# Praca

Rozważmy sytuację, gdy w krótkim czasie działająca siła $\vec{F}$ spowodowała przemieszczenie ciała o bardzo małą wielkość $\Delta s$

**Pracę** wykonaną przez siłę przy takim przemieszczeniu definiujemy jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora przemieszczenia

$$\boxed{\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}}$$

Jednostką pracy jest 1N·m=1J (dżul)

## Sens fizyczny pracy

Jeżeli wypadkowa siła działająca na ciało jest różna od zera, to wiemy, że prowadzi ona do przyspieszenia ciała, czyli do zmiany prędkości ciała.

Iloczyn skalarny $\vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ jest równy zmianie wielkości fizycznej, którą nazywamy energią kinetyczną ciała. $\left(E_k = \frac{mv^2}{2}\right)$

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \Delta E_k = E_{kk} - E_{kp}$$

gdzie $E_{kp}$ jest energią kinetyczną początkową a $E_{kk}$ - końcową

W równaniu będącym definicją pracy występuje iloczyn skalarny. Zatem wykonana praca zależy <u>nie tylko od działającej siły i przemieszczenia, lecz także od kąta pomiędzy wektorem siły i wektorem przemieszczenia</u>.

Widzimy tutaj trudność zdefiniowania pracy, gdy przemieszczenie występuje w długim czasie działania siły (wtedy może zmieniać się wartość siły oraz jej kierunek względem przemieszczenia)

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = F \Delta s \cos \alpha$$

Zauważmy, że jeśli na jakimś odcinku kąt między wektorem działającej siły, a wektorem przemieszczenia wynosi 90° to praca na tym odcinku nie jest wykonywana, czyli wynosi 0.

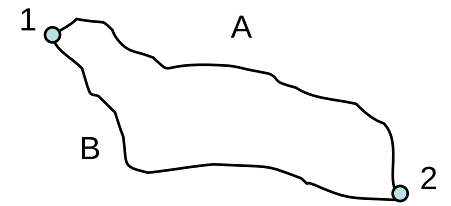
Gdy przemieszczenie następuje o skończoną wartość, powiedzmy od punktu 1 do punktu 2 (patrz rysunek), wtedy tor po którym nastąpiło przemieszczenie możemy podzielić na tak małe części, że możemy przyjąć, iż przemieszczenie na każdej z tych części ma stały kierunek, a siła ma stały kierunek i stałą wartość. Pracę wykonaną pomiędzy punktem 1, a punktem 2 możemy wyrazić wtedy jako sumę wszystkich prac wykonanych na poszczególnych małych częściach toru:

$$\boxed{W_{1-2} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i}$$

# Siły zachowawcze i niezachowawcze

Dla pewnych rodzajów sił praca przez nie wykonana nie zależy od kształtu toru po jakim porusza się ciało. Dla przypadku na rysunku poniżej oznacza to, że praca wykonana na drodze A będzie taka sama jak praca wykonana na drodze B. Nie ma znaczenia tu ani kształt toru ani całkowita długość drogi.

Siły, dla których praca nie zależy od drogi, po której następuje przemieszczenie ciała, a jedynie od położenia początkowego i końcowego, nazywamy siłami **zachowawczymi**. Pozostałe określamy mianem sił **niezachowawczych**.




Dla sił zachowawczych (oznaczmy je przez $F_z$) możemy wprowadzić pewną funkcję, która będzie charakteryzowała ciało w punkcie 1 i w punkcie 2, a praca tej siły przy przemieszczeniu od punktu 1 do 2 będzie równa różnicy wartości tej funkcji w punkcie 1 i 2.

Tą funkcję nazywamy **energią potencjalną** ciała i ozn. $E_p$ .

$$W_{1-2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

(Szczegółowa postać wzoru na funkcję energii potencjalnej, będzie zależała od rodzaju siły zachowawczej)

Siły, które nie posiadają wyżej omówionej własności, nazywamy siłami niezachowawczymi (oznaczmy je przez $F_{nz}$) Przykładem siły niezachowawczej jest siła tarcia kinetycznego. Wartość tej siły jest równa:

$$F_T = fF_N$$

, gdzie *f* - współczynnik tarcia, $F_N$ – siła nacisku.

Siła ta jest styczna do toru i przeciwnie skierowana do przemieszczenia, więc praca tej siły zależy w sposób oczywisty od długości drogi.

# Moc

**Moc** jest szybkością wykonywania pracy. **Średnia moc** (np. dostarczana przez jakieś urządzenie) jest równa całkowitej pracy wykonanej podzielonej przez całkowity czas w jakim ta praca została wykonana.

$$\boxed{\overline{P} = \frac{W}{t}}$$

Jednostką mocy jest 1J/s=1W (wat)

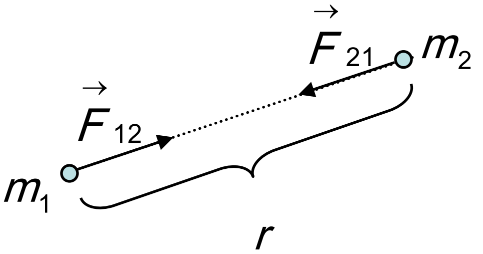
**Moc chwilowa** jest zdefiniowana jako stosunek pracy wykonanej w czasie $\Delta$t dla $\Delta$t dążącego do 0.

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{gdy} \quad \Delta t \to 0}$$

# Pole Grawitacyjne

**Prawo powszechnego** ciążenia opisuje siłę z jaką oddziałują dwie masy punktowe oddalone o r. Kierunek i zwrot **siły grawitacji**, bo tak ją określamy, jest przedstawiony na rysunku.

$$\boxed{F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$




*G* jest stałą grawitacji a *r* odległością między masami (w przypadku ciał kulistych – między środkami tych mas).

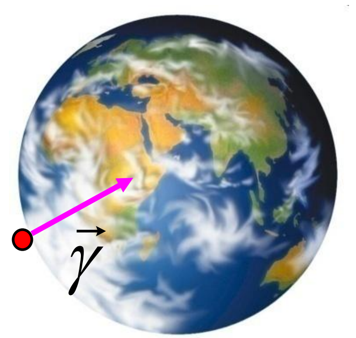
$$G \cong 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Możemy powiedzieć, że obiekt posiadający masę wytwarza wokół siebie **pole grawitacyjne** i za pośrednictwem tego pola oddziałuje na inny obiekt obdarzony masą, który znajduje się w pewnej od niego odległości. W takim przypadku wygodnie jest wprowadzić pewną wielkość, która będzie charakteryzowała to pole, a ciało będące przyczyną tego pola nazwać źródłem pola grawitacyjnego.

Jeżeli ciało o masie M jest źródłem pola i w tym polu umieścimy ciało o niewielkiej masie *m*, to możemy zdefiniować wielkość (wektorową), którą nazwiemy **natężeniem pola grawitacyjnego**:

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

Z powyższej definicji natężenia pola grawitacyjnego wynika, że ma ono taki sam kierunek i taki sam zwrot jak wektor siły grawitacji.




Ponieważ dla ciała na powierzchni Ziemi $F = G\frac{Mm}{R_Z^{\,2}} = mg$

to wartość natężenia pola grawitacyjnego jest równa przyspieszeniu grawitacyjnemu na powierzchni Ziemi: $\gamma = g = G\frac{M}{R^2}$

Siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą. Energia potencjalna ciała o masie m znajdującego się w polu grawitacyjnym Ziemi (lub innej planety) można wyrazić wzorem:

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$$

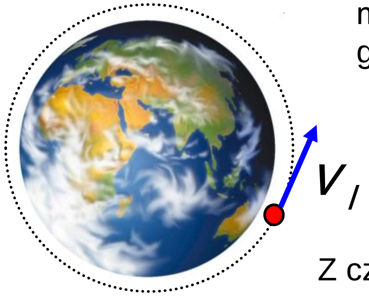
Przyjmujemy konwencję w ramach której energia potencjalna w nieskończenie dużej odległości ($r \to \infty$) wynosi 0.

Jeżeli ciało porusza się w małej odległości od powierzchni Ziemi, wtedy możemy posłużyć się przybliżonym wzorem na energię potencjalną w postaci:

$$\boxed{E_p = mgh}$$

gdzie h jest wysokością, na której znajduje się ciało liczonej względem powierzchni Ziemi lub innego, zbliżonego do powierzchni Ziemi (planety), poziomu odniesienia. **Należy pamiętać, że powyższe przybliżenie jest słuszne tylko gdy odległość h jest dużo mniejsza od odległości od środka Ziemi (*h*<<$R_z$)**

Ciało, któremu nadamy prędkość na powierzchni Ziemi może spaść na Ziemię, może zacząć okrążać Ziemię po orbicie o stałym promieniu lub opuścić zupełnie pole przyciągania ziemskiego. Prędkość jaką należy nadać ciału, by okrążało Ziemię po orbicie o stałym promieniu o promieniu zbliżonym do promienia Ziemi, nazywamy **pierwszą prędkością kosmiczną** aby opuściło pole przyciągania ziemskiego – **drugą prędkością kosmiczną**.



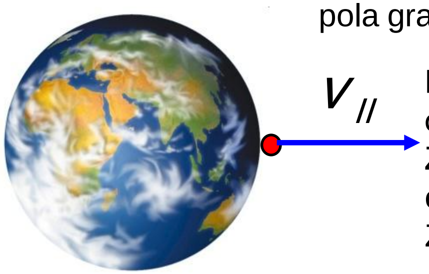

Wartość pierwszej prędkości kosmicznej możemy uzyskać przyrównując siłę grawitacji do siły dośrodkowej:

$$G\frac{mM_Z}{r^2} = \frac{mv_I^2}{r}$$

Z czego otrzymujemy dla $r = R_Z$:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} = 7.9 km/s$$

Wartość drugiej prędkości kosmicznej jest minimalna prędkością ucieczki z pola grawitacyjnego Ziemi.



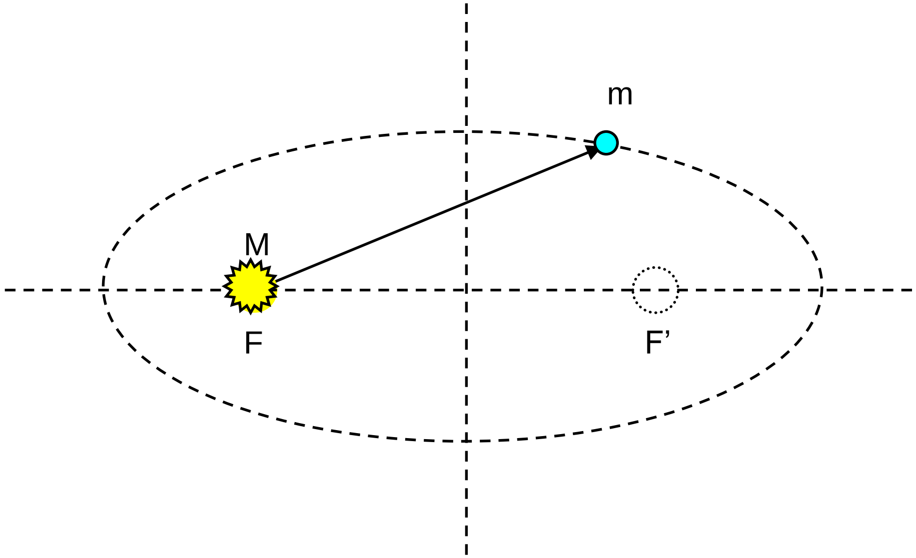

Energia kinetyczna ciała opuszczającego pole grawitacyjne Ziemi musi być co najmniej równa energii potencjalnej na powierzchni Ziemi

$$G\frac{mM_Z}{R_Z} = \frac{mv_{II}^2}{2}$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2 km/s$$

# Prawa Keplera

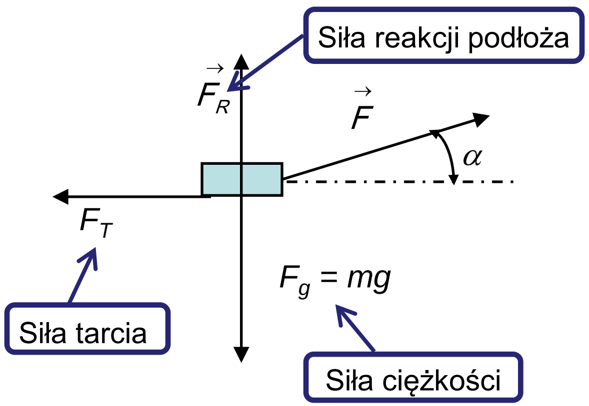
1. **Pierwsze prawo Kelpera**: Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce
2. **Drugie prawo Kelpera**: Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni orbity.
3. **Trzecie prawo Kelpera**: Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity.



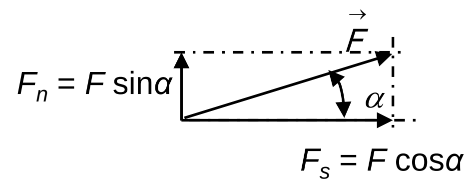
**Zadanie 1.** Ciało o masie m rozpędzono do prędkości v, działając stałą siłą *F*, jak na rys. Jaką drogę przebyło ciało i jaką pracę wykonała siła tarcia? Współczynnik tarcia wynosi f.

<u>Rozwiązanie</u>

Zaznaczamy siły działające na ciało:




Siłę F rozkładamy na składową poziomą $F_s$ i pionową $F_n$:




Składowe pionowe sił równoważą się:

$$F_R + F_n = F_R + F \sin\alpha = F_g = mg$$

Siła tarcia równa jest iloczynowi współczynnika tarcia i siły nacisku (równej sile reakcji podłoża) :

$$F_T = f \cdot F_R = f \cdot (mg - F \sin\alpha)$$

Składowe poziome sił nie równoważą się – w kierunku poziomym działa siła wypadkowa równa $F_s – F_T$, która na drodze *s* wykonuje pracę równą energii kinetycznej nabytej przez ciało:

$$W = \Delta E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$(F_s - F_T)s = \frac{mv^2}{2}$$

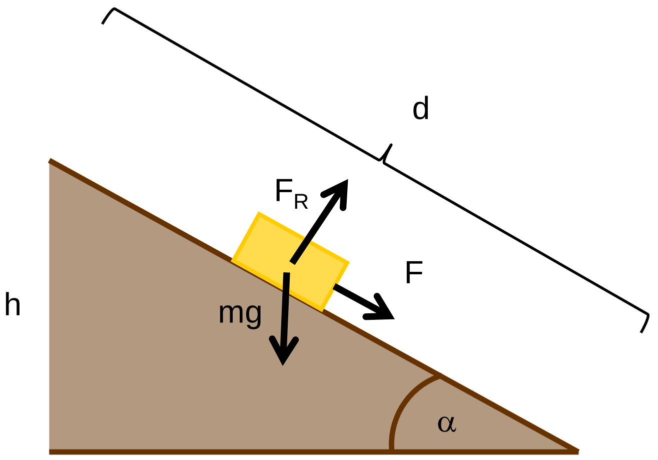
$$[F \cos\alpha - f(mg - F \sin\alpha)]s = \frac{mv^2}{2}$$

$$s = \frac{mv^2}{2[F \cos\alpha - f(mg - F \sin\alpha)]}$$

Praca wykonana przez siłę tarcia:

$$W_T = \vec{F}_T \cdot \vec{s} = F_T \cdot s \cdot \cos 180^0 = -f \cdot (mg - F \sin\alpha) \frac{mv^2}{2 \cdot [F \cos\alpha - f(mg - F \sin\alpha)]}$$

**Zadanie 2.** Ciało o masie m należy przesunąć ze stałą prędkością z podstawy na szczyt równi pochyłej, której wysokość wynosi h i długość d. Ciało jest pchane siłą równoległą do równi. Jaką pracę wykona taka siła. Tarcie zaniedbujemy.




Rozwiązanie

Wypadkowa siła równoległa do równi wynosi zero, ponieważ ruch po równi odbywa się ze stałą prędkością. Możemy to zapisać równaniem:

$$F - mg\sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

Z powyższych równań otrzymujemy wyrażenie na siłę F (która wykonuje pracę polegającą na przesuwaniu ciała)

$$F = \frac{mgh}{d}$$

Siła F działa w kierunku wzdłuż równi. Taki sam kierunek ma wektor przesunięcia ciała, co oznacza, że kąt pomiędzy siły i wektorem przesunięcia wynosi 0.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos 0 = Fd = mgh$$

Zwróćmy uwagę, że wynik ten jest identyczny do tego, jaki byśmy otrzymali przy podnoszeniu ciała na wysokość h bez równi pochyłej. Przy zastosowaniu równi siła potrzebna na uniesienie ciała jest jednak mniejsza.

**Zadanie 3.** Motocykl o mocy 75kW jedzie z prędkością 90km/h. Jaka jest siła ciągu silnika motocykla?

<u>Rozwiązanie</u>

Siła ciągu silnika motocykla jest skierowana poziomo podobnie jak jego przemieszczenie. Wychodząc z wyrażenie na pracę możemy zapisać siłę ciągu jako:

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta s}$$

gdzie $\Delta s$ jest elementem przemieszczenia, a $\Delta W$ jest pracą wykonaną na odcinku $\Delta s$ przez siłę F. Praca ta może być wyznaczona na podstawie znanej mocy motocykla.

$$\Delta W = P\Delta t$$

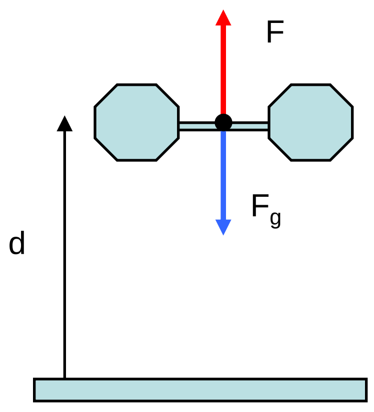
gdzie $\Delta t$ jest czasem działania siły F (i wykonywanie pracy $\Delta W$). Wstawiając wyrażenie na $\Delta W$ do poprzedniego równania mamy:

$$F = \frac{P\Delta t}{\Delta s} = \frac{P}{v}$$

Po podstawieniu danych liczbowych dostajemy

$$F = \frac{75kW}{25m/s} = 3000N$$

**Zadanie 4.** Rekordzista świata Hossein Rezazadeh podniósł podczas igrzysk olimpijskich ciężar o łącznej masie m=263kg na wysokość d=2.3 metra. Jaką pracę wykonała siła ciężkości podczas dźwigania ciężaru, a jaką wykonała siła przyłożona przez sztangistę?




Rozwiązanie

Pracę obliczamy z definicji:

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos\varphi$$

gdzie kąt $\varphi$ jest kątem pomiędzy wektorem $\vec{F}_g$, a wektorem $\vec{d}$

Kąt pomiędzy wektorem $F_g$ a wektorem d wynosi 180°, zatem:

$$W_g = m\vec{g} \cdot \vec{d} = mgd\cos 180^0 = -mgd = -5.93kJ$$

Praca wykonana przez siłę ciężkości jest więc ujemna

Nie znamy siły jaką Hossein Rezazadeh przyłożył do sztangi podczas bicia rekordu świata, ale wiemy, że sztanga była w spoczynku na początku i na końcu ruchu. Ponieważ całkowita praca (wykonana przez siłę ciężkości i przez sztangistę) jest równa zmianie energii kinetycznej sztangi możemy zapisać:

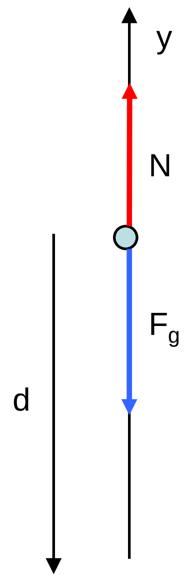
$$\Delta E_k = E_{kk} - E_{kp} = W_g + W_S = 0$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że praca wykonana przez sztangistę $W_s = -W_g$. Praca wykonana podczas bicia rekordu świata przez siłę przyłożoną przez sztangistę:

$$W_S = 5.93kJ$$

Zwróćmy uwagę, że praca wykonywana podczas trzymania sztangi nieruchomo nad głową ($d$ = 0) wynosi 0.

**Zadanie 5.** Winda o masie 300kg zjeżdża w dół z prędkości 3m/s. W pewnym momencie lina podtrzymująca windę zaczyna ślizgać się i w efekcie winda zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem $a = g/4$. Jaką pracę wykonała siła ciężkości podczas spadku windy na drodze 10m? Ile wynosi praca wykonana przez siłę naciągu liny podczas takiego spadku? Ile podczas takiego spadku wynosiła całkowita praca wykonana nad windą?




Rozwiązanie

Praca wykonana przez siłę ciężkości wynosi:

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos 0 = mgd = 29.4kJ$$

Siłę naciągu liny możemy otrzymać zapisując drugie prawo dynamiki Newtona dla windy w jednowymiarowym układzie odniesienia ze zwrotem w górę:

$$N - F_g = ma$$

$$N = ma + mg = m(a+g)$$

Podstawiając a=-g/4 (przyspieszenie windy jest skierowane przeciwnie do zwrotu przyjętego układu odniesienia):

$$N = m(-g/4 + g) = \frac{3}{4}mg$$

Praca wykonana przez siłę naciągu liny *N*: $W_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = \frac{3}{4}mgd\cos 180^0 = -\frac{3}{4}mgd = -22.05kJ$

Całkowita praca wykonana nad windą jest sumą pracy wykonanej przez siłę ciężkości i siły naciągu liny :

$$W = W_g + W_N = 29.4kJ - 22.05kJ = 7.35kJ$$

**Zadanie 6.** Zakładając, że masa Księżyca jest n razy mniejsza od masy Ziemi, obliczyć ile razy dłużej spada ciało z tej samej wysokości na Księżycu w stosunku do Ziemi. Przyjąć gęstość masy Ziemi i Księżyca jako jednakowe.

<u>Rozwiązanie</u>

Wysokości z jakich spada ciało są takie same. Możemy zapisać je jako drogi w ruch jednostajnie przyspieszonym:

$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad\qquad h = \frac{g_k {t_k}^2}{2}$$

Obliczając stosunek czasu spadania na Księżycu do czasu spadania na Ziemi mamy:

$$\frac{t_k}{t} = \sqrt{\frac{g}{g_k}} = \sqrt{\frac{G\,\frac{M}{R^2}}{G\,\frac{M_k}{R_k^2}}} = \sqrt{n\,\frac{R_k^2}{R^2}} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R_k}{R}$$

gdzie przez n oznaczyliśmy stosunek masy Ziemi do masy Księżyca. Stosunek mas jest równy stosunkowi promieniu obu ciał niebieskich w trzeciej potędze (wynika to wyrażenia na objętość kuli i założenia o jednakowej gęstości Ziemi i Księżyca):

$$\frac{M}{M_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^3 = n$$

Wykorzystując powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$\frac{t_k}{t} = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{6}}$$

**Zadanie 7.** Średnia odległość planety Wenus od Słońca wynosi $d_W$=108 208 926 km, Ziemi $d_Z$=149 597 890km, a Marsa $d_M$=227 936 637km. Obliczyć okresy obiegu Wenus i Marsa dookoła Słońca.

<u>Rozwiązanie</u>

Z trzeciego prawa Keplera dla Wenus i Ziemi wynika:

$$\frac{{d_W}^3}{{d_Z}^3} = \frac{{T_W}^2}{{T_Z}^2}$$

Podstawiając $T_Z$=1 rok mamy: $T_W = \sqrt{\frac{{T_Z}^2 {d_W}^3}{{d_Z}^3}} = 0.615 lat$

Stosując analogiczne rozumowanie dla Marsa mamy: $T_M = \sqrt{\frac{{T_Z}^2 {d_M}^3}{{d_Z}^3}} = 1.88 lat$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Człowiek pcha paczkę o ciężarze 270N po poziomej podłodze, siłą skierowaną w dół pod kątem 45° do poziomu, przesuwając ją ze stałą prędkością na odległość 9.1m. Współczynnik tarcia o podłoże wynosi 0.2. Jaką pracę wykona człowiek. **(Odp.:W = 614J)**
2. Kamień o masie 0,5 kg rzucono z wysokości 50 m pod pewnym kątem do poziomu z prędkością początkową $v_0$=10m/s. Kamień upadł na ziemię z prędkością 20m/s. Jaką pracę wykonała siła oporu powietrza ? **(Odp.:W=170J)**
3. Jaką pracę należy wykonać, aby przesunąć o 2 metry skrzynię o masie 1000 kg po równi pochyłej o kącie nachylenia 45°. Zaniedbać tarcie skrzyni o równię. **(Odp.:W = 13.9kJ)**
4. Oblicz pracę jaką musi wykonać człowiek chcący przesunąć ciało o masie m=100 kg wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia 30° na wysokość 10m. Współczynnik tarcia ciała o równię wynosi f=0.1. Jaka część pracy została zużyta na pokonanie siły tarcia **(Odp.:W = 11.5kJ, z czego 14.8% zostało zużyte na pokonanie tarcia)**
5. Ciężar o masie m wiszący na sznurku zostake spuszczony z wysokości d pionowo w dół ze stałym przyspieszeniem równym g/4. Jaką pracę wykonała lina? **(Odp.:W = -3Mgd/4)**
6. Osioł ciągnie wóz pod górę, której zbocze nachylone jest pod kątem $\alpha$ do poziomu. Masa sań wynosi M, a poruszają się one ze stałą prędkością v. Z jaką mocą pracuje osioł ciągnąc wóz pod górę. Współczynnik tarcia kół wozu o podłoże wynosi f. **(Odp.: $P = Mgv(\sin\alpha + f\cos\alpha)$)**
7. Podróżnik o masie 75 kg i niosący plecak o masie 25 kg w czasie 2 godzin pokonał przełęcz wznosząc się przy tym o 700m. Jaką pracę wykonał podróżnik i jaka była jego średnia moc? **(Odp.:W = 686kJ, P = 95.3W)**
8. Człowiek o masie 80kg wbiega na schody wznosząc się o 4m co 3 sekundy. Jaką średnią moc zużywa człowiek? **(Odp.:P = 1045W)**
9. Elektrownia wodna wykorzystuje 75% energii kinetycznej spadającej z wodspadu wody. Wodospad ma wysokość 100m i przepływa przez niego w każdej sekundzie 1200$m^3$ wody. Jaką moc produkuje elektrownia? **(Odp.:P=$8.8\cdot10^5$ kW)**
10. Siła potrzebna do ciągnięcia przyczepy samochodowej ze stałą prędkością jest proporcjonalna do jej prędkości. Jaka moc jest potrzebna do ciągnięcia przyczepy ze stałą prędkością równą 12km/h, jeśli do ciągnięcia przyczepy z prędkością 4 km/h potrzebna jest moc 7360W? **(Odp.:P = 66.2kW)**
11. Oblicz masę Ziemi przyjmując jej promień r=6370km. **(Odp.:$M_Z$= $5.96\cdot10^{24}$kg)**
12. Z jaką siłą przyciągają się dwa lotniskowce, każdy o masie 100 tysięcy ton, oddaleone o 100m od siebie? **(Odp.:F=66.7N)**
13. Jaka jest wartość przyspieszenia ziemskiego na szczycie góry Mont Everst (8848m). Średni promień Ziemi wynosi 6370km **(Odp.:*g* = 9.77m/s$^2$)**

14. Na kamień o masie 15kg, początkowo znajdujący się w spoczynku działa stała siła wypadkowa równa 5N. Oblicz prac wykonane przez tą siłę w pierwszej, drugiej i trzeciej sekundzie ruchu. **(Odp.:$W_1$ = 0.83, $W_2$ = 2.5, $W_3$ = 4.2J)**
15. Z jakiej wysokości musiałby spaść samochód aby miał energię kinetyczną równą energii jaką ma jadąc z prędkością 100km/h?. **(Odp.: $h$ = 39m)**
16. Jak zależy od szerokości geograficznej wartośc przyspieszenia ziemskiego jeśli wartość na równiku wynosi $g_0$? **(Odp.: Na skutek działania siły odśrodkowej przyspieszeni ziemskie zależy od odległości od osi obrotu. Zależność od szerokości geograficznej wyraża się wzorem $g = g_0 - \omega^2 R \cos 2\varphi$, gdzie $R$ jest promieniem Ziemi o $\omega$ prędkością kątową jej obrotu)**
17. Jakiego przyspieszenia będą doznawać spadające swobodnie obiekty na planetoidzie o średnicy 30km? Zakładamy, że gęstość planetoidy jest taka sama jak gęstość Ziemi i że Ziemia ma średnicę 12740km. **(Odp.:g=2.3cm/s$^2$)**
18. Masa Księżyca wynosi 1/81 masy Ziemi. Stosunek promieni Księżyca i Ziemi wynosi 3/11. Z jakim przyspieszeniem spadają ciała tuż przy powierzchni Księżyca? **(Odp.: $a$ = 1,63m/s$^2$)**
19. W jakiej odległości od środka Ziemi znajduje się punkt, w którym natężenia pól grawitacyjnych Ziemi i Księżyca są równe co do wartości (wykorzystać dane z poprzedniego zadania)? Odległość Ziemia-Księżyc wynosi 384000 km **(Odp.: $x$ = 345600km)**
20. Dwie gwiazdy o masach m znajdujące się w odległości 2$r$ od siebie tworzą gwiazdę podwójną. Jaka jest prędkość kołowa obrotu gwiazdy podwójnej? **(Odp.:** $\omega = \sqrt{\dfrac{Gm}{4r^3}}$