

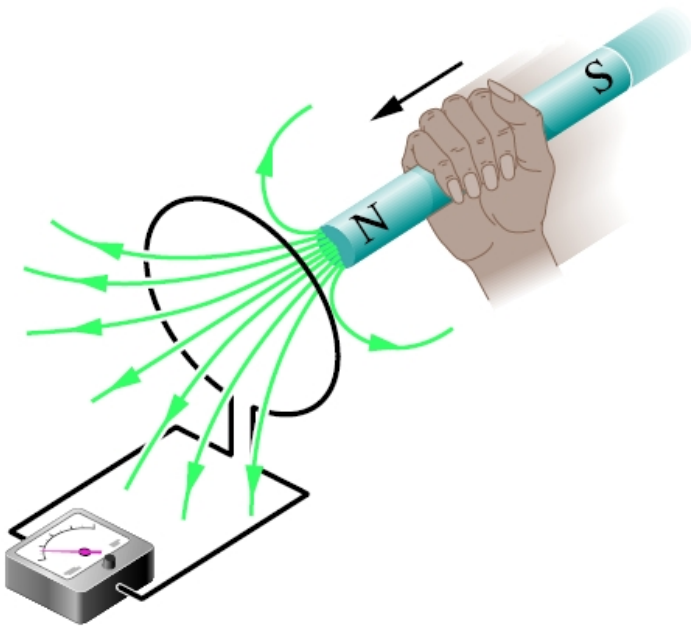
Magnetyzm cz.II

- Indukcja elektromagnetyczna
- Równania Maxwella
- Obwody RL,RC

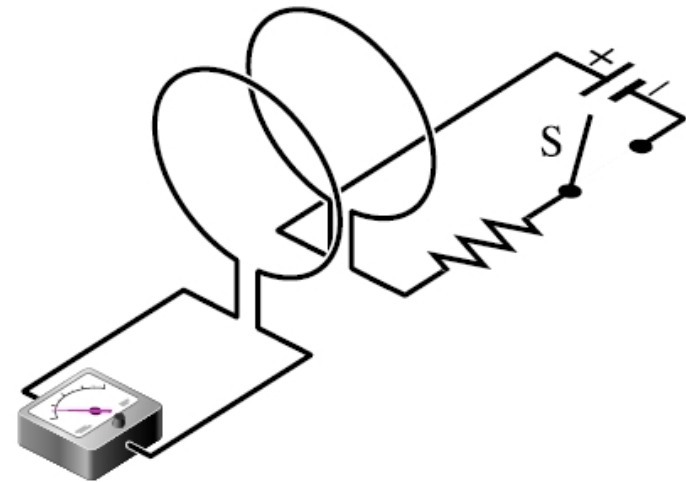
Indukcja elektromagnetyczna

Prawo indukcji Faraday'a

Co się stanie gdy przewodnik elektryczny umieścimy w zmiennym polu magnetycznym?



Rys. 31.1. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli z drutu, gdy magnes porusza się względem tej pętli



Rys. 31.2. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli po lewej stronie w momencie, gdy klucz S jest zamykany (aby włączyć prąd w pętli po prawej stronie) lub otwierany (aby wyłączyć prąd w pętli po prawej stronie). Obie cewki są nieruchome

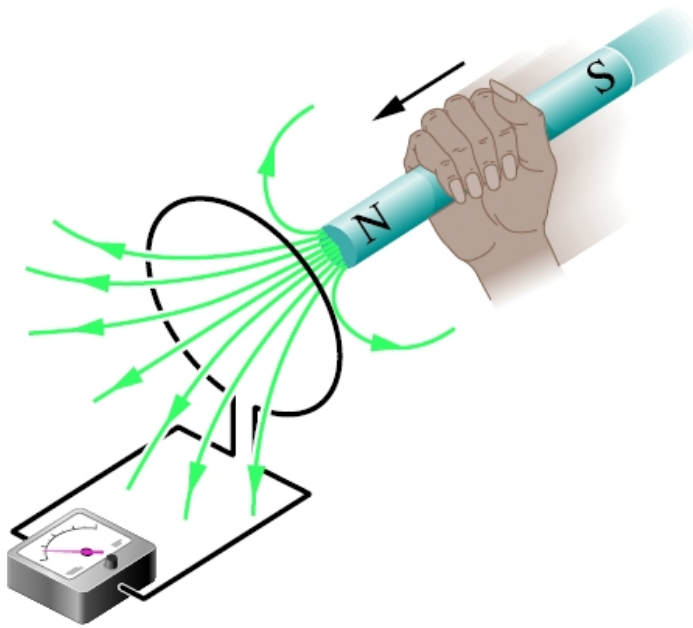
Indukcja elektromagnetyczna

Prawo indukcji Faraday'a

Co się stanie gdy przewodnik elektryczny umieścimy w zmiennym polu magnetycznym?

Pojawiający się prąd jest **prądem indukowanym** wywoływanym przez indukowaną siłę elektromotoryczną SEM.

Indukowana siła elektromotoryczna w obwodzie przewodnika elektrycznego jest równa szybkości z jaką zmienia się **strumień pola magnetycznego** przechodzący przez powierzchnię rozpiętą przez obwód.



Rys. 31.1. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli z drutu, gdy magnes porusza się względem tej pętli

Prawo indukcji Faraday'a

$$\mathcal{E}_{SEM} = - \frac{d\phi}{dt}$$

Gdzie strumień definiowany jest:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Strumień wektora $\mathbf{B}$ przez powierzchnię

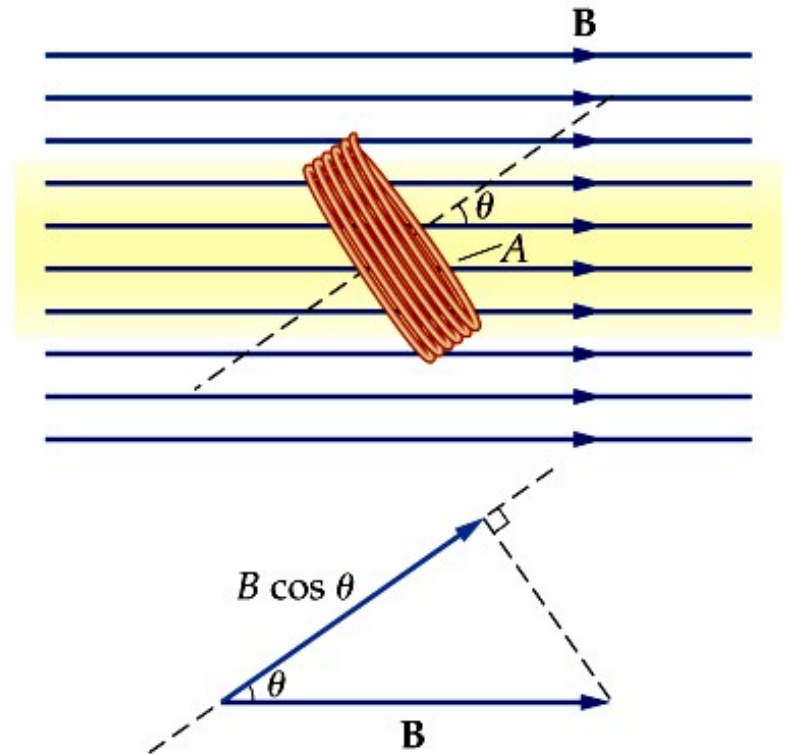
strumień definiowany jest:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

jeśli powierzchnia jest płaszczyzną o pow. A

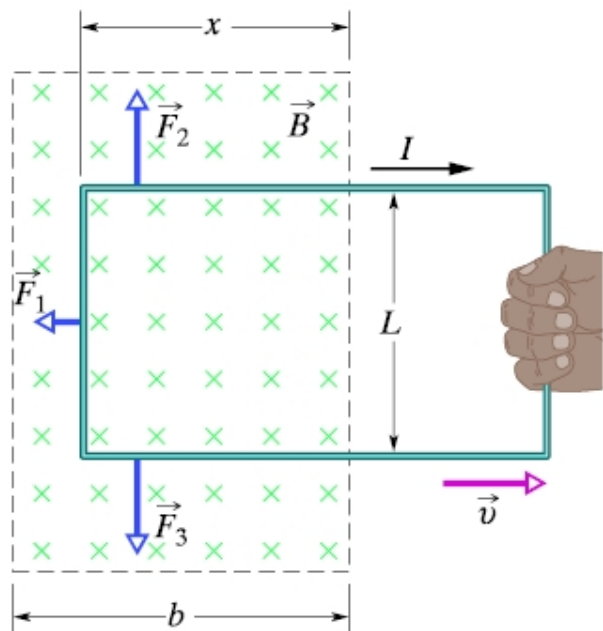
$$\Phi_m = A B_{\perp} = A B \cos \theta$$

$$B_{\perp} = B \cos \theta$$

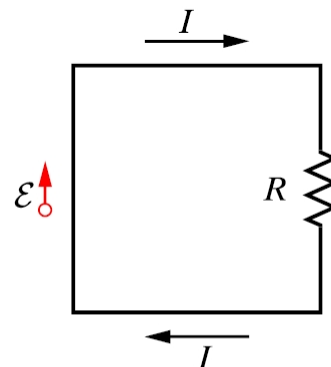


Indukcja elektromagnetyczna, Reguła Lenza

Przykład: Ramka wyciągana z pola magnetycznego z prędkością $\vec{v}$



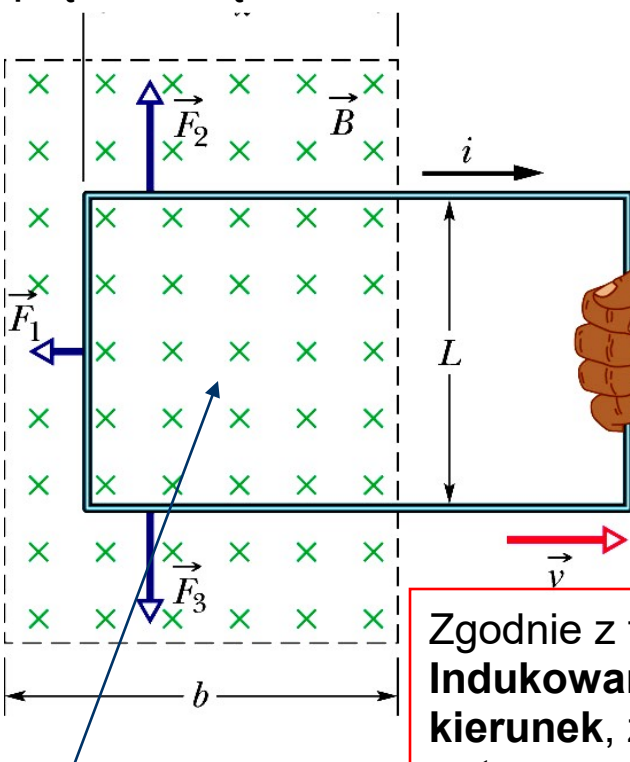
Rys. 31.10. Zamknięta przewodząca ramka jest wyciągana ze stałą prędkością $\vec{v}$ z obszaru, w którym istnieje pole magnetyczne. Podczas ruchu ramki indukuje się w niej prąd o natężeniu I , płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Na odcinkach ramki znajdujące się nadal w polu magnetycznym działają siły $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$



Rys. 31.11. Obwód zastępczy poruszającej się ramki, przedstawionej na rysunku 31.10

Indukcja elektromagnetyczna, Reguła Lenza

Przykład: Ramka wyciągana z pola magnetycznego z prędkością $\vec{v}$



Powierzchnia jaką przenika pole magnetyczne

Strumień wektora B przez ramkę:

$$\phi_m = B \cdot A = B \cdot L \cdot x$$

więc siła elektromotoryczna:

$$E_{SEM} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B \frac{dA}{dt}$$

$$E_{SEM} = -BL \frac{dx}{dt} = BLv$$

Zgodnie z tzw. **regułą Lenz'a**:
Indukowany prąd ma taki kierunek, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwstawia się zmianom pola magnetycznego które go wywołało.

Kiedy płynie prąd w obwodzie to jeśli znajduje się w polu magnetycznym, musi na niego działać siła

$$\vec{F}_1 = i\vec{L} \times \vec{B}$$

$$F_1 = BiL$$

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = Bix \\ F_3 = -F_2 \end{array} \right\} \text{znoszą się}$$

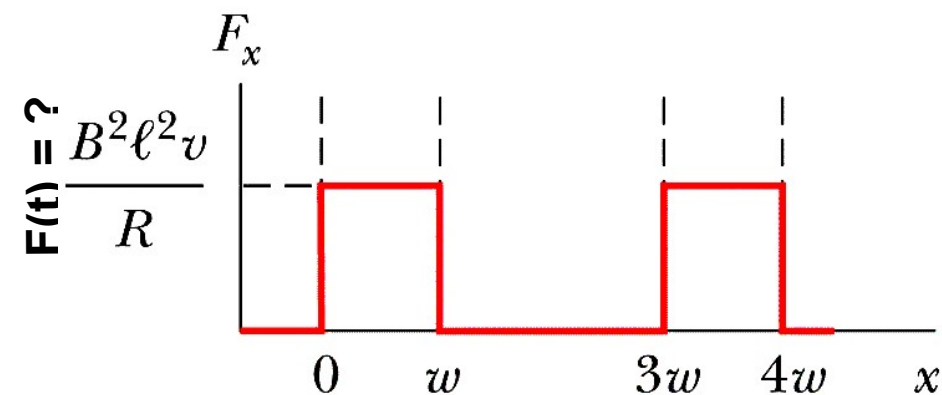
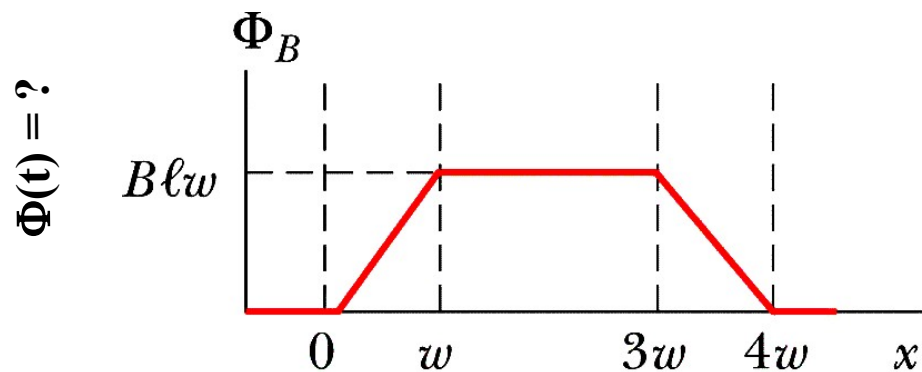
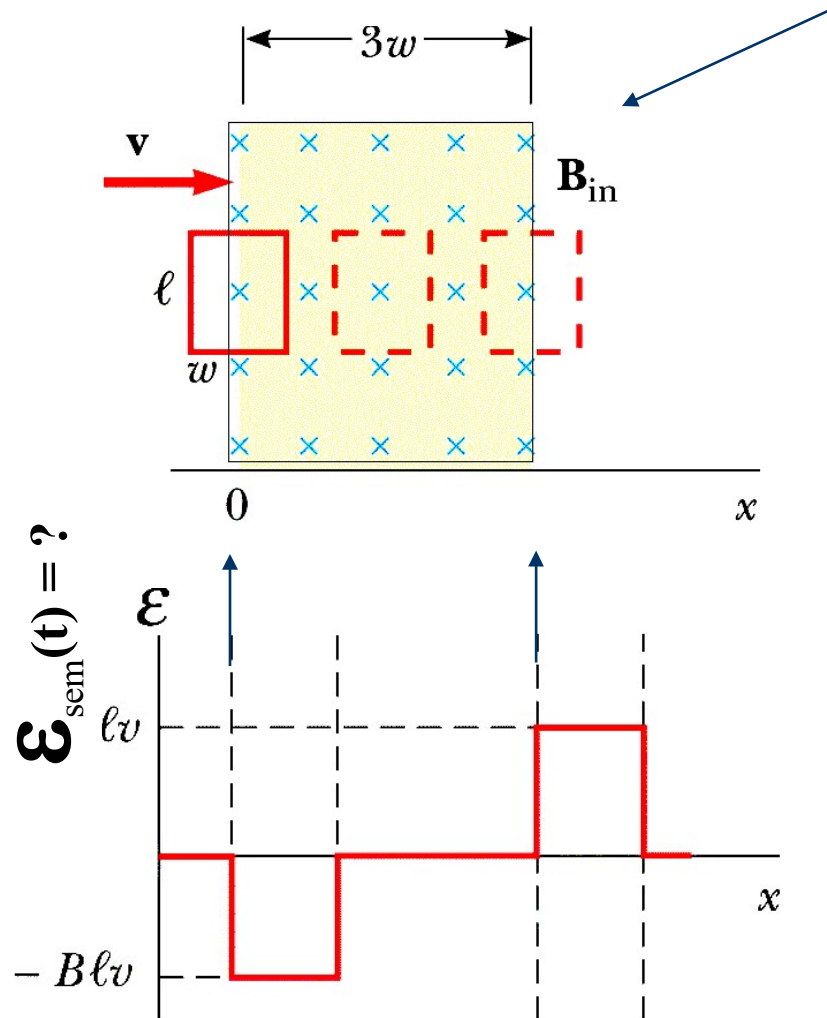
$$F_1 = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Wyciągając ramkę doznajemy oporu, musimy wykonać pewną pracę – ta praca jest zużywana na np. wydzielenie ciepła w obwodzie.

$$i = \frac{E_{SEM}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Indukcja elektromagnetyczna

Przykład: Ramka przechodzi przez pole magnetyczne z prędkością v



Indukcja elektromagnetyczna

Strumień wektora $\vec{B}$ przez ramkę:

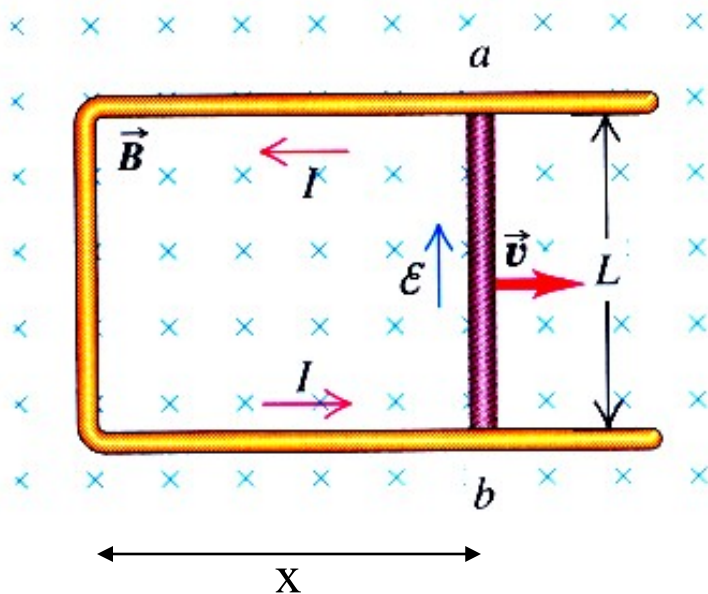
$$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA$$

więc siła elektromotoryczna:

$$\mathcal{E}_{sem} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -BLv$$

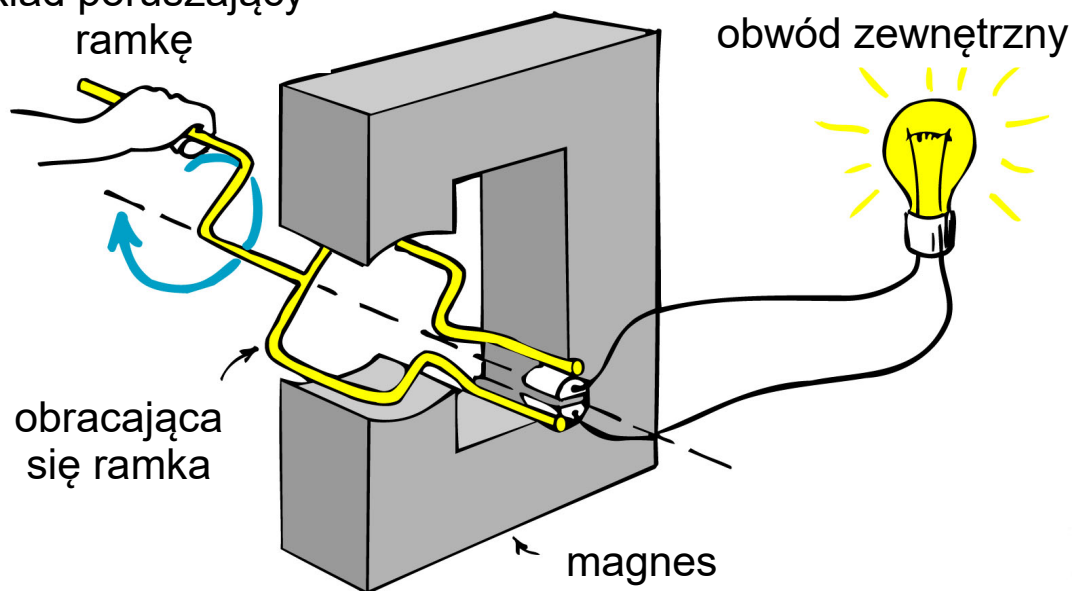
ponieważ:
$$\frac{dA}{dt} = L \frac{dx}{dt} = Lv.$$

pole powierzchni zwiększa się, dlatego kierunek prądu (zgodnie z regułą Lenza) będzie przeciwny niż w poprzednim przypadku.



Indukcja elektromagnetyczna, prąd zmienny

układ poruszający
ramkę



Strumień wektora $\mathbf{B}$

$$\phi_B = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

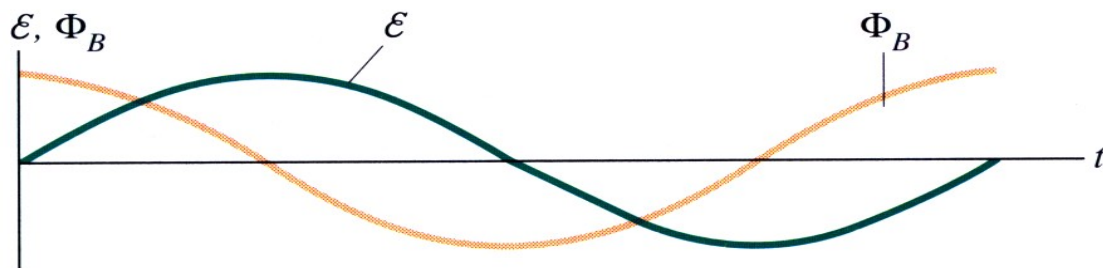
$$= NBA \cos(\phi)$$

Siła SEM

$$\mathcal{E}_{SEM} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$= \omega N B A \sin(\omega t)$$

ω → częstość obrotów
 N → liczba zwojów-ramek
 B → pole magnetyczne
 A → powierzchnia ramki



Zmienne pole magnetyczne, reguła Lenza

Strumień wektora $\mathbf{B}$

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Siła SEM

$$\mathcal{E}_{SEM} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

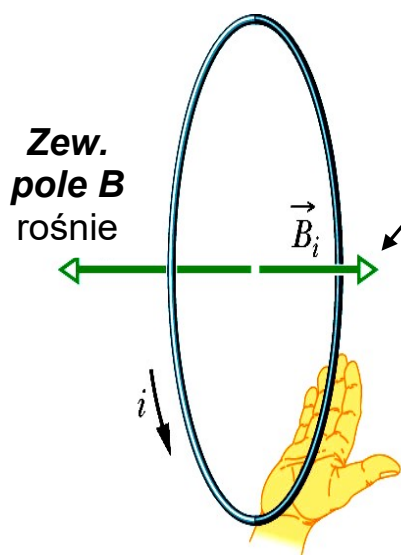
Prąd indukowany

$$i = \frac{\mathcal{E}_{SEM}}{R}$$

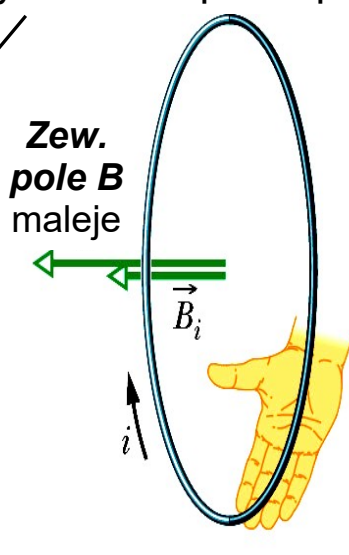
Zgodnie z tzw. **regułą Lenz'a**:

Indukowany prąd ma taki kierunek, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwstawia się zmianom pola magnetycznego które go wywołało.

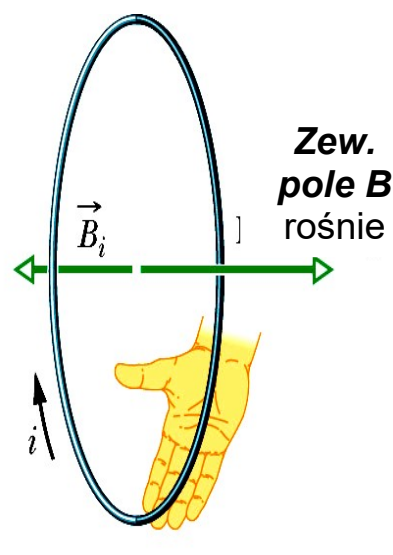
Pole $\mathbf{B}_i$ wytworzone przez prąd i



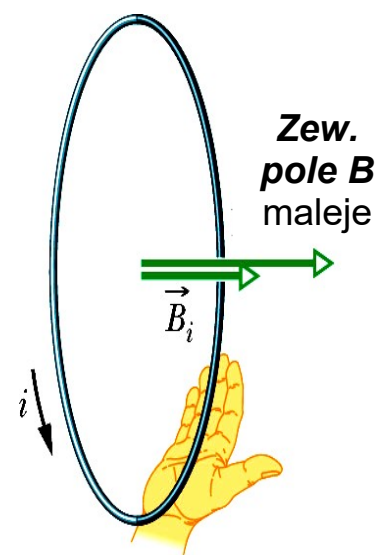
(a)



(b)



(c)



(d)

Zmienne pole magnetyczne, prawo indukcji Faraday'a raz jeszcze

Pole magnetyczne $\mathbf{B}$ zmienia swoją wartość

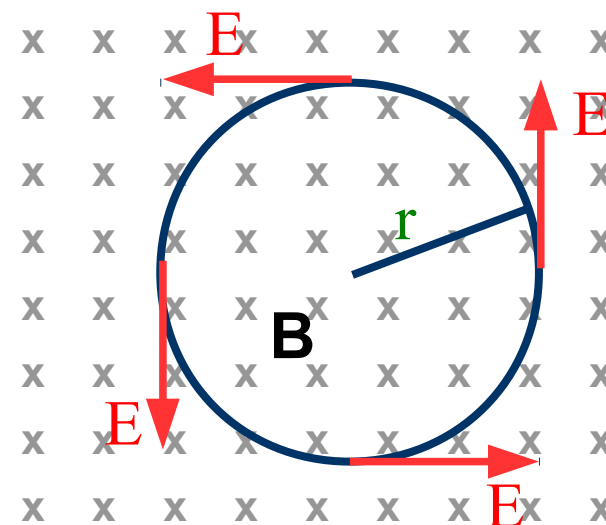
Rozważając okrąg o promieniu r możemy stwierdzić, że obejmuje on strumień ϕ_m

Gdy ϕ_m zmienia się w czasie to indukuje się SEM, a więc także pole elektryczne, które jest styczne do tego okręgu!

**zmienne pole magnetyczne wytwarza
pole elektryczne**

Siła SEM, ma wymiar napięcia, zależność między siłą SEM a natężeniem pola wynosi:

$$\mathcal{E}_{SEM} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

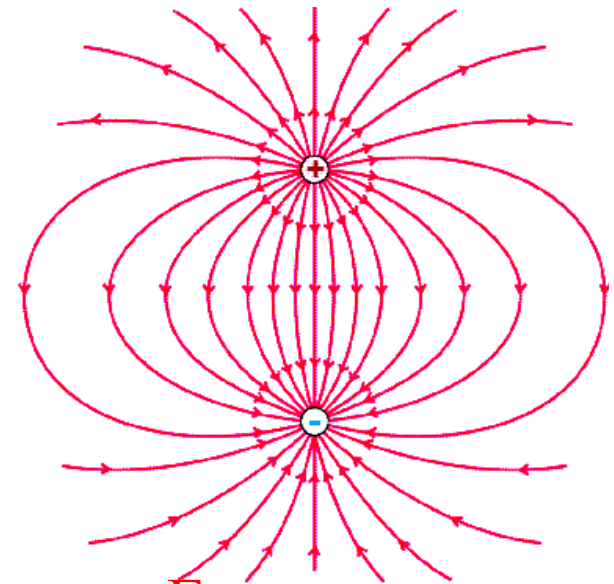


więc:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

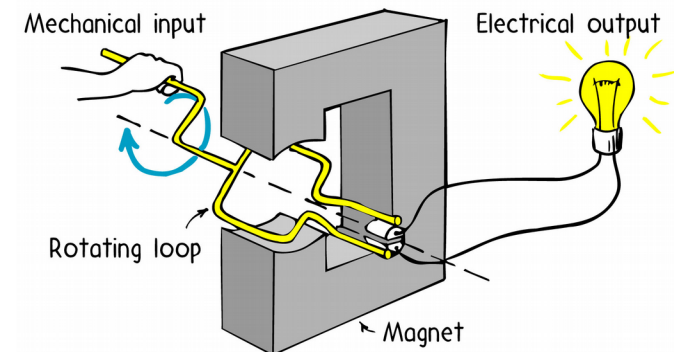
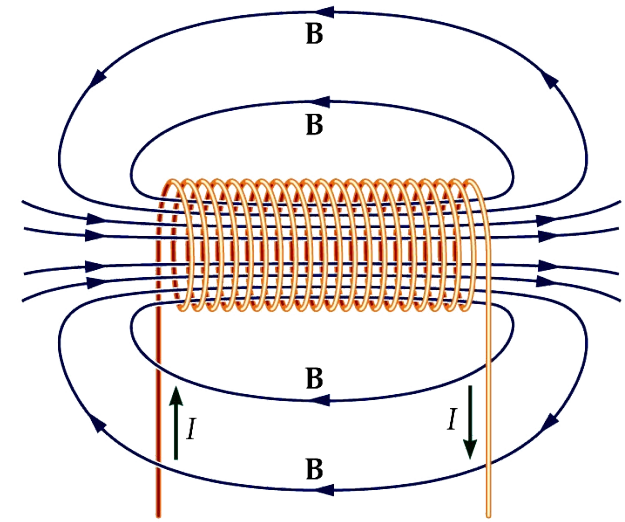
Różnica między statycznym a indukowanym polem elektrycznym

- „**Statyczne**” **pole elektryczne** wytwarzane jest przez ładunki elektryczne – linie tego pola mają swój początek tam gdzie znajduje się ładunek dodatki, a kończą się tam gdzie znajduje się ładunek ujemny – mówimy że pole jest „bezwirowe”
- Zmienne pole magnetyczne wytwarza **indukowane pole elektryczne** (prawo Faraday’a) – linie tego pola nie mają końca ani początku- mówimy że pole jest „wirowe”
– pole to_ wytwarza się niezależnie od tego czy w danym miejscu znajduje się obwód przewodzący



Różnica między statycznym a indukowanym polem elektrycznym

- Linie **pola magnetycznego** nie mają początku ani końca – zawsze tworzą zamknięte pętle – mówimy że pole magnetyczne jest „wirowe”
 - Pole magnetyczne** wytwarzane jest przez prądy elektryczne (poruszające się ładunki)
 - Ponadto, okazuje się, że **zmienne pole elektryczne** wytwarza **pole magnetyczne**
 - Zmienne pole magnetyczne indukuje siłę elektromotoryczną w obwodzie elektrycznym w nim umieszczonym

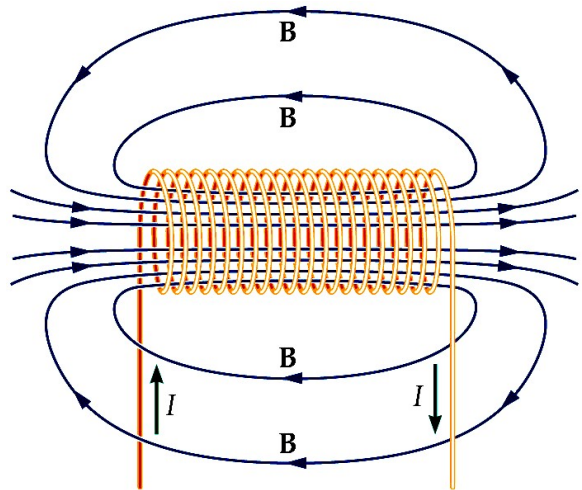


Indukcyjność cewki, samoindukcja

Induktor: urządzenie, które ma produkować pole magnetyczne o znanej wartości w określonym obszarze

Induktorem może być cewka (zwojnica, solenoid)

Def. Indukcyjności cewki
(współczynnik indukcji własnej)



liczba
zwojów

strumień wektora B (wytworzone
pole magnetyczne)

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

prąd płynący przez cewkę

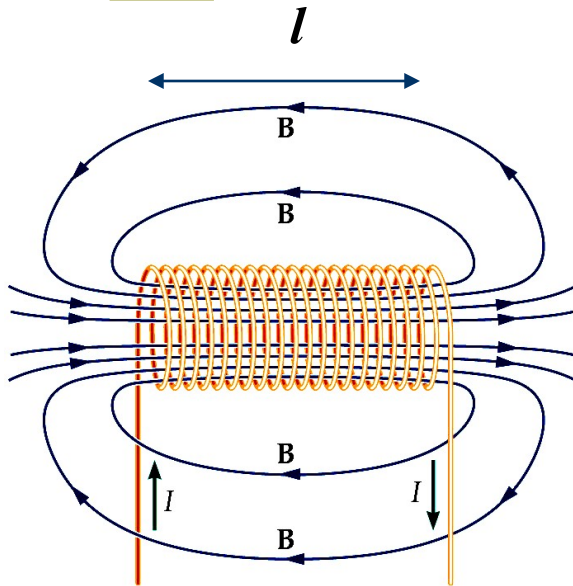
$$\left[1 H = \frac{T m^2}{A} \right]$$

Zjawisko **samoindukcji**:

Indukowana SEM pojawia się w cewce gdy zmienia się w niej prąd:

SEM samoindukcji $\longrightarrow \mathcal{E}_{SEM} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -L \frac{di}{dt}$

Obliczenie indukcyjności dla wewnętrznej części długiego solenoidu.



Niech długość solenoidu = l

Strumień wewnątrz wynosi:

$$N\Phi_B = n l B A$$

powierzchnia przekroju

liczba zwojów na jednostkę długości

Wartość B w środku solenoidu $B = \mu_0 n i$

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \mu_0 n^2 l A$$

Indukcyjność jest proporcjonalna do objętości solenoidu (lA) i kwadratu „gęstości nawinięcia” zwojów n .

Solenoid toroidalny – pole magnetyczne w środku

Z prawa Ampera, korzystając z krążenia wektora $\vec{B}$ po drodze (1)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$$

ilość zwojów

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I N$$

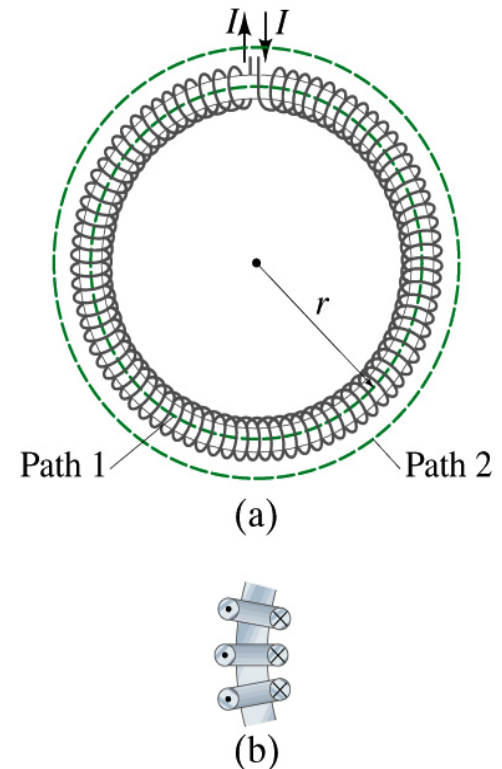
otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r}$$

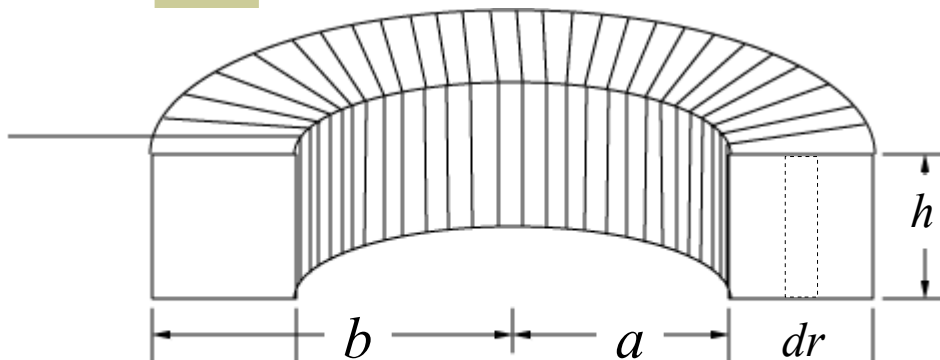
promień

Zwróćmy uwagę że pole jest niejednorodne w środku!

Jeśli zastosujemy krążenie wektora $\vec{B}$ po drodze (2) to łatwo wykazać że nie ma pola magnetycznego na zewnątrz toroidu.



Solenoid toroidalny - indukcyjność



Definicja indukcyjności:

$$L = \frac{\text{całkowity strumień pola mag.}}{\text{prąd}}$$

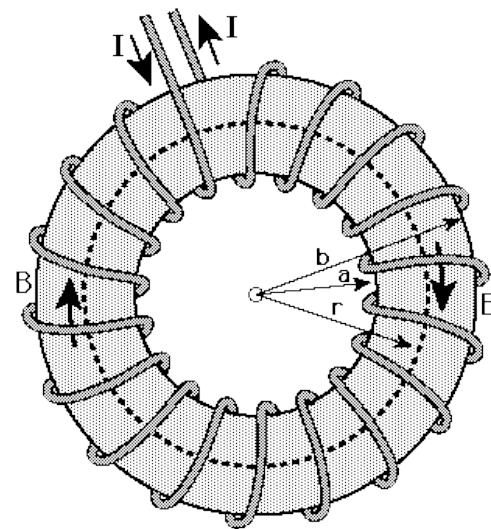
Wkład warstwy o przekroju $h \, dr$ do strumienia pola magnetycznego

$$d\Phi = N B dA = N B h dr$$

Całkowity strumień pola magnetycznego w środku

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



Indukcyjność toroidu

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Równania Maxwell'a

Prawo Gauss'a

$$\text{I} \quad \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$$

strumień $\vec{E}$

Całkowity strumień $\vec{E}$ w zamkniętej powierzchni równy jest ładunkowi w niej zawartemu
Pole elektryczne może być polem **źródłowym**

Prawo Gauss'a

$$\text{II} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

strumień $\vec{B}$

Nie znamy „ładunku magnetycznego”
Pole magnetyczne jest polem **wirowym**

Prawo Faraday'a

$$\text{III} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

krążenie $\vec{E}$

Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne

Prawo Ampera-Maxwell'a

$$\text{IV} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i$$

krążenie $\vec{B}$

Prąd „przesunięcia” – analogia do rów. III

Pole magnetyczne może być wytworzone przez zmienne pole elektryczne lub przez prąd płynący w przewodniku

Prąd przebijający rozpiętą powierzchnię na obwodzie

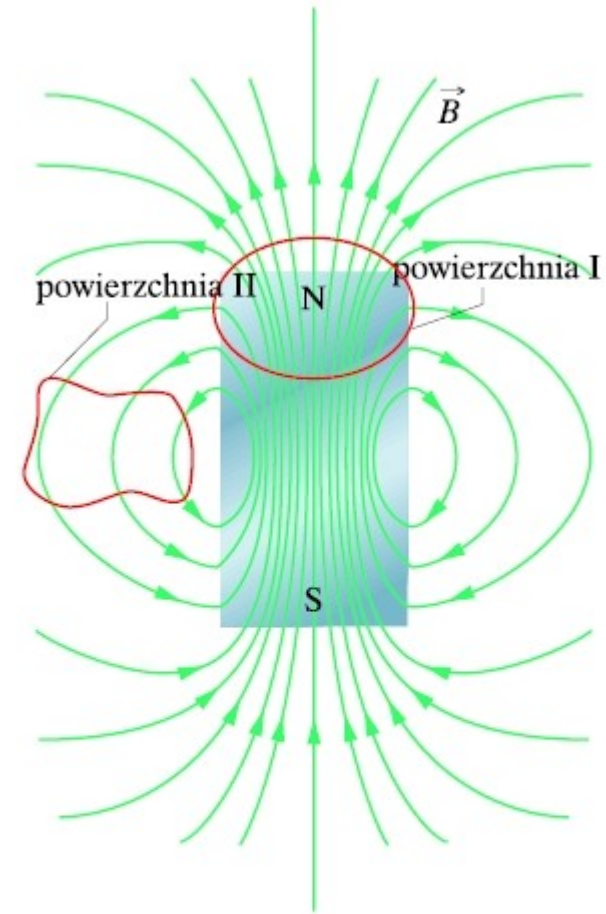
I

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

Prawo Gauss'a

$$\text{II} \quad \oint_{\text{strumień } \vec{B}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Nie znamy „ładunku magnetycznego”
Pole magnetyczne jest polem **wirowym**



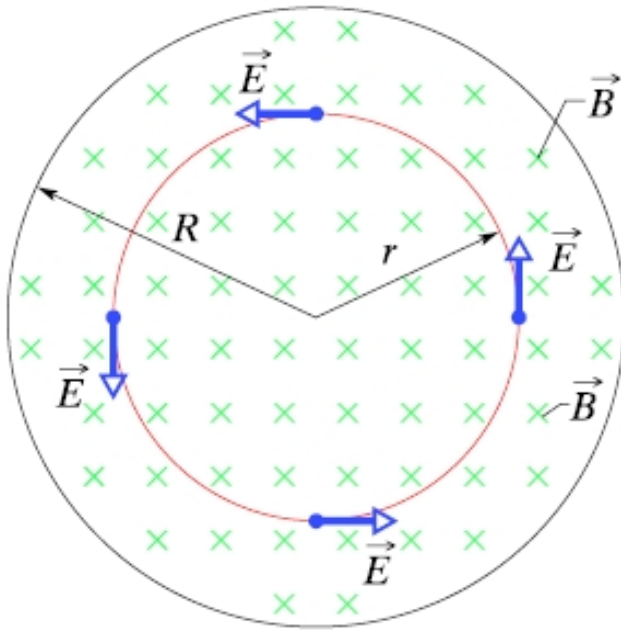
Rys. 32.3. Linie pola magnetycznego krótkiego magnesu sztabkowego. Krzywe zamknięte zaznaczone na czerwono są przekrojami trójwymiarowych powierzchni Gaussa

Prawo Faraday'a

Prawo Faraday'a

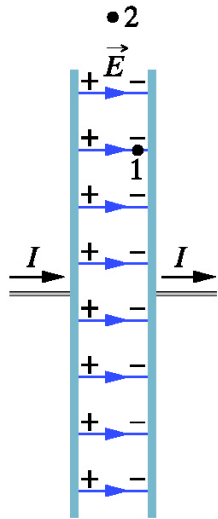
III $\oint_{\text{krężenie } \vec{E}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$

Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne

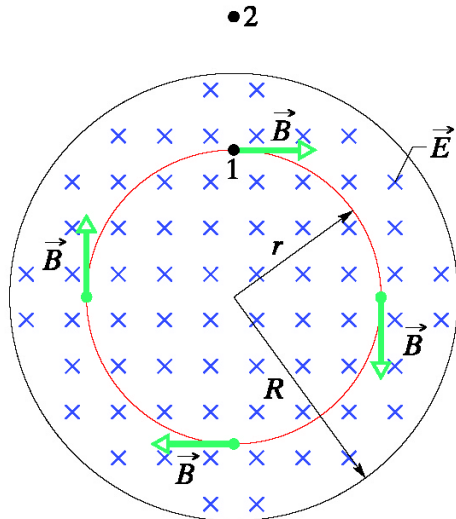


Rys. 32.15. Jednorodne pole magnetyczne $\vec{B}$ w obszarze w kształcie koła. Pole jest skierowane za płaszczyznę rysunku, a jego indukcja rośnie. Pole elektryczne $\vec{E}$, indukowane przez zmienne pole magnetyczne, jest pokazane w czterech punktach leżących na okręgu współśrodkowym z kołowym obszarem. Porównaj ten przypadek z przypadkiem, przedstawionym na rysunku 32.14b

Prawo Ampera-Maxwell'a



a)



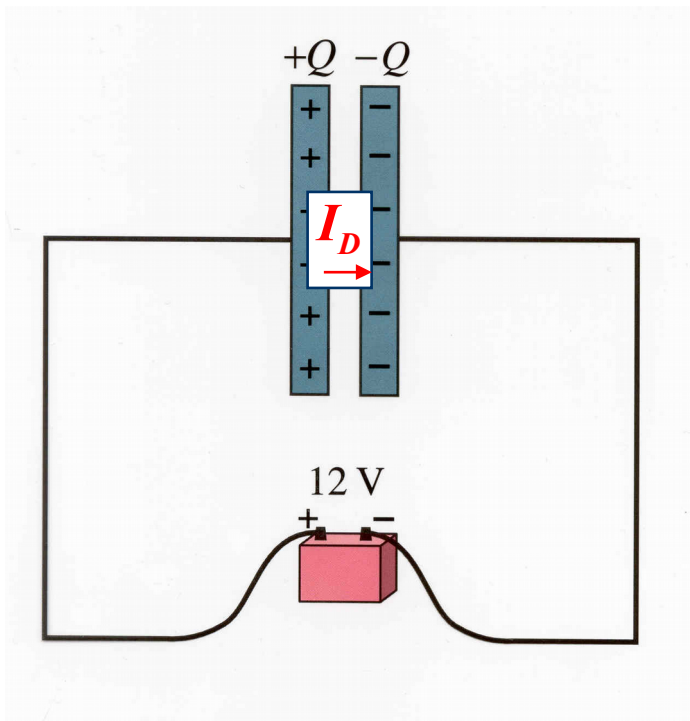
$$\text{IV} \quad \oint_{\text{krężenie } \vec{B}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i$$

Rys. 32.14. a) Kondensator płaski, pokazany z boku, jest ładowany stałym prądem o natężeniu I . b) Widok z wnętrza kondensatora w kierunku prawej okładki. Pole elektryczne jest jednorodne i skierowane za płaszczyznę rysunku (czyli do okładki), a jego natężenie rośnie, gdy zwiększa się ładunek na okładkach kondensatora. Pole magnetyczne $\vec{B}$, indukowane przez to zmienne pole elektryczne jest pokazane w czterech punktach, leżących na okręgu o promieniu r , mniejszym od promienia okładki R

Interpretacja „prądu przesunięcia”

Chwilowo podczas włączenia baterii w obwodzie popłynie prąd. Dlaczego?

- ♦ Poruszające się ładunki elektryczne (prąd) indukują magnetyczne pole
- ♦ Ładunki elektryczne indukują pole elektryczne
- ♦ Pole elektryczne zmienia się gdy ładunek zmienia się na kondensatorze
- ♦ Zmieniające się pole elektryczne jest odpowiednikiem prądu – prądu przesunięcia I_D

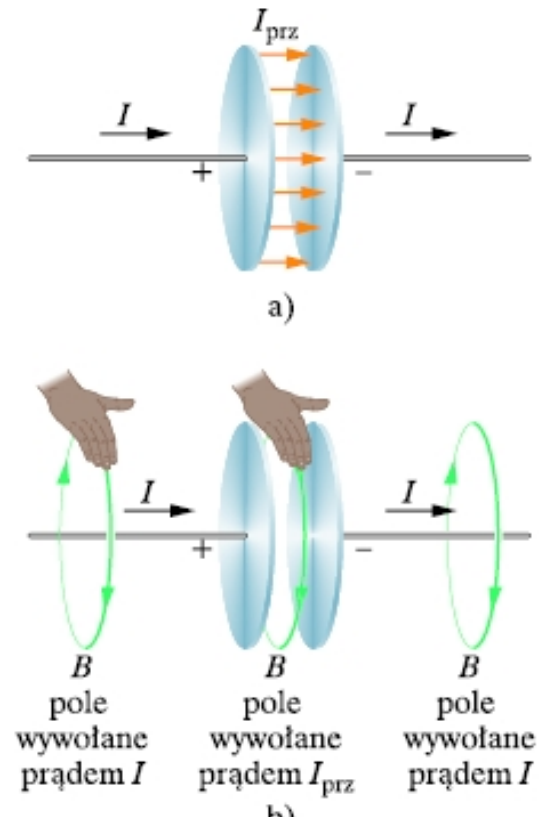


$$Q = CV = \left(\epsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed) = \epsilon_0 AE$$

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Interpretacja „prądu przesunięcia”

Rys. 32.16. a) Prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} między okładkami kondensatora, który jest ładowany prądem o natężeniu I . b) Reguła prawej dłoni, służąca do wyznaczania kierunku indukcji magnetycznej pola wokół przewodu, w którym płynie rzeczywisty prąd (jak po lewej stronie rysunku), wskazuje również kierunek indukcji magnetycznej pola wokół prądu przesunięcia (jak w środku rysunku)



Równania Maxwell'a (postać różniczkowa)

Prawo Gauss'a

$$\text{I} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = q$$

Prawo Gauss'a

$$\text{II} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Prawo Ampera

$$\text{III} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Prawo Ampera-Maxwell'a

$$\text{IV} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

indukcja pola
elektrycznego

natężenie pola
elektrycznego

wektor polaryzacji
elektrycznej w ośrodku

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{lub} \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

indukcja pola
magnetycznego

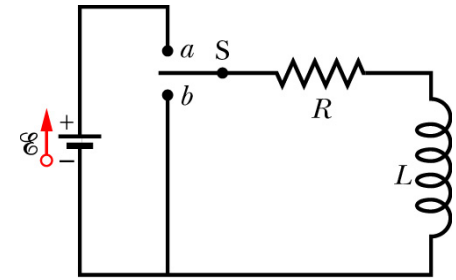
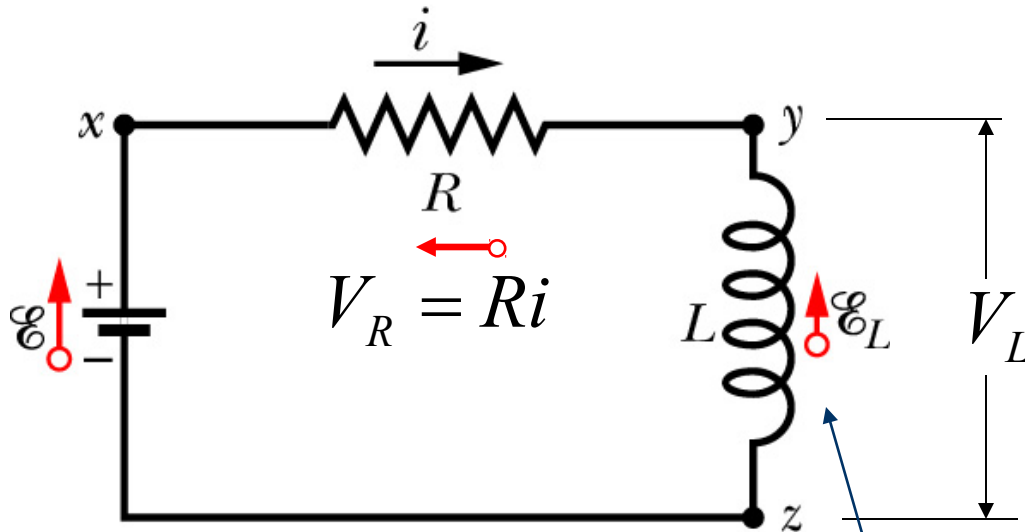
natężenie pola
magnetycznego

wektor polaryzacji
magnetycznej w ośrodku

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad \text{lub} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

wektor gęstości prądu

Obwód *RL*



Co się stanie gdy przełącznik włączymy do pozycji *a* ?

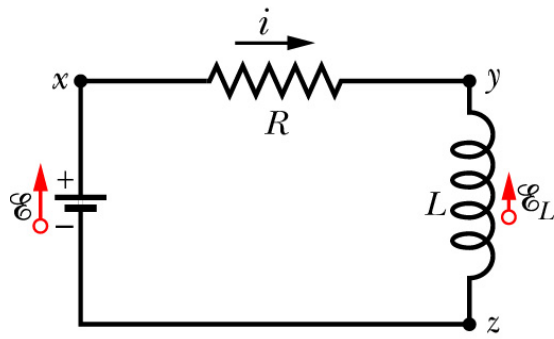
Nagłe włączenie ogniwa powoduje przepływ prądu – prąd jednak nie „narasta” w obwodzie natychmiast – rośnie stopniowo. Dlaczego?

Z II prawa Kirchhoffa :
Suma spadków potencjałów w zamkniętym obwodzie + suma sił elektromotorycznych = 0

$$\mathcal{E} + V_R + V_L = 0$$

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Na skutek zmieniającego się prądu *i* (a więc zmienia się pole magnetyczne w cewce) indukuje się SEM samoindukcji $\mathbf{E}_L$, która przeciwstawia się wzrostowi prądu w obwodzie.



Obwód *RL*

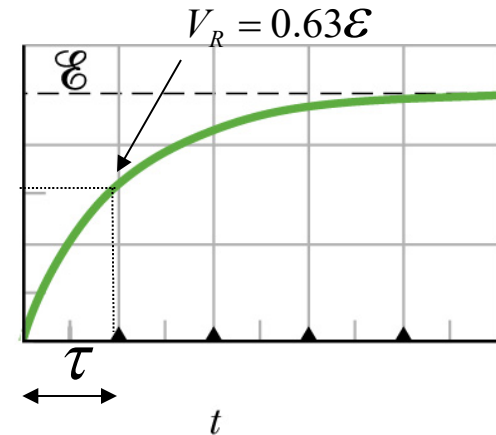
równanie różniczkowe liniowe I rzędu

$$\mathcal{E} = iR + L \frac{di}{dt}$$

oto rozwiązanie

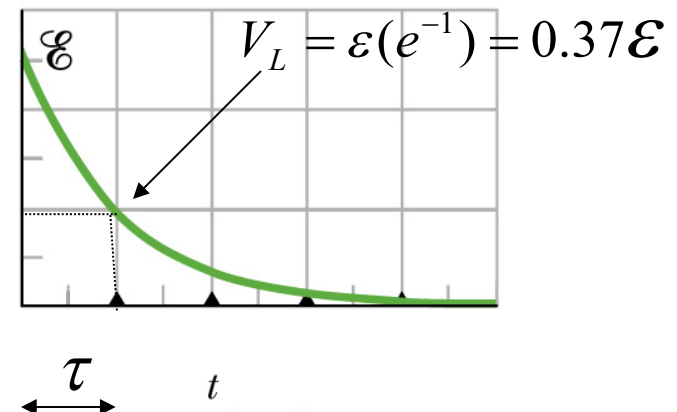
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

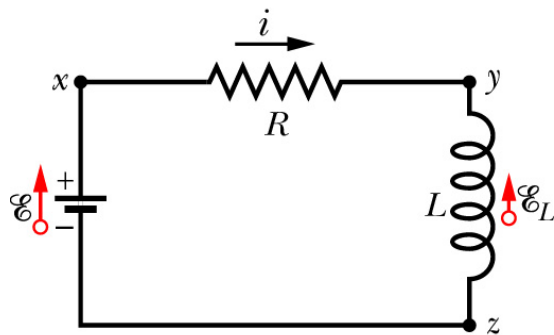
$$Ri = V_R(\text{V})$$



$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$L \frac{di}{dt} = V_L(\text{V})$$





Obwód *RL*

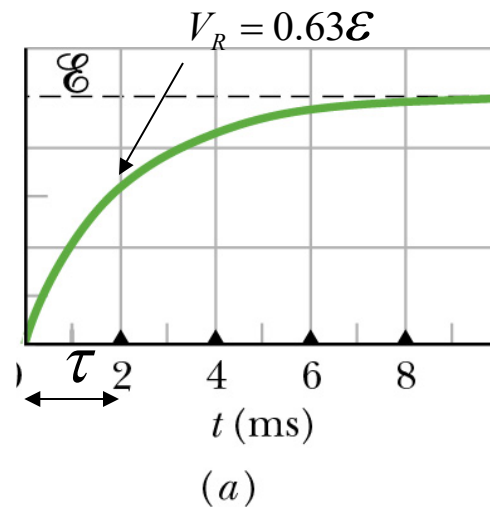
równanie różniczkowe liniowe I rzędu

$$\mathcal{E} = iR + L \frac{di}{dt}$$

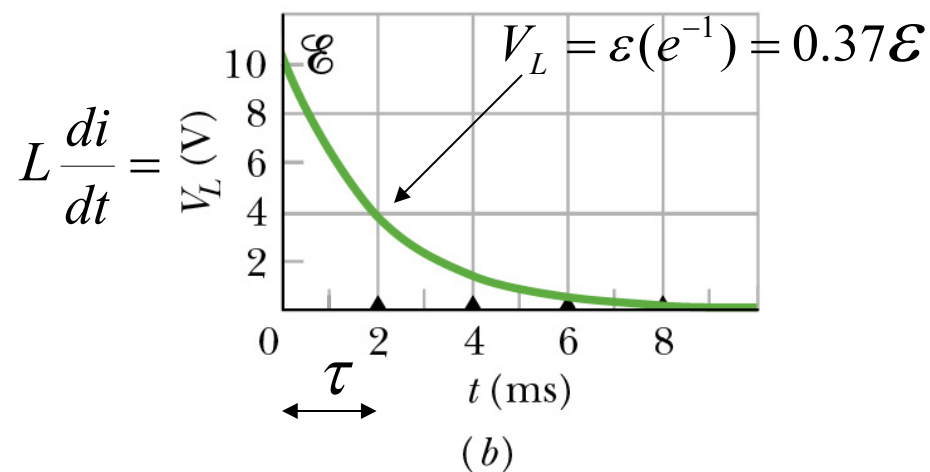
oto rozwiązanie

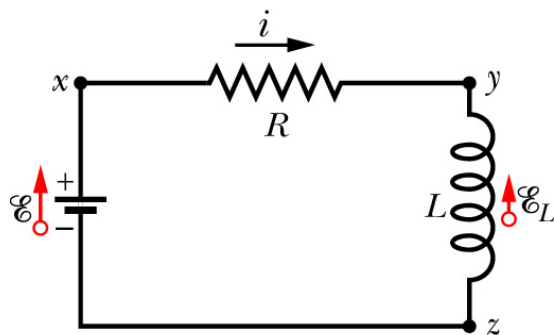
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

$$Ri = V_R(\text{V})$$



$$\tau = \frac{L}{R}$$





$$\mathcal{E} = iR + L \frac{di}{dt}$$

Energia pola magnetycznego

$$\mathcal{E} i = i^2 R + Li \frac{di}{dt}$$

szybkość z jaką energia
jest dostarczana do
obwodu z ogniwa (moc)

$$\mathcal{E} i = \mathcal{E} \frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Energia
magazynowana w
polu magnetycznym
cewki

szybkość z jaką
energia jest tracona
w postaci ciepła na
oporniku R (moc)

szybkość z jaką energia
magazynowana w polu
magnetycznym cewki

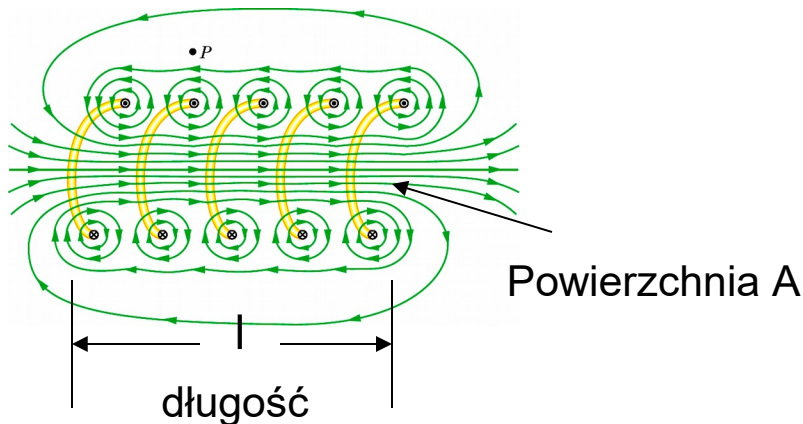
$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

$$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2$$

Gęstość energii pola magnetycznego

Ilość energii
zmagazynowanej w
polu magnetycznym
cewki o indukcyjności
 L

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2$$



Definiujemy gęstość energii jako :

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

$$u_B = \frac{\frac{1}{2} Li^2}{Al} = \frac{L}{l} \frac{i^2}{2A}$$

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$

$$u_B = \frac{\frac{1}{2} Li^2}{Al} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2$$

$$B = \mu_0 ni$$

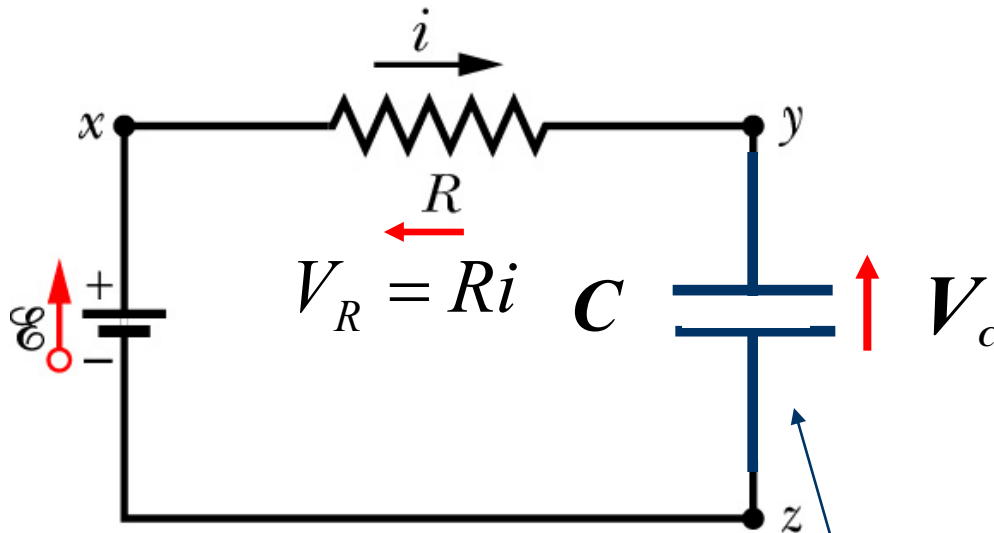
Okazuje się, że taka definicja
gęstości energii pola
magnetycznego obowiązuje
dla każdego pola $\mathbf{B}$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Porównaj gęstość energii dla
pola elektrycznego

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Obwód RC

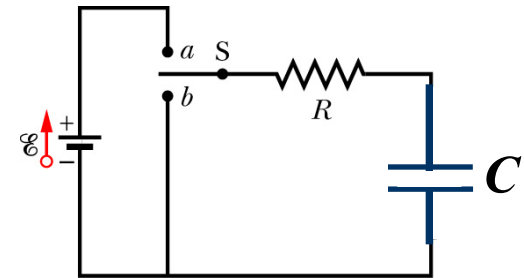


Z II prawa Kirchhoffa :
Suma spadków potencjałów w
zamkniętym obwodzie = 0

$$\mathcal{E} + V_R + V_C = 0$$

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

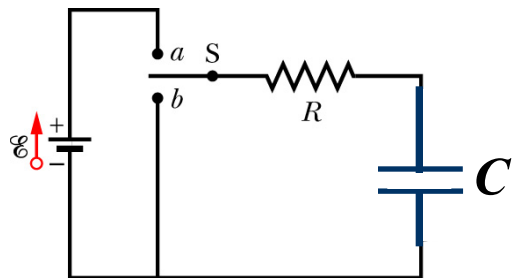
$$\mathcal{E} - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$



Co się stanie gdy przełącznik
włączymy do pozycji **a** ?

*Nagłe włączenie ogniwa
powoduje gromadzenie się
ładunku na kondensatorze –
ładunek jednak nie „narasta” na
okładkach natychmiast –
rośnie stopniowo. Dlaczego?*

Na początku płynie pewien prąd ładowania i do
momentu aż różnica potencjałów na kondensatorze
 V_C osiągnie wartość SEM ogniwa E .

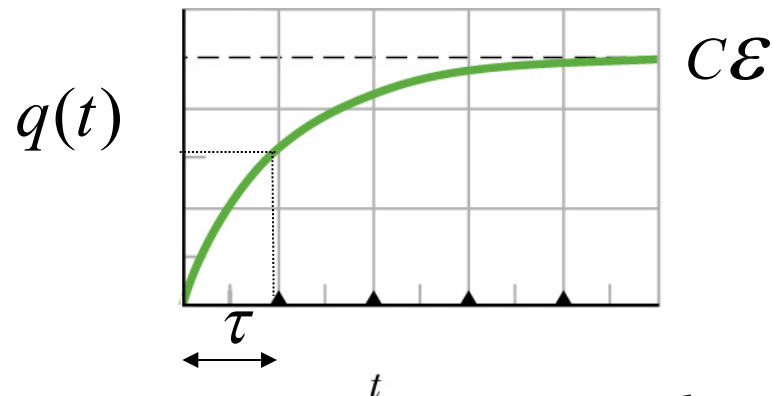


Obwód RC

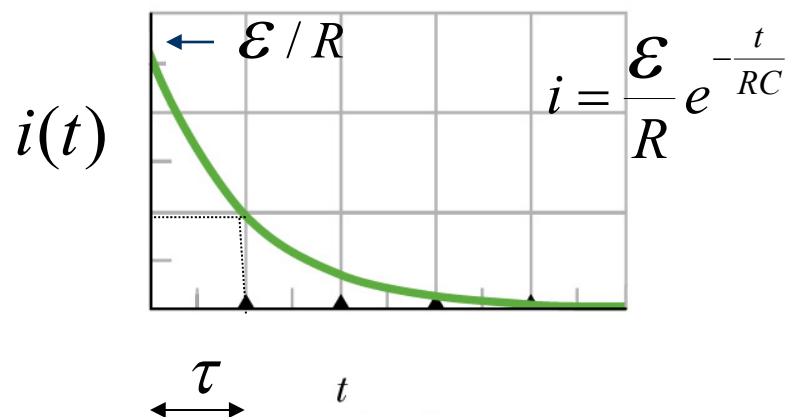
równanie $\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

oto rozwiązanie

$$q = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



$$\tau = RC \qquad i = \frac{dq}{dt}$$



mnożąc przez i

$$\mathcal{E} i = i^2 R + \frac{q i}{C}$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{q dq}{C dt} \quad \rightarrow \quad dU_c = \frac{q dq}{C}$$

energia pola elektrycznego $U_c = \int_0^{U_c} dU_c = \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$