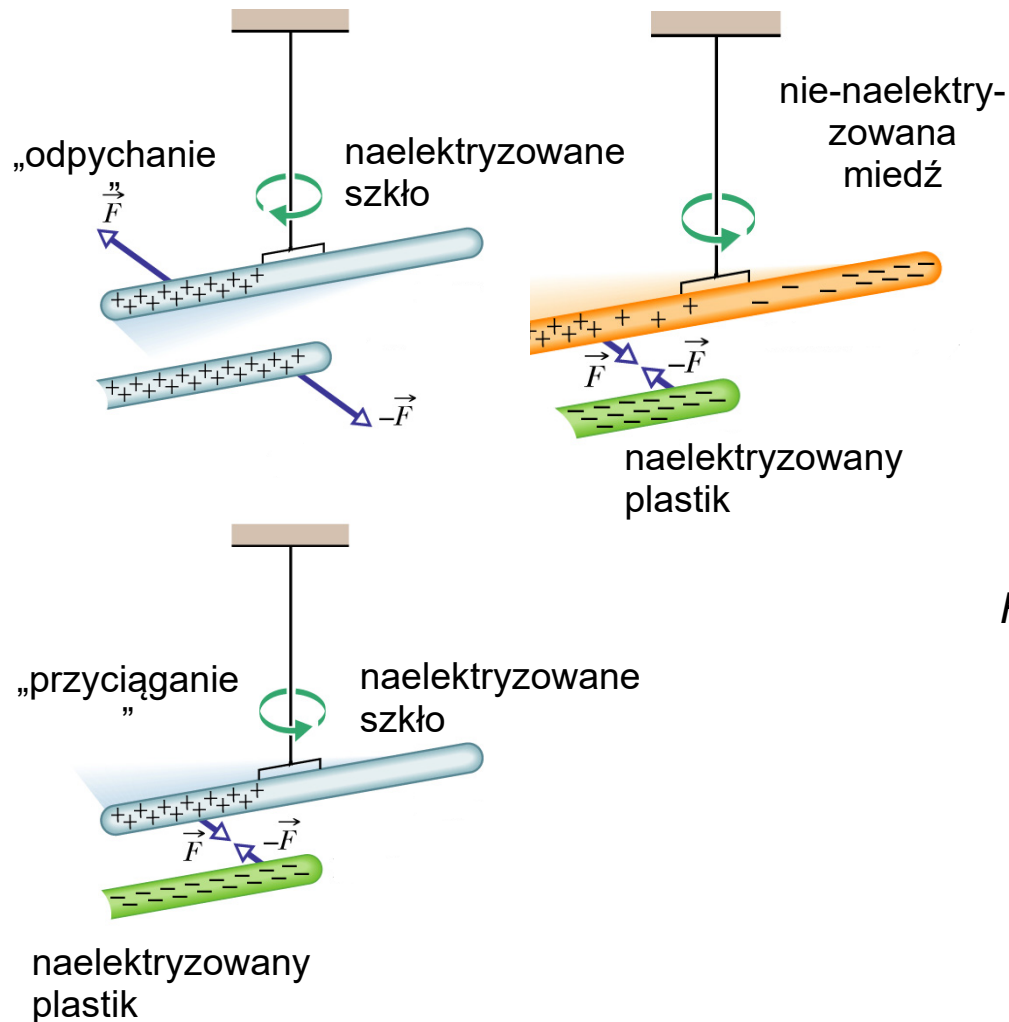


Elektrostatyka

- Prawo Coulomba
- Natężenie pola elektrycznego
- Energia potencjalna pola elektrycznego

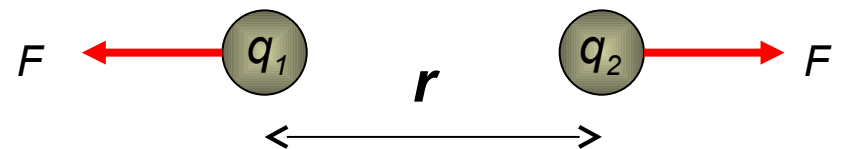
Prawo Coulomba



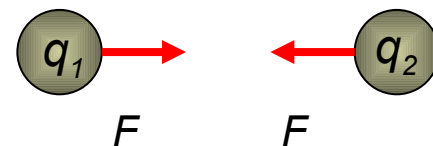
$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N m}^2)$$

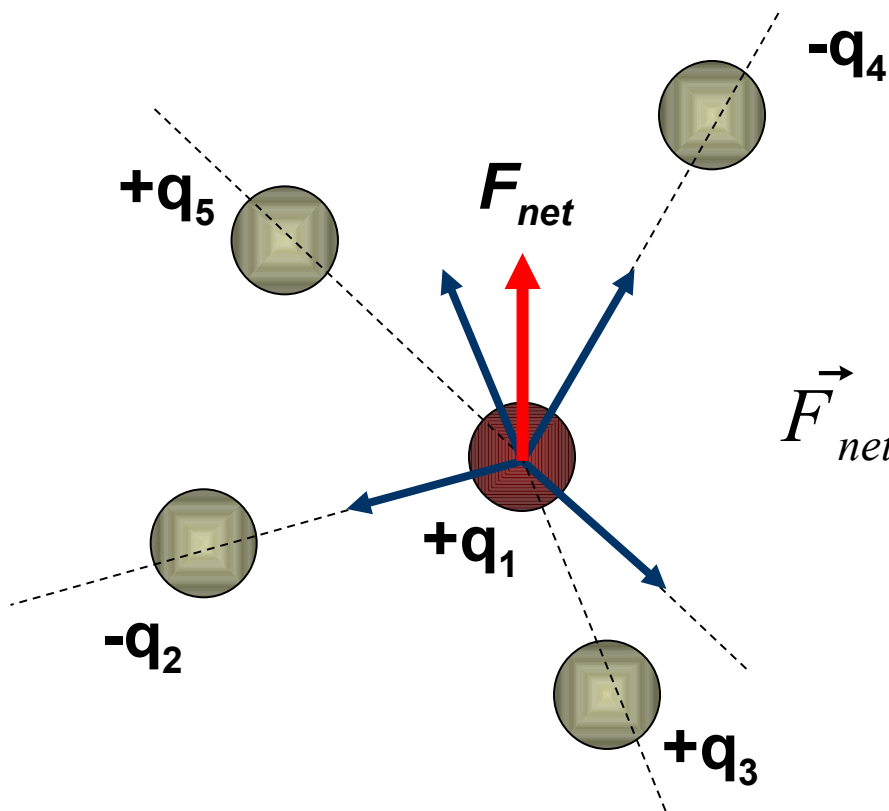
$(q_1, q_2 +)$ lub $(q_1, q_2 -)$



$(q_1 + i q_2 -)$ lub $(q_1 - i q_2 +)$

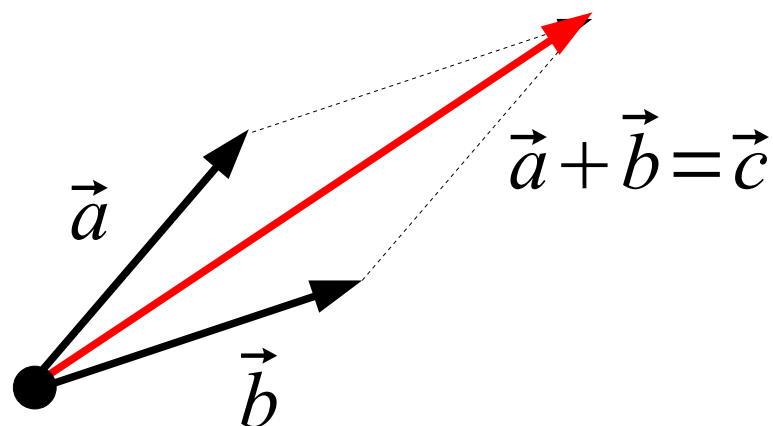


Superpozycja sił pochodzących od kilku ładunków



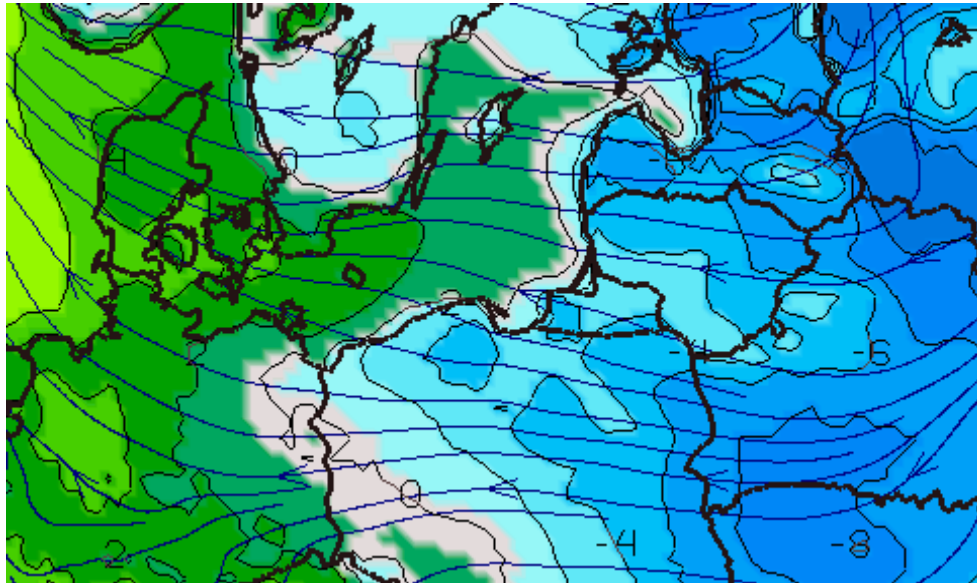
wektorowe sumowanie sił

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{1i}$$



Co to jest “pole”

- Ładunek może wywierać siłę na inny ładunek. Mówimy że wokół ładunku rozpościera się “pole elektryczne”
- Co to jest “pole” w języku fizyki ?



rozkład temperatury,
rozkład opadów,
rozkład wiatru

- Pole - matematycznie : to przestrzenny rozkład liczb (pole skalarne), lub przestrzenny rozkład wektora, (pole wektorowe)
- Pole - fizycznie: to przestrzenny rozkład wielkości fizycznej

Pole – charakterystyczne cechy

Pole może mieć swoją geometrię. W danym punkcie przestrzeni pole opisane jest przez pewną funkcję:

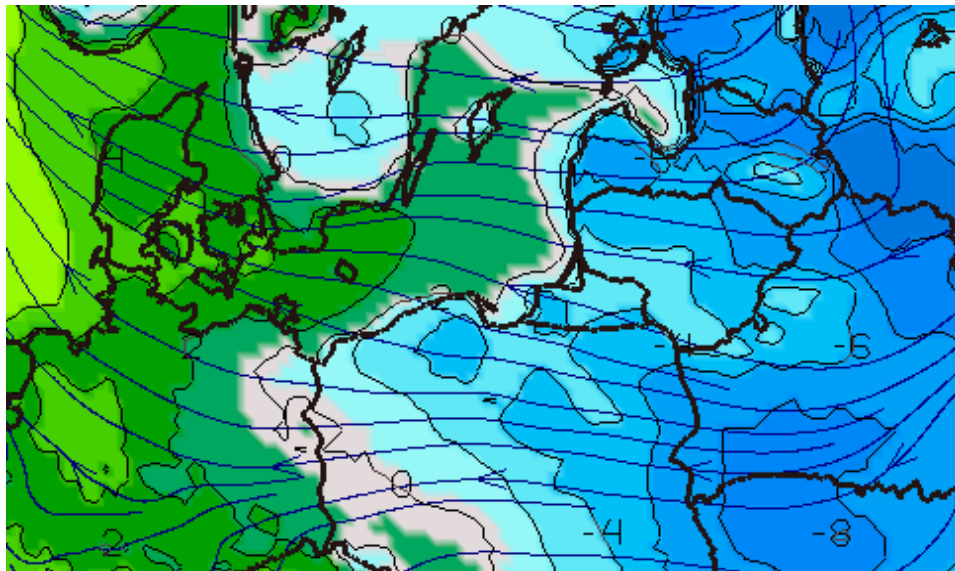
$$f = f(x, y, z)$$

Pole może być płaskie lub przestrzenne. Stałe wartości pola są wyznaczone przez izopowierzchnie lub izolinie.

Pole wektorowe scharakteryzowane jest przez wektor pola

$$\vec{v}(\vec{r})$$

Liniami pola wektorowego nazywamy linie wyznaczające kierunek pola. Wektor pola jest w każdym punkcie styczny do linii pola.



Temperatura (pole skalarne)

Kierunek wiatru (pole wektorowe)

Natężenie pola elektrycznego

Schemat oddziaływania:

ładunek $\leftrightarrow$ pole elektryczne $\leftrightarrow$ ładunek

Pole elektryczne wytwarzane przez ładunek Q jest polem wektorowym.

Jego wektor to **natężenie pola el.**

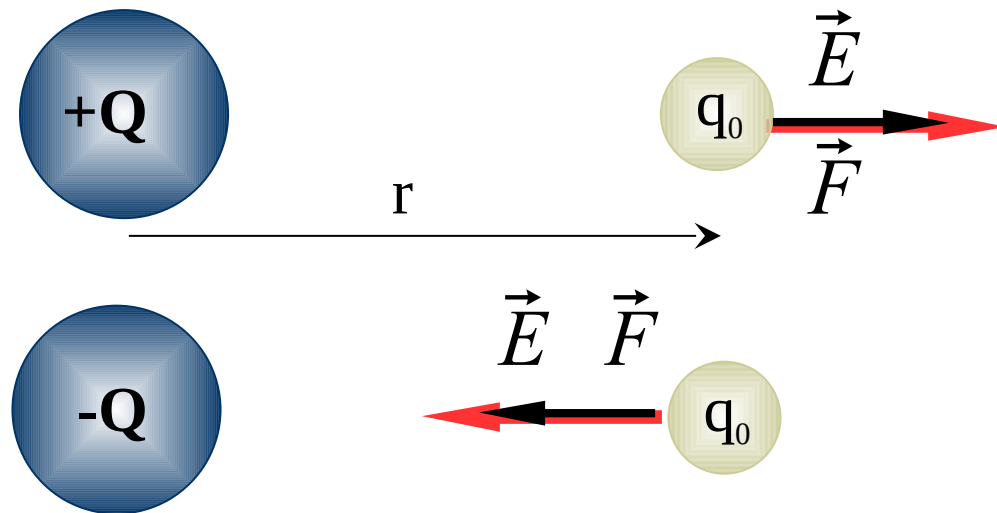
jest określony jako:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Wartość E dla ładunku punktowego Q

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

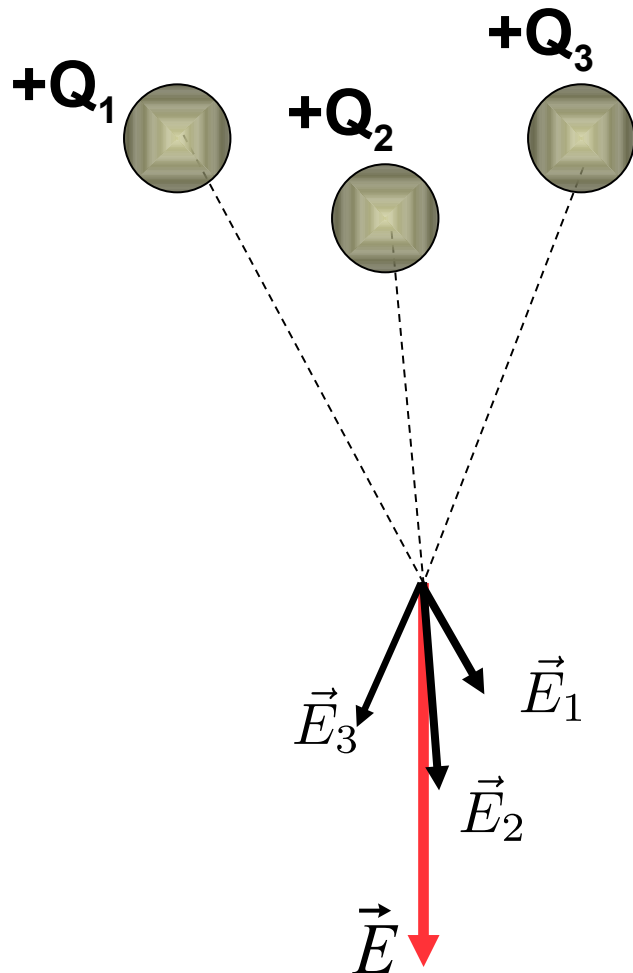
$$\vec{F} = \vec{E} q_0$$



gdzie q_0 jest pewnym dodatnim ładunkiem próbnym.

Natężenie $\vec{E}$ zależy od ładunku, który wytwarza pole, nie od ład. próbnego!

Superpozycja pól od wielu ładunków

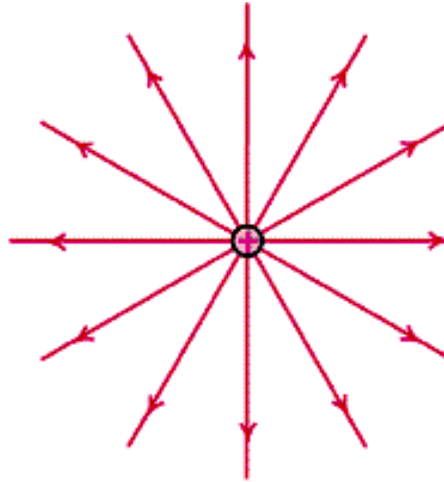


Jeśli pole wytwarzane jest przez kilka ładunków $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ to natężenie pola w dowolnym punkcie przestrzeni jest równe sumie wektorowej natężeń pól wytworzonych przez każdy ładunek osobno w tym punkcie.

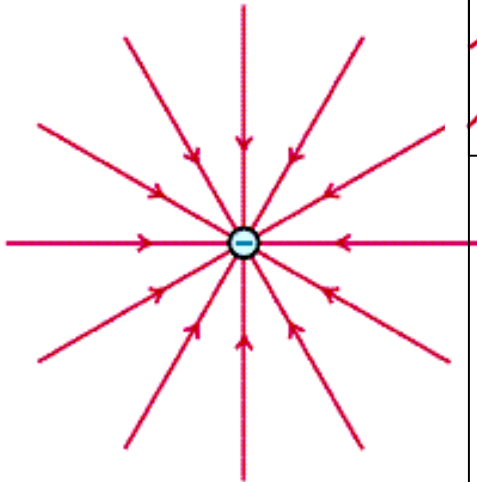
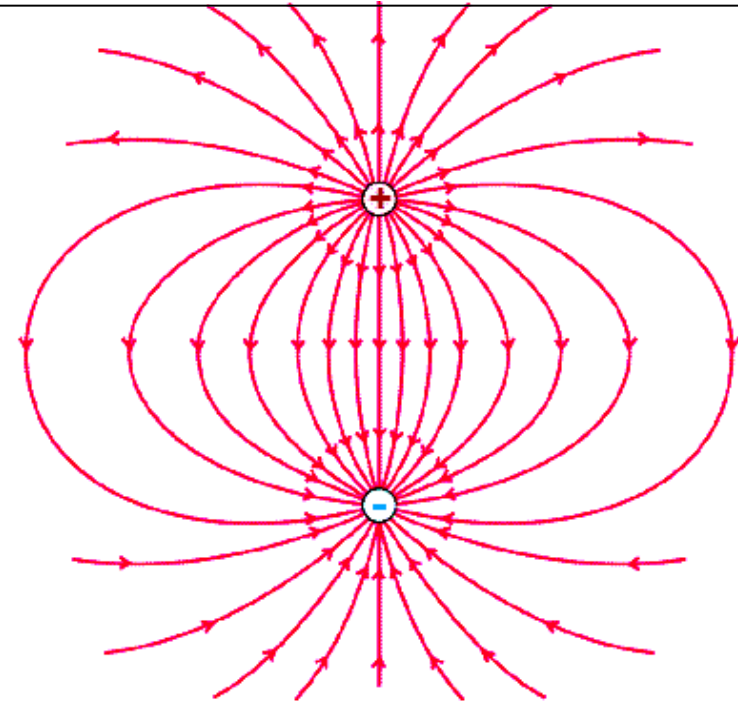
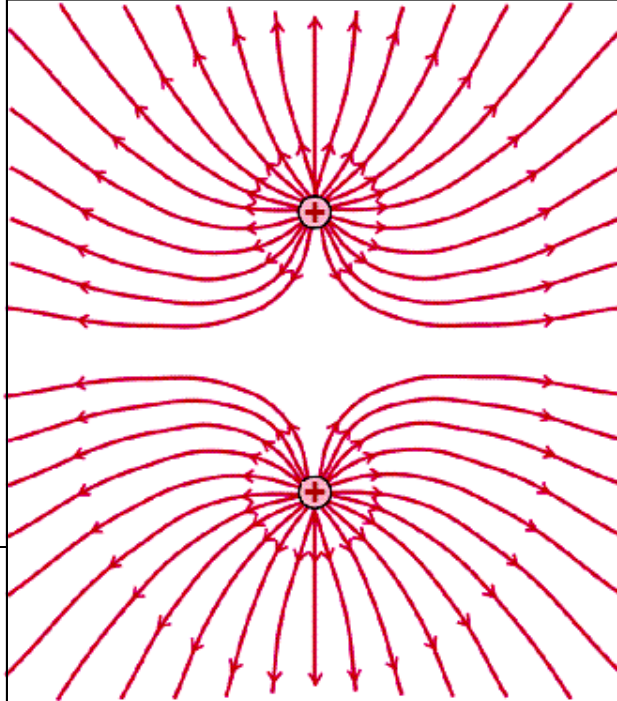
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

Uwaga! Tutaj sumujemy wektory!

Pole elektryczne – jak wygląda?



(a)



(b)

To co charakteryzuje pole elektryczne to **wektor natężenia pola**

Liniami sił pola elektrycznego nazywamy linie wyznaczające kierunek pola.

Wektor natężenia pola jest w każdym punkcie styczny do linii pola.

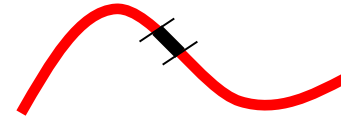
Rozkłady ładunków

Aby wyznaczać natężenie pola elektrycznego często nie operujemy „osobnymi” ładunkami lecz raczej rozkładem ładunku.

Ze względu na sposób rozłożenia ładunku wprowadzamy:

liniową gęstość ładunku

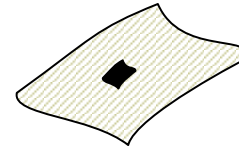
$$\tau = \frac{dq}{dx}$$



$$dq = \tau dx$$

powierzchniową gęstość ładunku

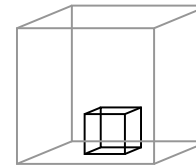
$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$



$$dq = \sigma ds$$

objętościową gęstość ładunku

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



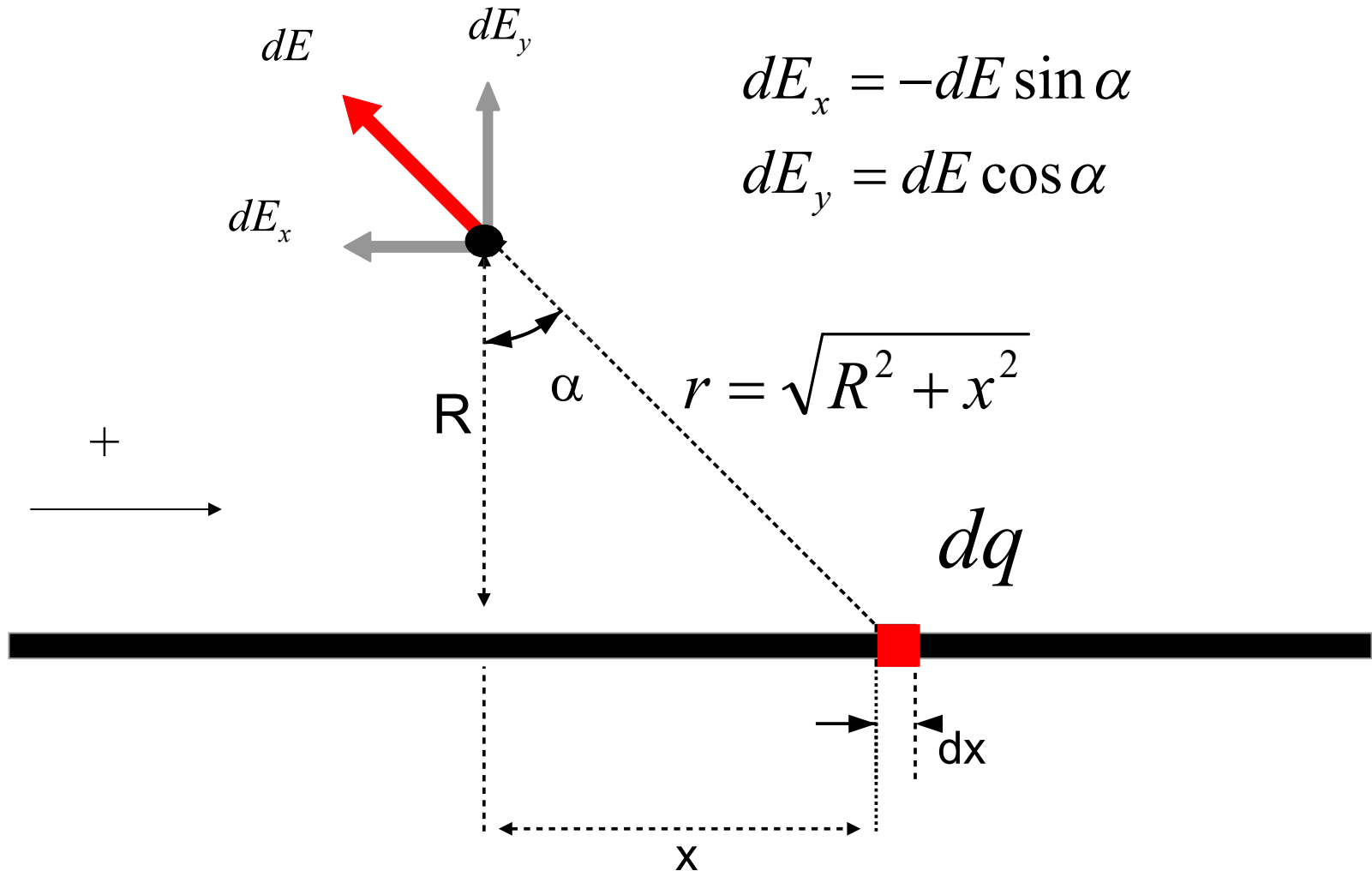
$$dq = \rho dV$$

Natężenie pola pochodzące od pewnego rozkładu ładunku, gdzie **$d\mathbf{E}$** oznacza natężenie pola pochodzącego od ładunku **dq** w jednostkowej długości, powierzchni lub objętości

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości R od naładowanego przewodnika z prądem



Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości R od naładowanego przewodnika z prądem

Gęstość liniowa ładunku jest jednorodna więc

$$dq = \tau dx$$

Wartość natężenia pola od dq :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)}$$

Staramy się zamienić zmienną całkowania dx na $d\alpha$

$$x = R \operatorname{tg} \alpha \quad \text{więc:} \quad dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\text{zatem} \quad dE = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha$$

więc:

$$dE_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha d\alpha$$

$$dE_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} 2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości h od naładowanej tarczy o promieniu R

Gęstość powierzchniowa ładunku jest jednorodna więc

$$dq = \sigma \cdot ds$$

Z rysunku :

$$ds = dx \cdot x d\varphi$$

$$r^2 = h^2 + x^2$$

Natężenie pola od dq :

$$dE_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot x \cdot dx \cdot d\varphi}{r^2}$$

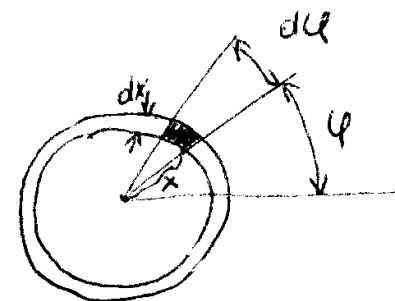
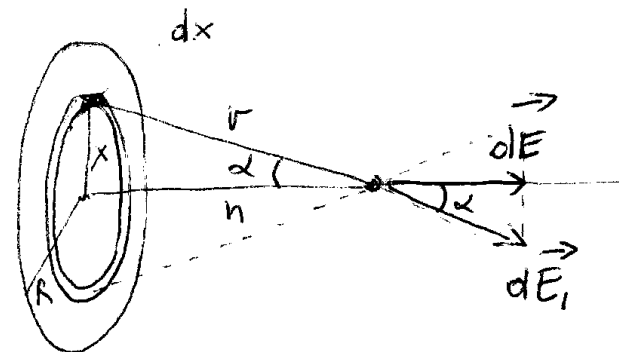
Natężenie pola wzdłuż osi :

$$dE = dE_I \cdot \cos \alpha$$

gdzie

$$\cos \alpha = \frac{h}{r}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot x \cdot dx \cdot d\varphi \cdot h}{r^3}$$



Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości h od naładowanej tarczy o promieniu R

Sumujemy wkład od wszystkich fragmentów tarczy, całkując względem x (promień tarczy) oraz po obwodzie obręczy φ

$$E = \int dE = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \cdot h \cdot x \cdot dx \cdot d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\sigma \cdot h \cdot x \cdot dx}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + x^2)^{3/2}}$$

całkowanie po
obwodzie „obręczy”

całkowanie po
promieniu tarczy

$$E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{x \cdot dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Żeby obliczyć tę całkę podstawiamy

$$r^2 = h^2 + x^2$$

$$2r \cdot dr = 2x \cdot dx$$

$$x \cdot dx = r \cdot dr$$

w granicach

$$x = 0 \mapsto r = h$$

$$x = R \mapsto r = \sqrt{R^2 + h^2}$$

Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości h od naładowanej tarczy o promieniu R

$$E = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \int_h^{\sqrt{R^2+h^2}} \frac{r \cdot dr}{r^3} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \int_h^{\sqrt{R^2+h^2}} \frac{dr}{r^2}$$

$$E = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}} \right)$$

$$R \rightarrow \infty$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Praca w polu elektrycznym

praca jaką wykonuje siła zewnętrzna aby przesunąć ładunek próbny.

Siła zewnętrzna, która działa przeciwko sile Coulomba

$$W = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{l}$$

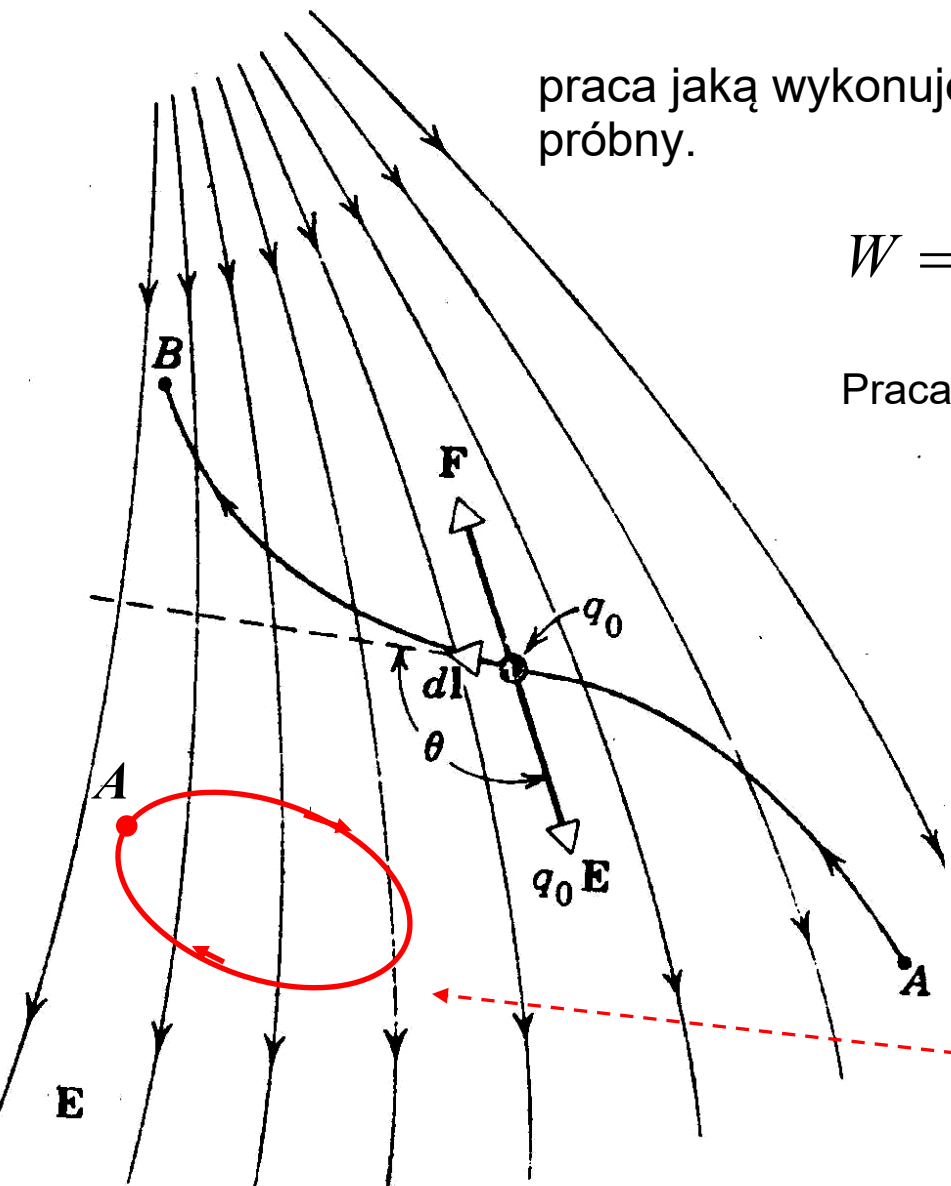
Praca pola el. wynosi $W_{el.} = -W$

Okazuje się, że:

- Praca wykonana przy przemieszczeniu ładunku próbnego nie zależy od toru a jedynie od początkowego i końcowego położenia
- Praca po torze zamkniętym = 0

Mówimy, że
pole elektryczne jest polem zachowawczym, potencjalnym

$$W = \oint_{\text{kontur}} \vec{F} \circ d\vec{l} = -q_0 \oint_{\text{kontur}} \vec{E} \circ d\vec{l} = 0$$



Energia potencjalna pola elektrycznego

Dla pola zachowawczego (podobnie jak w przypadku pola grawitacyjnego) można wprowadzić pojęcie **energii potencjalnej**

$$U(R) = \int_R^{\infty} \vec{F} \circ \vec{dr} = -q \int_R^{\infty} \vec{E} \circ \vec{dr}$$

- jest to energia naładowanego obiektu w polu elektrycznym (precyzyjniej – energia układu : obiekt i pole elektryczne)

Praca jaką musi wykonać pole przy przenoszeniu ładunku z nieskończoności do danego punktu pola R

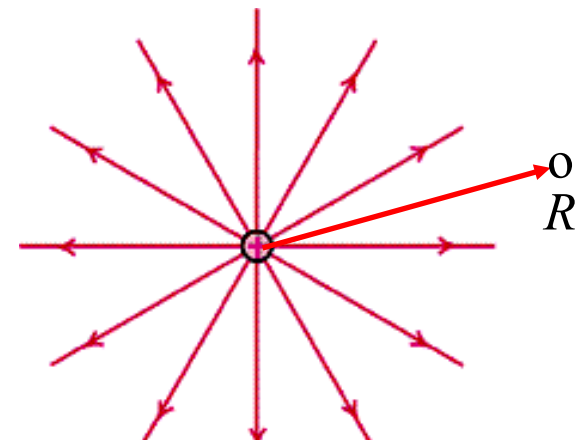
albo

Praca jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, przy przenoszeniu ładunku od R do nieskończoności

Np. dla ładunku punkowego Q wytwarzającego pole el. en. pot. ładunku q wynosi:

$$U(R) = -q \int_R^{\infty} \vec{E} \circ \vec{dr} = -q \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

en. jest dodatnia gdy ładunki są jednoimienne
en. jest ujemna gdy ładunki są różnoimienne



Siła jako gradient energii potencjalnej

Praca siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku z R_1 do R_2 jest równa różnicy energii potencjalnej tego ładunku między R_1 i R_2

Siła zewnętrzna, która działa przeciwko sile Coulomba

$$W(R_1 \rightarrow R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(R_2) - U(R_1)$$

Praca sił elektrycznych (ma przeciwny znak) $\longrightarrow$ $W_{el}(R_1 \rightarrow R_2) = -[U(R_2) - U(R_1)]$

Dlatego można zapisać, że siła el. $Fdr = -dU$, $F = -\frac{dU}{dr}$

W ogólności trzeba zapisać $\vec{F} = -\text{grad}(U) = -\vec{\nabla} U$

czyli $\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}\right)$

gdzie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ oznaczają jednostkowe wektory wzdłuż osi x, y, z

Potencjał pola elektrycznego

Energia potencjalna zależy od q (ładunek próbny) i Q (ładunek który wytwarza pole), ale wielkość definiowana jako:

$$\varphi(r) = \frac{U(r)}{q} \quad \text{jednostki [1 Volt = 1 V = 1 J / C = 1 N·m / C]}$$

zwana **potencjałem pola elektrycznego** zależy tylko od ładunku wytwarzającego pole Q .

Potencjał pola elektrycznego jest wielkością skalarną!

Zgodnie z zasadą superpozycji pól elektrycznych w przypadku nakładania się pól elektrycznych (pochodzących od różnych ładunków Q_i) ich potencjały sumują się algebraicznie

$$\varphi(R) = \sum_i \varphi_i(R)$$

Uwaga! Tutaj sumujemy wielkości skalarne!

Natężenie pola jako gradient potencjału

Trzeba zauważyć że **różnica potencjałów** pomiędzy dwoma punktami wynosi

$$\Delta\varphi = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = \frac{U(R_2) - U(R_1)}{q}$$

Stąd **praca przenoszenia ładunku** próbnego między tymi punktami

$$W(R_1 \rightarrow R_2) = q [\varphi(R_2) - \varphi(R_1)]$$

Dlatego można zapisać, że

$$\Delta\varphi = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \circ \vec{dr}$$

W ogólności trzeba zapisać

$$\vec{E} = - \text{grad}(\varphi) = - \vec{\nabla} \varphi$$

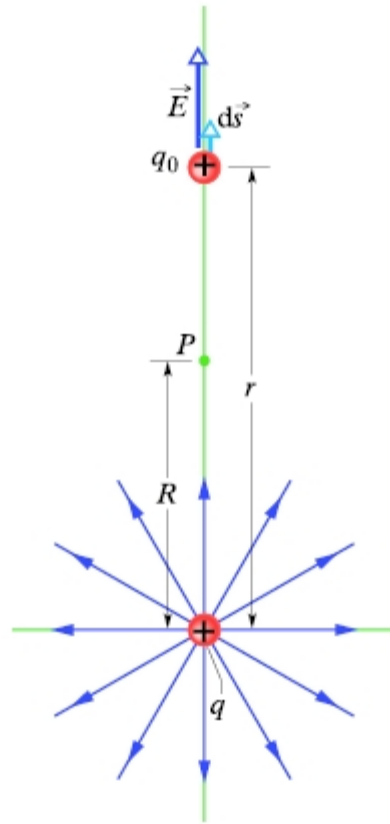
czyli

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right)$$

Wniosek:
natężenie pola E
wskazuje kierunek
w którym potencjał
najszybciej maleje

To jest recepta jak policzyć E znając potencjał

Potencjał ładunku punkowego



Rys. 25.7. Dodatni ładunek punktowy q wytwarza pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$ i potencjale elektrycznym V w punkcie P . Potencjał obliczamy, przesuując ładunek próbny q_0 z punktu P do nieskończoności. Ładunek próbny jest przedstawiony w odległości r od ładunku punkowego; zaznaczono przemieszczenie $d\vec{s}$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

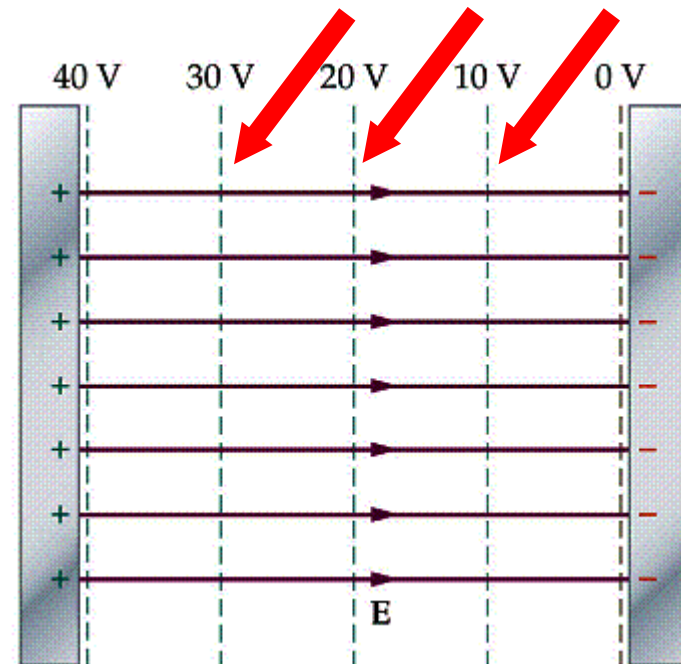
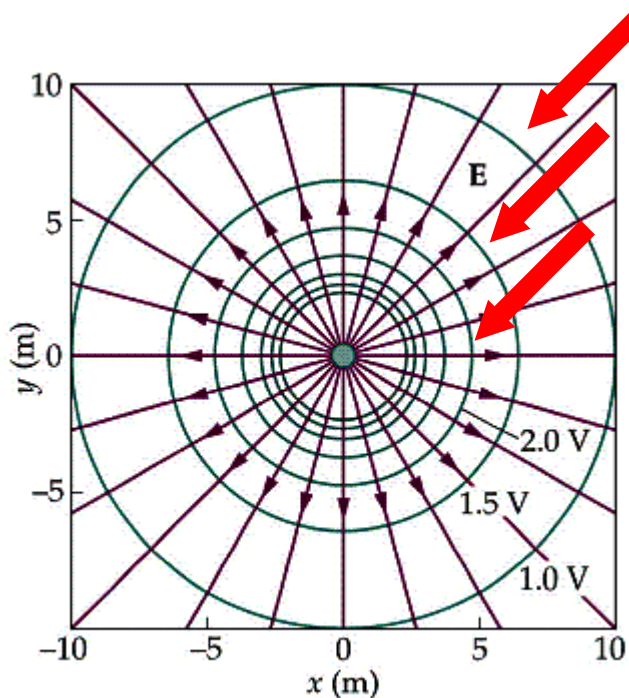
$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Powierzchnie ekwipotencjalne

Powierzchnie gdzie wartości potencjału są stałe

- ***powierzchnie ekwipotencjalne***

- poruszając ładunek po takiej powierzchni nie wykonuje się żadnej pracy
- wektor natężenia pola elektrycznego jest zawsze prostopadły do tej powierzchni

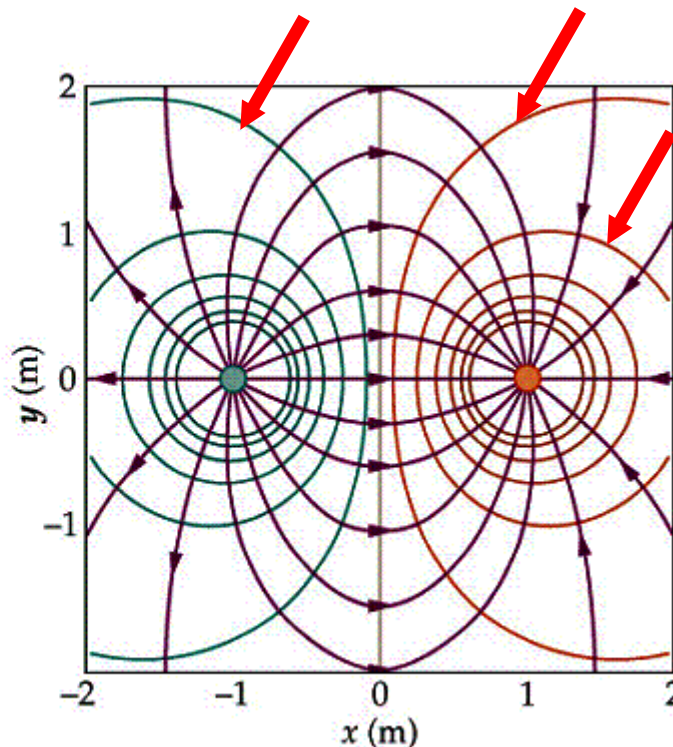
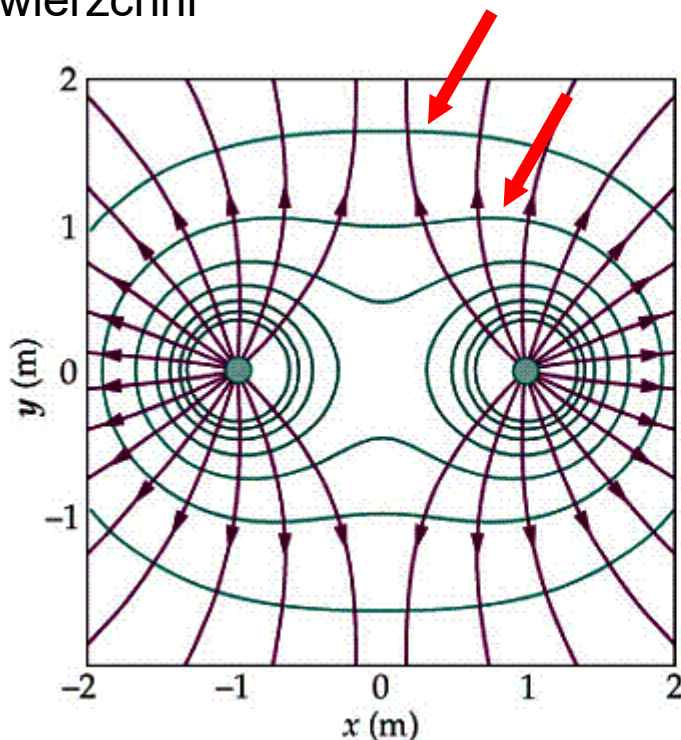


Powierzchnie ekwipotencjalne

Powierzchnie gdzie wartości potencjału są takie same

- ***powierzchnie ekwipotencjalne***

- poruszając ładunek po takiej powierzchni nie wykonuje się żadnej pracy
- wektor natężenia pola elektrycznego jest zawsze prostopadły do tej powierzchni



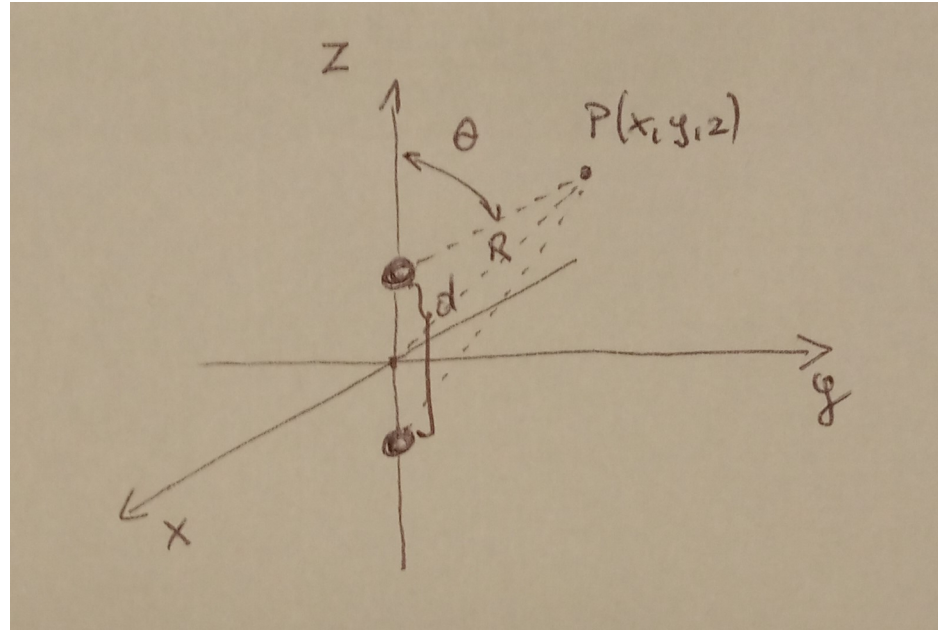
Przykład : Potencjał od dipola elektrycznego

Moment dipolowy

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

gdzie l jest wektorem od ładunku (-) do (+)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



Potencjał w punkcie P:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} + \frac{(-q)}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \right)$$

Analizując wyrażenie można zastosować następujące przybliżenia

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 = z^2 - zd + \frac{d^2}{4} + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$$

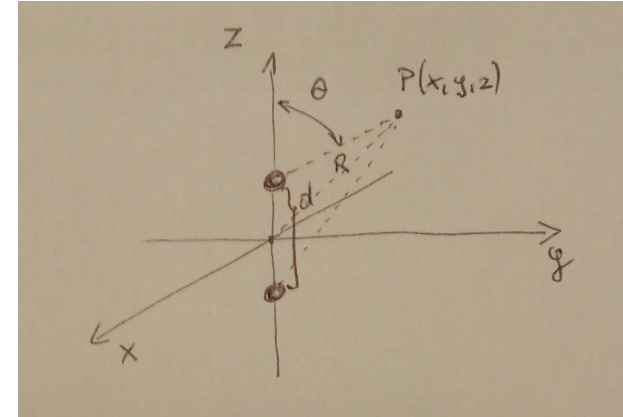
Przykład : Potencjał od dipola elektrycznego

Zatem wyrażenie może być przybliżone do:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}}$$

Rozwijamy w szereg Taylora wokół $x_0 = 0$

$$f(x) = f(x)|_{x=0} + f'(x)|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!} f''(x) \Big|_{x=0} \cdot x^2 + \dots$$



Przykład : Potencjał od dipola elektrycznego

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}} = 1 + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}\right)^3} \Big|_{d=0} \cdot \left(-\frac{z}{r^2}\right) \cdot d \right) + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}} \approx 1 + \frac{z \cdot d}{2 \cdot r^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot d}{2 \cdot r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{2 \cdot r^2}\right)$$

Przykład : Potencjał od dipola elektrycznego

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \left(1 + \frac{zd}{2r^2} - 1 + \frac{zd}{2r^2} \right)$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q \cdot x \cdot d}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

