

# Elektrostatyka

- Potencjał pola elektrycznego
- Prawo Gaussa

# Potencjał pola elektrycznego

Energia potencjalna zależy od  $q$  (ładunek próbny) i  $Q$  (ładunek który wytwarza pole), ale wielkość definiowana jako:

$$\varphi(r) = \frac{U(r)}{q} \quad \text{jednostki [ 1 Volt = 1 V = 1 J / C = 1 N·m / C ]}$$

zwana **potencjałem pola elektrycznego** zależy tylko od ładunku wytwarzającego pole  $Q$ .

***Potencjał pola elektrycznego jest wielkością skalarną!***

Zgodnie z zasadą superpozycji pól elektrycznych w przypadku nakładania się pól elektrycznych (pochodzących od różnych ładunków  $Q_i$ ) ich potencjały sumują się algebraicznie

$$\varphi(R) = \sum_i \varphi_i(R)$$

Uwaga! Tutaj sumujemy wielkości skalarne!

# Natężenie pola jako gradient potencjału

Trzeba zauważyć że **różnica potencjałów** pomiędzy dwoma punktami wynosi

$$\Delta\varphi = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = \frac{U(R_2) - U(R_1)}{q}$$

Stąd **praca przenoszenia ładunku** próbnego między tymi punktami

$$W(R_1 \rightarrow R_2) = q [\varphi(R_2) - \varphi(R_1)]$$

Dlatego można zapisać, że

$$\Delta\varphi = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \circ \vec{dr}$$

W ogólności trzeba zapisać

$$\vec{E} = - \text{grad}(\varphi) = - \vec{\nabla} \varphi$$

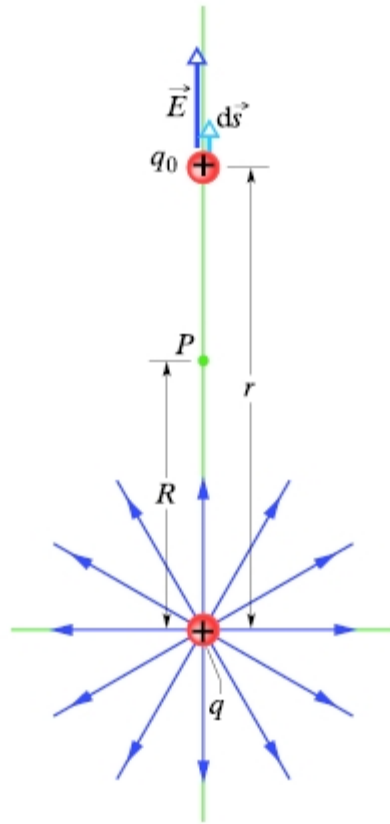
czyli

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right)$$

Wniosek:  
natężenie pola  $E$   
wskazuje kierunek  
w którym potencjał  
najszybciej maleje

To jest recepta jak policzyć  $E$  znając potencjał

# Potencjał ładunku punkowego



Rys. 25.7. Dodatni ładunek punktowy  $q$  wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  i potencjale elektrycznym  $V$  w punkcie  $P$ . Potencjał obliczamy, przesuując ładunek próbny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności. Ładunek próbny jest przedstawiony w odległości  $r$  od ładunku punkowego; zaznaczono przemieszczenie  $d\vec{s}$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

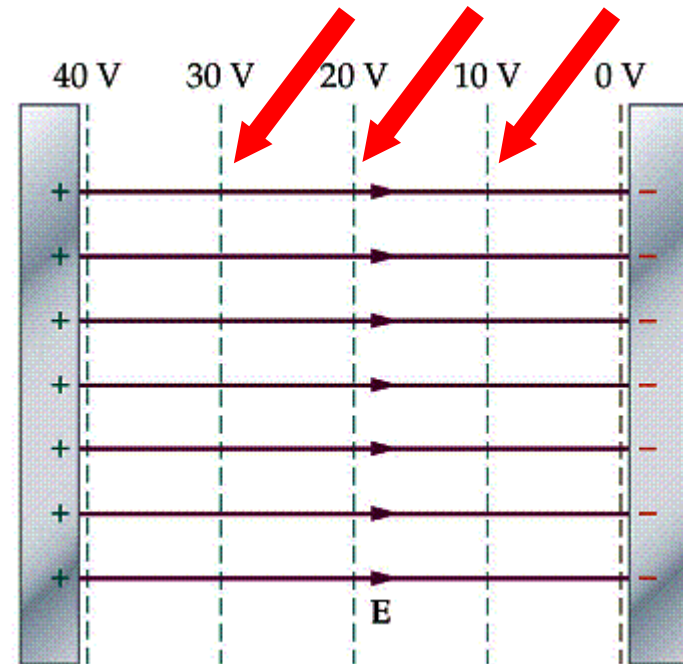
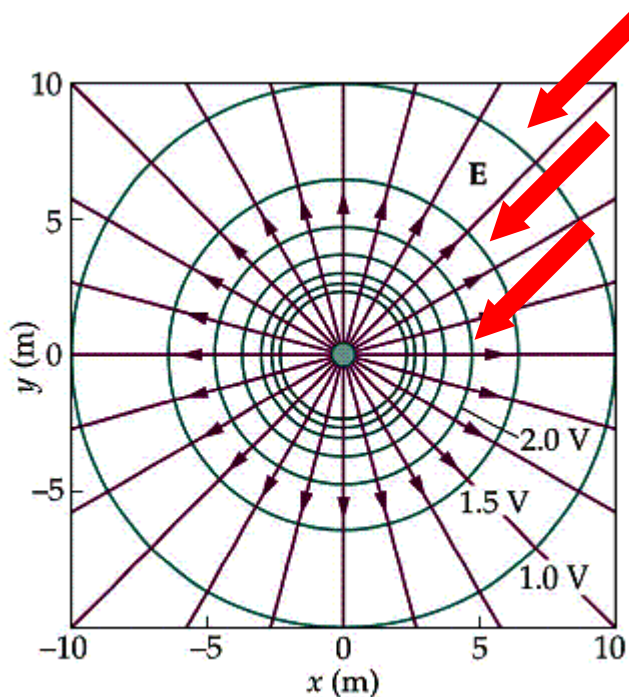
$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

# Powierzchnie ekwipotencjalne

Powierzchnie gdzie wartości potencjału są stałe

- ***powierzchnie ekwipotencjalne***

- poruszając ładunek po takiej powierzchni nie wykonuje się żadnej pracy
- wektor natężenia pola elektrycznego jest zawsze prostopadły do tej powierzchni

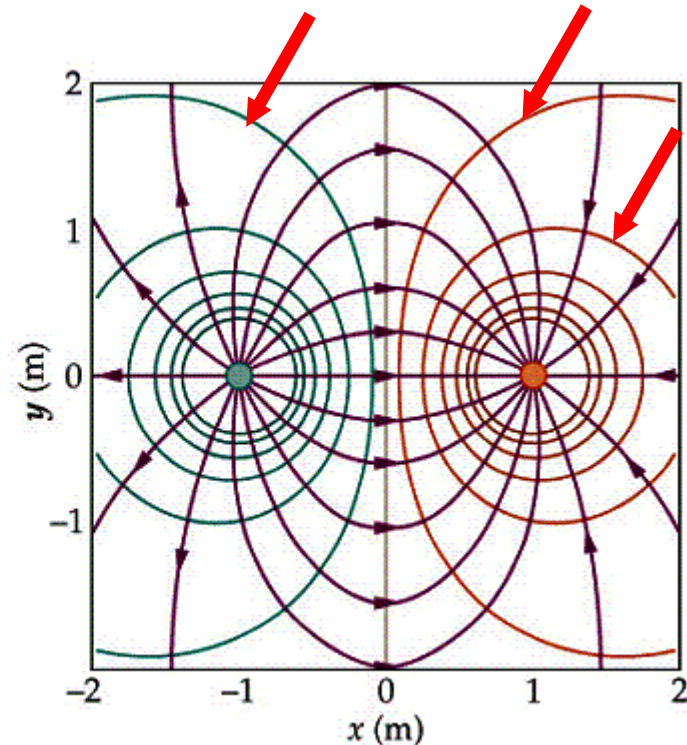
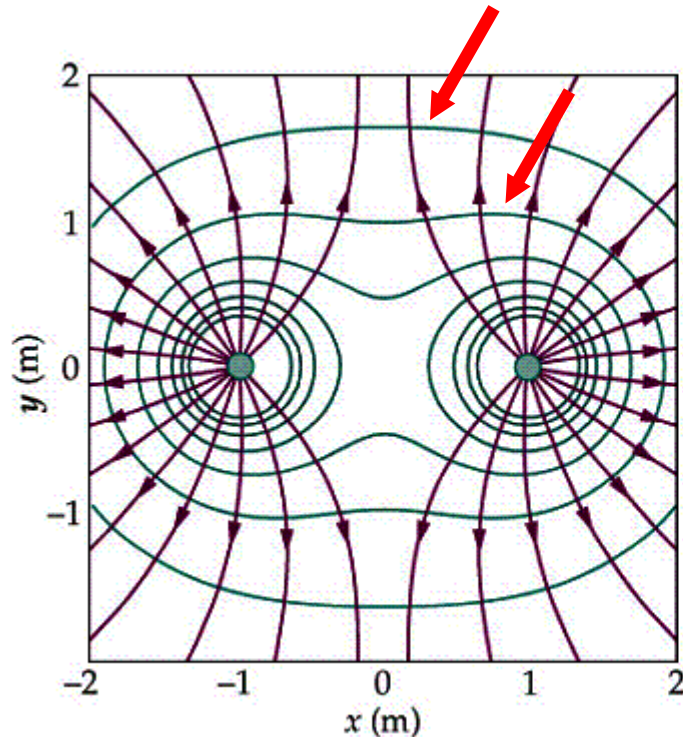


# Powierzchnie ekwipotencjalne

Powierzchnie gdzie wartości potencjału są takie same

- ***powierzchnie ekwipotencjalne***

- poruszając ładunek po takiej powierzchni nie wykonuje się żadnej pracy
- wektor natężenia pola elektrycznego jest zawsze prostopadły do tej powierzchni



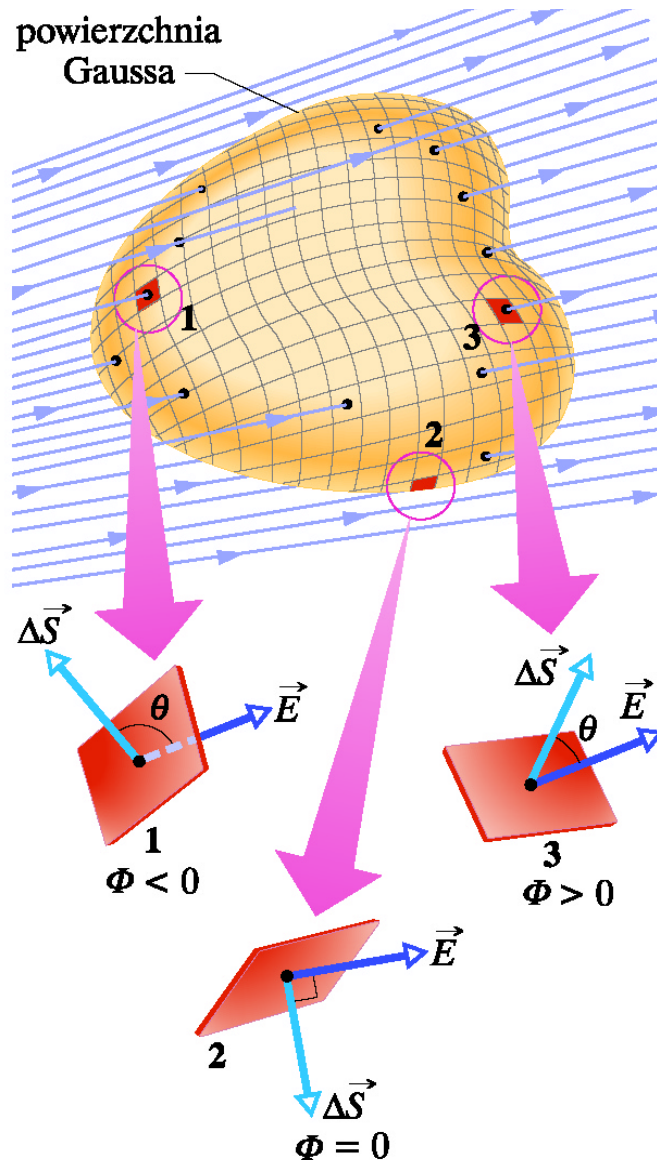
## Strumień pola elektrycznego

### ◆ Strumień pola elektrycznego przechodzący przez powierzchnię zamkniętą

- dzielimy powierzchnię na małe elementy  $\Delta s$ .
- znajdujemy wektor „normalny” (wektor prostopadły do powierzchni)
- sumujemy wszystkie iloczyny skalarne

$$\Phi_E = \sum \vec{E} \circ \Delta \vec{S}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{S}$$



Uwaga! Strumień zależy od kąta pomiędzy wektorami

$$\vec{E} \circ \Delta \vec{S} = E \Delta S \cos \theta$$

Wektor  $\Delta \vec{s}$  zawsze skierowany jest na zewnątrz powierzchni zamkniętej !

# Strumień pola elektrycznego

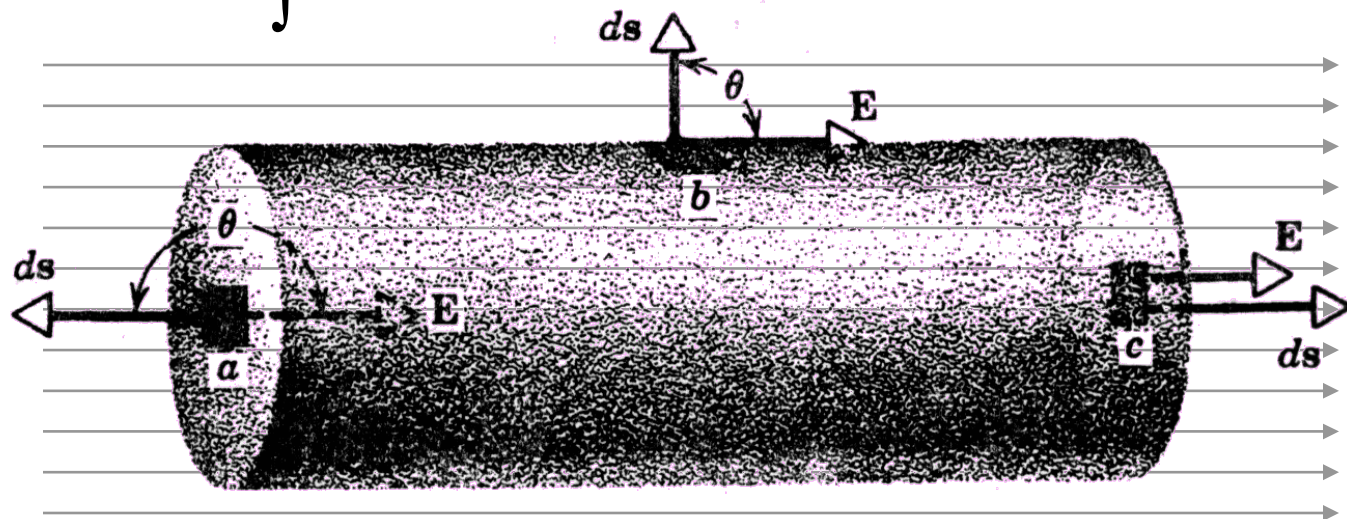
**Przykład!** Zamknięta powierzchnia cylindryczna w jednorodnym polu elektrycznym

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{(a)} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(b)} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(c)} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

$$\int_{(a)} \vec{E} d\vec{S} = \int E \cos 180^\circ dS = -E \int dS = -ES$$

$$\int_{(b)} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

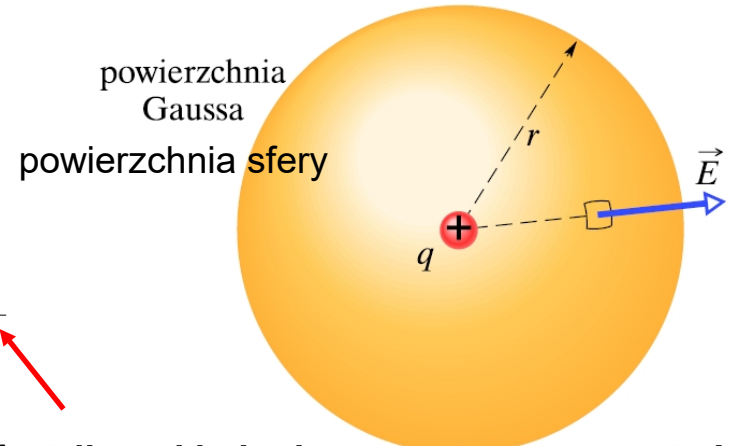
$$\int_{(c)} \vec{E} d\vec{S} = ES$$



# Prawo Gaussa

**Przykład!** Zamknięta powierzchnia sferyczna w polu elektrycznym wytworzonym przez ładunek punktowy

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q 4\pi R^2}{4\pi \varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

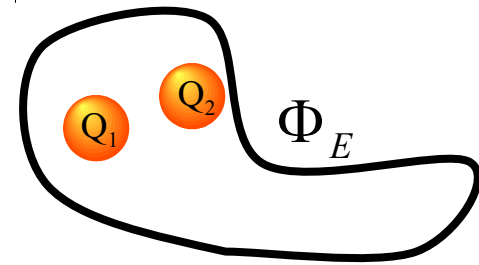


**zależy tylko od ładunku zawartego wewnątrz!**

Prawo Gaussa mówi :

***strumień natężenia pola elektrycznego w próżni przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do sumy algebraicznej ładunków elektrycznych otoczonych przez tę powierzchnię***

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_E = \sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Strumień przez pow. Zamkniętą:

Nie zależy od sposobu ułożenia ład.

Nie zależy od wartości ład. zewnętrznych

# Prawo Gaussa – postać różniczkowa

Weźmy nieskończenie małą powierzchnię Gaussa w kształcie prostopadłościanu o wym.  $dx, dy, dz$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Po przekształceniach matematycznych można Prawo Gaussa przedstawić w postaci różniczkowej

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

gdzie operator

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = -\frac{q(x, y, z)}{\varepsilon_0}$$

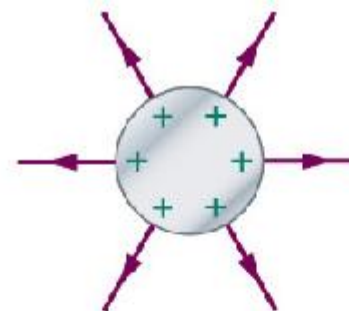
Równanie Poisson'a,

Pozwala obliczyć rozkłady potencjału (pole skalarne potencjału) na podstawie znajomości rozkładu ładunku

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# Prawo Gaussa - konsekwencje

Ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku rozmieszcza się na jego powierzchni



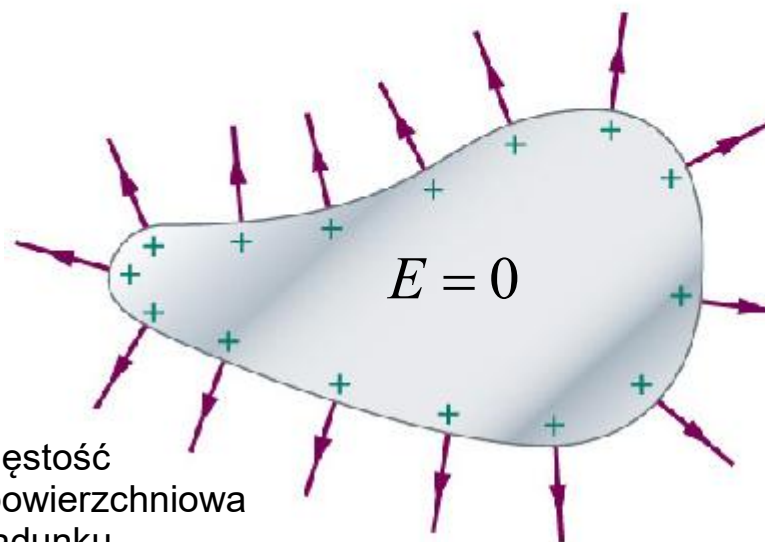
(a)

Jeśli  $\mathbf{E}=\mathbf{0}$  wewnątrz (a to można zmierzyć) to nie może być ładunku wewnątrz takiego przewodnika – lokuje się on na zewnątrz

Na powierzchni przewodnika

wartość nat. pola el.  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

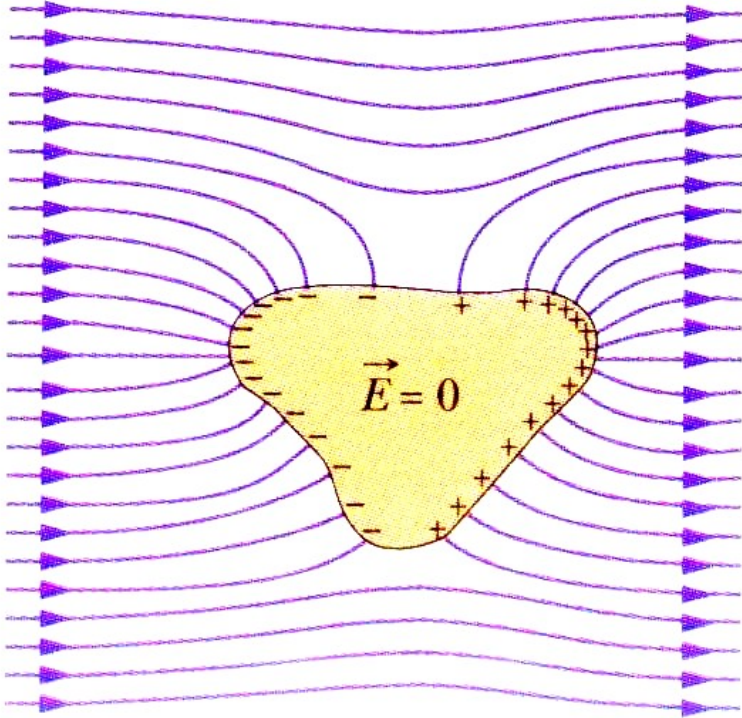
gęstość powierzchniowa ładunku



(b)

wartość potencjału pola el.  $\varphi = \text{const}$

# Prawo Gaussa - konsekwencje



Nienaładowany przewodnik umieszczony w polu elektrycznym. Ładunki elektryczne (np. elektrony) rozkładają się na powierzchni tak, aby w środku  $E=0$ , a na zewnątrz pole  $E$  było prostopadłe do powierzchni przewodnika

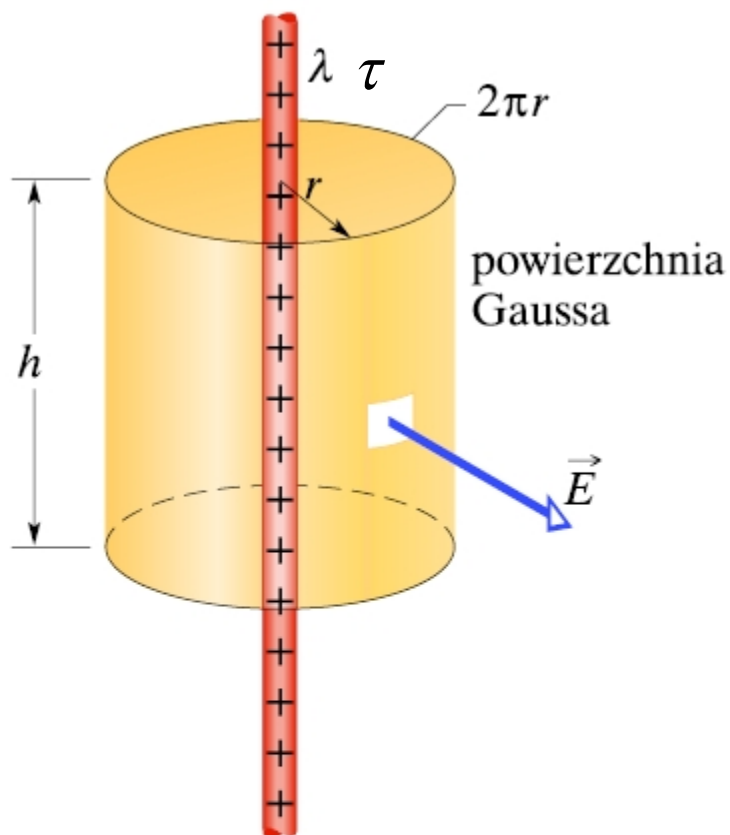


Wyładowanie elektryczne przechodzące przez samochód. Pole elektryczne wewnątrz  $E=0$

# Prawo Gaussa – zastosowania

## nieskończony przewodnik liniowy

Do obliczeń wartości natężenia pola elektrycznego można zastosować prawo Gaussa w przypadkach, gdy pole ma pewną symetrię



A – powierzchnia podstawy walca  
B – powierzchnia boczna

Przyjmijmy, że gęstość liniowa ładunku jednorodna wynosi

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L}$$

Wybieramy odpowiednio powierzchnię zamkniętą i liczymy strumień

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

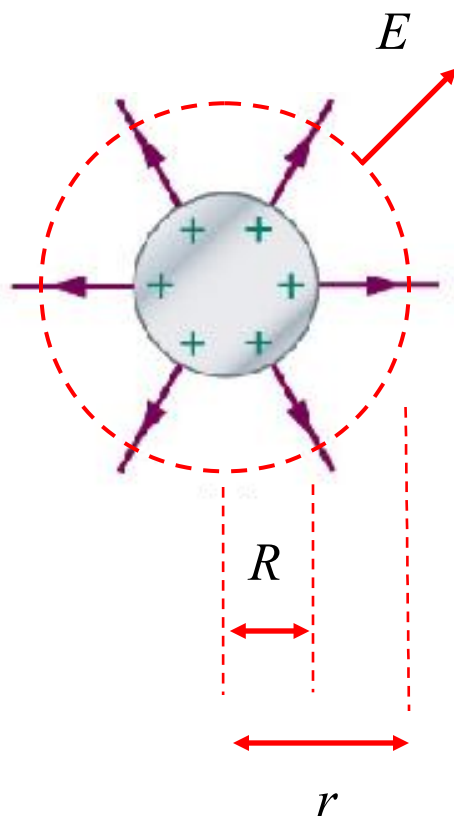
$$\Phi_E = \Phi_{A1} + \Phi_{A2} + \Phi_B = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = 2EA \cos 90^\circ + EB \cos 0^\circ = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r h = \frac{\tau h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}$$

# Prawo Gaussa – zastosowania, pole elektryczne naładowanej kuli



Jak policzyć natężenie takiego pola?

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Wybieramy odpowiednio powierzchnię zamkniętą

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Jest to takie samo  
wyrażenie jak dla  
ładunku  
punktowego!

Jak policzyć potencjał takiego pola w punkcie  $r$  ?

dla  $r > R$   $E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

dla  $r < R$   $E = 0$

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \circ d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi r \epsilon_0}$$

# Prawo Gaussa – zastosowania

## jednorodnie naładowana płaszczyzna

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Zakładamy że gęstość powierzchniowa ładunku jest jednorodna i wynosi

$$\sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{Q}{S}$$

$$\Phi_E = \Phi_A + \Phi_B + \Phi_D = \frac{q}{\epsilon_0}$$

przez A

przez B

przez powierzchnię boczną = 0

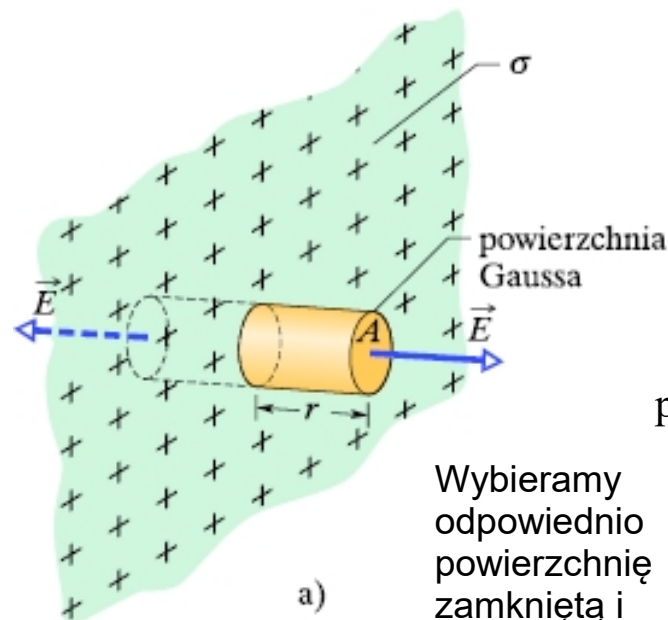
$$\Phi_E = EA \cos 0^\circ + EB \cos 0^\circ = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ale  $A=B$

$$\Phi_E = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Tutaj pole elektryczne jest stałe i nie zależy od odległości od płaszczyzny



Wybieramy odpowiednio powierzchnię zamkniętą i liczymy strumień

