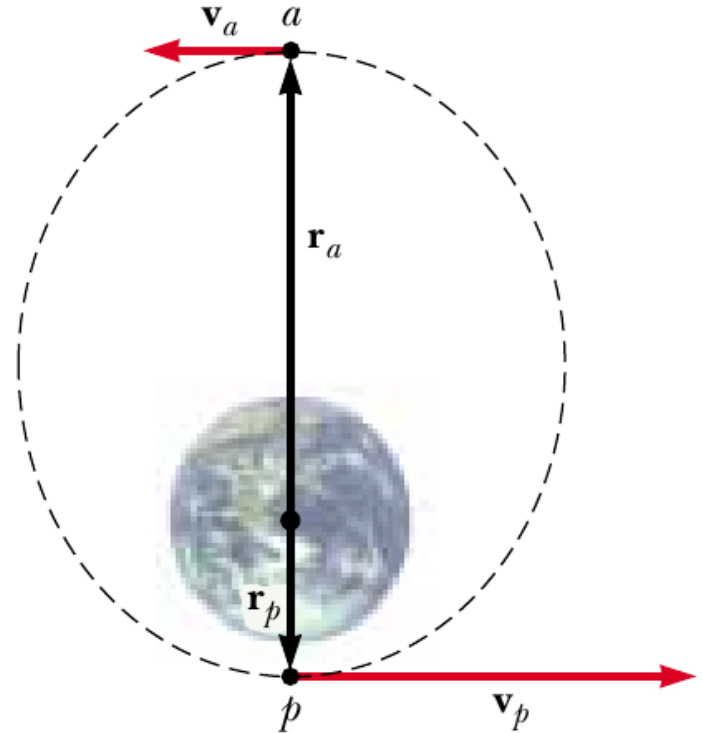


(a)



(b)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(r\omega\Delta t)r}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

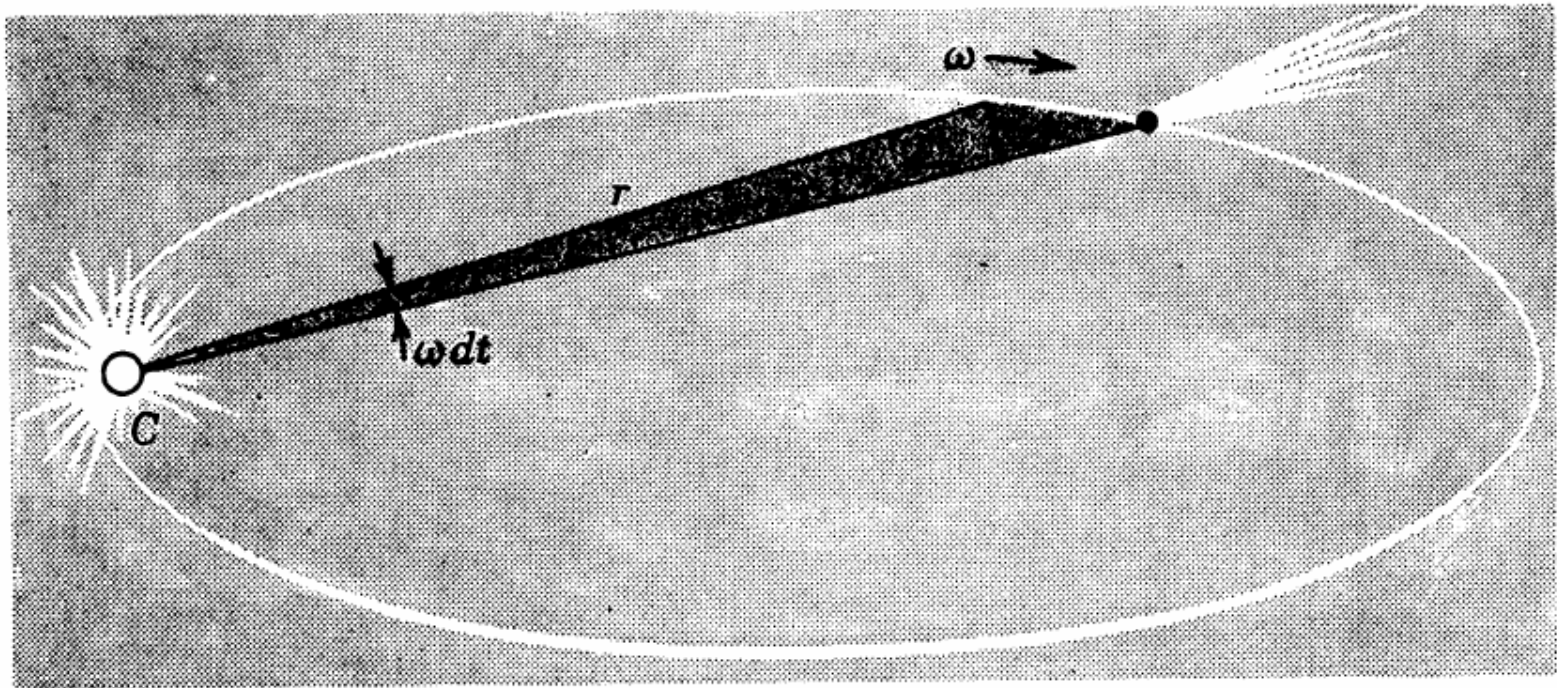


$$mv_a r_a = mv_p r_p$$

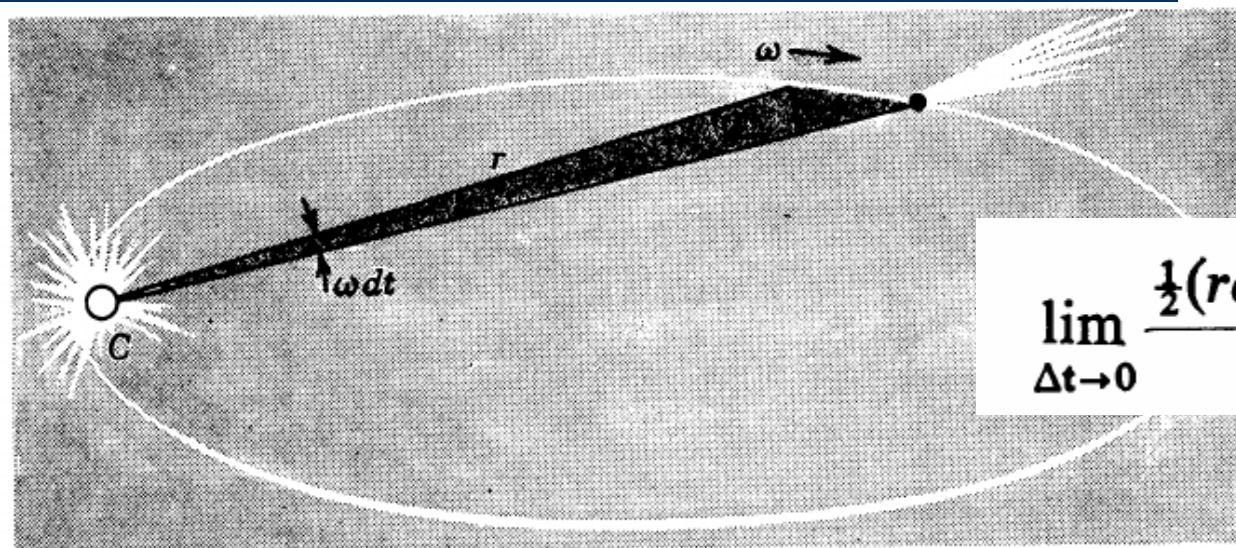
$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p$$

Prawa Keplera

Drugie prawo Keplera ruchu planetarnego (patrz str. 388) musi być, oczywiście, spełnione dla orbit kołowych. Dla takich orbit zarówno ω , jak i r są stałe i linia łącząca planetę i Słońce zakreśla w równych czasach równe pola. Jednakże dla rzeczywistych orbit eliptycznych, a także dla dowolnych orbit zarówno r , jak i ω na ogół zmieniają się. Rozważmy ten przypadek.



Rys. 16-10. Kometa* poruszająca się po torze eliptycznym ze Słońcem C znajdującym się w ognisku elipsy. W czasie dt kometa (lub planeta) zakreśla kąt $d\theta = \omega dt$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(r\omega\Delta t)r}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

Rys. 16-10. Kometa* poruszająca się po torze eliptycznym ze Słońcem C znajdującym się w ognisku elipsy. W czasie dt kometa (lub planeta) zakreśla kąt $d\theta = \omega dt$

Ale $m\omega r^2$ jest po prostu momentem pędu cząstki obracającej się dookoła C . Tak więc drugie prawo Keplera, wymagające stałości prędkości polowej $\frac{1}{2}\omega r^2$, jest całkowicie równoważne stwierdzeniu, że *moment pędu jakiejkolwiek planety obracającej się dookoła Słońca jest wielkością stałą*. Moment pędu ciała obracającego się dookoła C nie może być zmieniony za pomocą siły zwróconej w kierunku C . Drugie prawo Keplera pozostałoby więc w mocy dla dowolnej *siły centralnej*, czyli siły zwróconej w kierunku Słońca. Dokładna postać tej siły — jej zależność od odległości lub innych własności ciał — nie może być za pomocą tego prawa wykryta.