PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

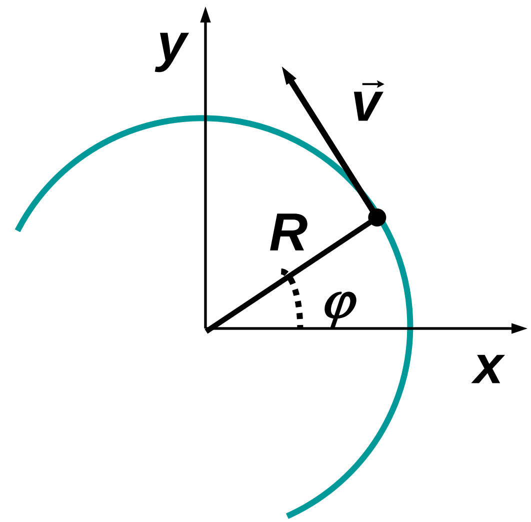
Ruch obrotowy

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ruch jednostajny po okręgu



W ruchu jednostajnym po okręgu prędkość punktu materialnego jest stała co do wartości, ale zmienia się jej kierunek. Kierunek prędkości jest zawsze styczny do okręgu będącego torem. Wartość prędkości jest stosunkiem drogi do czasu potrzebnego na pokonanie tej drogi. Położenie punktu wygodnie jest określać poprzez zakreślony przez niego kąt φ.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Wprowadza się też pojęcie **prędkości kątowej** ω jako stosunek kąta zakreślonego w czasie *t* do tego czasu. Prędkość kątowa jest więc kątem zakreślonym w jednostce czasu. Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Gdy prędkość kątowa jest stała to można wyrazić ją poprzez tzw. **okres obrotu** *T*, czyli czas potrzebny na wykonanie pełnego obrotu, któremu odpowiada droga 2πr.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Liczbę obrotów wykonanych w ciągu jednostki czasu nazywamy **częstotliwością**. Jest ona odwrotnością okresu T. Jednostką częstotliwości jest herc czyli odwrotność sekundy.

$$\omega = 2\pi\nu$$

Bryła sztywna

Opis ruchu ciała jako ruchu punktu materialnego, w którym pomija się rozmiary ciał, może być zbytnim uproszczeniem. Przykładem jest ruch obrotowy Ziemi, bądź odkształcenie ciała wykonanego z elastycznego materiału. Ziemię w ruchu dookoła Słońca można w przybliżeniu traktować jak punkt materialny, ale gdy rozważamy obrót Ziemi dookoła jej osi, takie podejście traci sens. Wprowadza się pojęcie **bryły sztywnej**.

Bryłą sztywną nazywamy takie ciało, którego części pozostają w niezmiennej wzajemnej odległości, niezależnie od sił działających na to ciało.

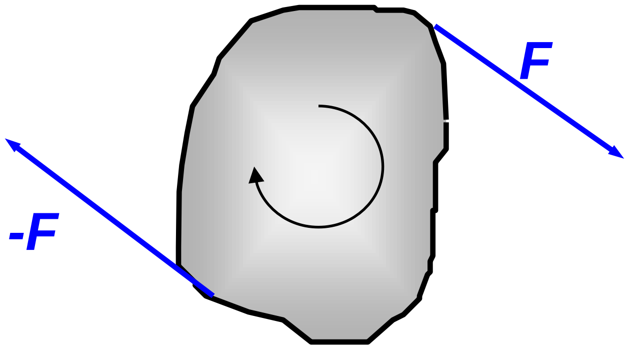
Jest to wciąż uproszczenie, ale stosowane gdy, można zaniedbać odkształcenia ciała. Bryła sztywna nie odkształca się, ale może się obracać.

Równowaga bryły sztywnej

Warunkiem równowagi punktu materialnego jest równoważenie się sił działających na niego.

$$\Sigma \vec{F}_i = 0$$

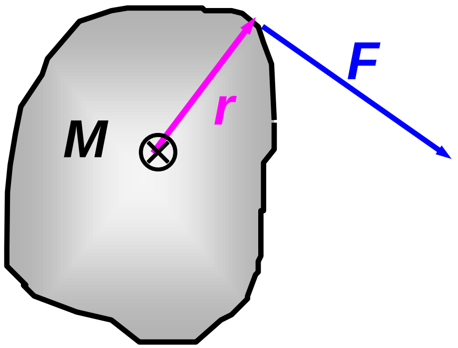
W przypadku bryły sztywnej jest to warunek niewystarczający. Dwie równe i przeciwnie skierowane siły działające na bryłę sztywną równoważą się. Ale gdy zaczepione są w różnych punktach ciała to może się ono pod ich wpływem obracać.



Wprowadza się więc dodatkowe pojęcie: moment siły.

Moment siły

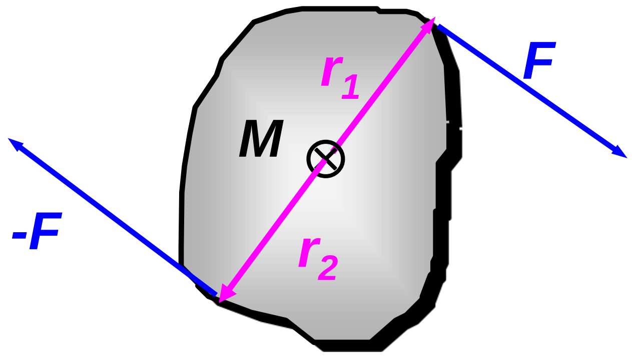
Momentem sił nazywamy iloczyn wektorowy ramienia i wektora siły.



moment siły: $\vec{M} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{F}$

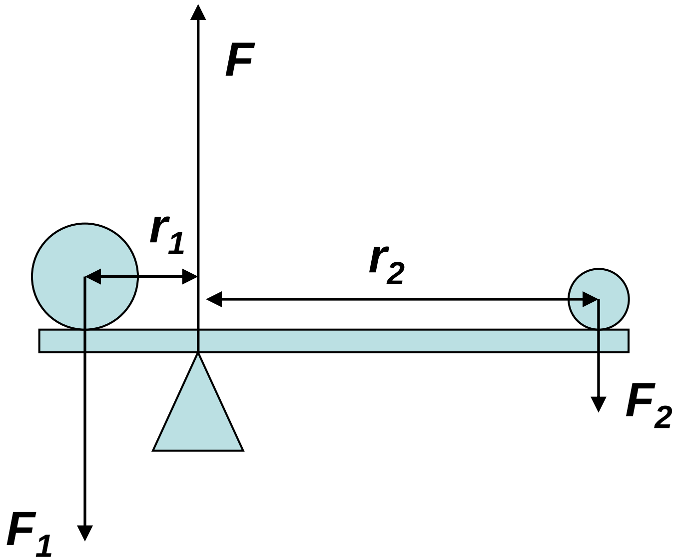
Moment siły określa się względem wybranego punktu. Ramieniem siły względem określonego punktu nazywamy wektor o początku w tym punkcie i końcu w punkcie przyłożenia siły.
Wymiarem momentu siły jest Nm (niuton razy metr).
W szczególnym przypadku gdy siła jest prostopadła do ramienia to: $M = rF$
Moment siły jest wektorem o kierunku prostopadłym do kierunku siły i promienia wodzącego.

Jeśli na bryłę działa więcej niż jeden moment siły to wypadkowy moment jest wektorową sumą momentów składowych. **Warunkiem równowagi bryły sztywnej jest równoważenie się sił <u>oraz</u> momentów sił.**



W pokazanym przykładzie (tzw. para sił) siły odejmują się mając przeciwne kierunki i ciało nie przemieszcza się w przestrzeni. Ale odpowiadające im momenty sił dodają się powodując obrót ciała.

Przykład – dźwignia dwustronna



F – siła podparcia; nie wpływa na obrót dźwigni

Warunek równowagi ze względu na obrót względem punktu podparcia dźwigni dwustronnej:

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

A ogólnie:

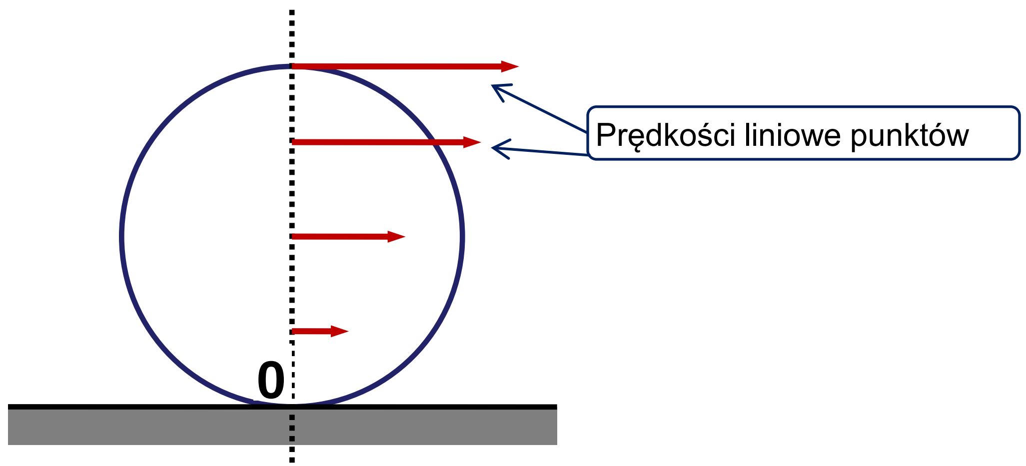
$$\Sigma \vec{M}_i = 0$$

Ruch bryły sztywnej

ruch → **postępowy (translacja)**

ruch → **obrotowy (rotacja)**

Przykład: toczenie bez poślizgu



Warunek na toczenie bez poślizgu: prędkość liniowa punktu styczności z podłożem *O* jest równa zeru.

Opis ruchu bryły sztywnej

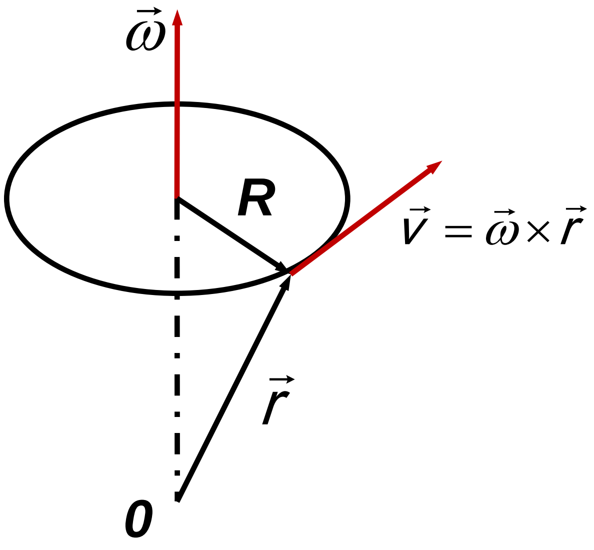
Ruch bryły sztywnej względem dowolnego układu odniesienia może być;
a. ruchem postępowym (bez obrotu)
b. ruchem obrotowym względem ustalonej osi obrotu
c. w ogólności ruch może być złożeniem ruchu postępowego i obrotowego, a oś obrotu może w trakcie ruchu zmieniać się.

Ruch postępowy opisujemy wykorzystując pojęcia: wektora wodzącego, prędkości chwilowej i przyspieszenia.

Natomiast **ruch obrotowy** opisujemy za pomocą pojęć: kąta obrotu φ i prędkości kątowej ω.

Zachodzi związek:

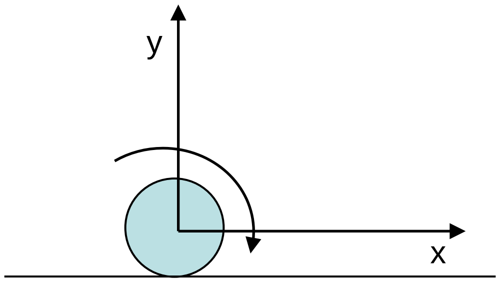
$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Przykład

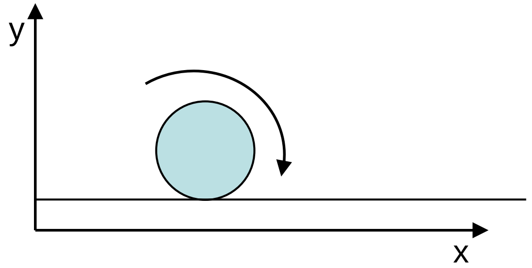
Opis ruchu nie jest jednoznaczny, zależy od układu odniesienia względem którego go opisujemy. Również rozłożenie ruchu bryły sztywnej na ruch postępowy i obrotowy może być różne. Przykładowo toczenie się walca po powierzchni bez poślizgu można rozpatrzeć na trzy sposoby:

a. W układzie związanym z osią obrotu mamy do czynienia z jednostajnym (ω = *const)* ruchem obrotowym.

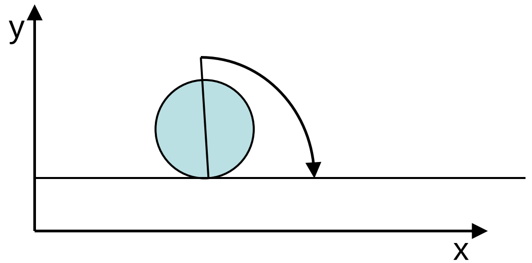


b. W układzie związanym z podłożem mamy do czynienia z jednostajnym (ω = *const)* ruchem obrotowym oraz przemieszczaniem się osi obrotu równolegle do podłoża z prędkością

v = ω*R (R – promień walca)*



c. Względem układu związanego z podłożem można opisać powyższy ruch również jako wyłącznie obrotowy. Mamy wówczas obrót dookoła **chwilowej osi obrotu** pokrywającej się z aktualnym odcinkiem styczności walca z podłożem:



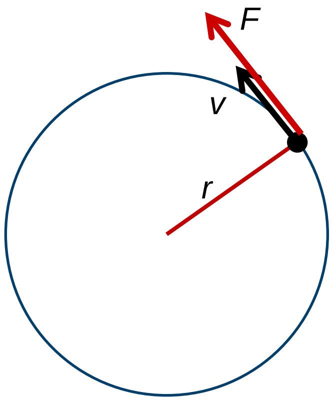
II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Punkt materialny porusza się po okręgu pod wpływem siły *F* w każdej chwili stycznej do toru. Taki ruch możemy opisać jako ruch postępowy albo jako ruch obrotowy.

Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego: $$F = m \cdot a \qquad (1)$$

Pod wpływem siły ciało porusza się z przyspieszeniem liniowym *a.* Związek między przyspieszeniem liniowym i kątowym:

$$a = \varepsilon \cdot r$$



Po wstawieniu do wzoru (1) i pomnożeniu obu stron równania przez *r* otrzymujemy:

$$Fr = mr^2 \cdot \varepsilon \qquad (2)$$

moment siły

moment bezwładności

przyspieszenie kątowe

Otrzymaliśmy zapis drugiej zasady ruchu obrotowego: przyspieszenie kątowe jest wprost proporcjonalne do momentu siły. Miarą bezwładności w ruchu obrotowym jest moment bezwładności.

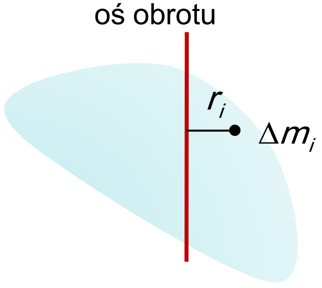
Moment bezwładności dla punku materialnego $I = mr^2$, gdzie *r* jest odległością od osi obrotu.
Moment bezwładności bryły sztywnej jest sumą momentów bezwładności poszczególnych punktów materialnych, z jakich składa się bryła.
II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej możemy zapisać:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Moment bezwładności

Tak jak w ruchu postępowym bezwładność bryły można scharakteryzować masą, tak w ruchu obrotowym względem określonej osi bryłę charakteryzuje się wielkością zwaną **momentem bezwładności** (względem określonej osi obrotu) .

Bryłę dzielimy na małe części o masie Δm_i (tak małe, że można je uważać za punkty materialne).



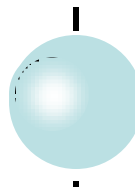
Moment bezwładności : $$I \overset{def}{=} \sum_i \Delta m_i r_i^2$$ gdzie r_i to odległość Δm_i od osi obrotu.

Im większy moment bezwładności tym trudniej zmienić ruch obrotowy bryły (zmienić jej prędkość kątową). Moment bezwładności jest tym większy, im dalej od osi jest rozłożona masa ciała.

Dane ciało ma jedną masę, ale może mieć wiele momentów bezwładności – moment bezwładności zależy od położenia osi obrotu, względem której ciało się obraca.

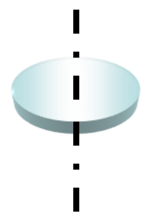
Momenty bezwładności

kula:



$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

tarcza:

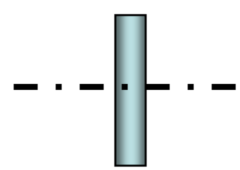


$$I = \frac{mR^2}{2}$$

tarcza:

$$I = \frac{mR^2}{4}$$

pręt:

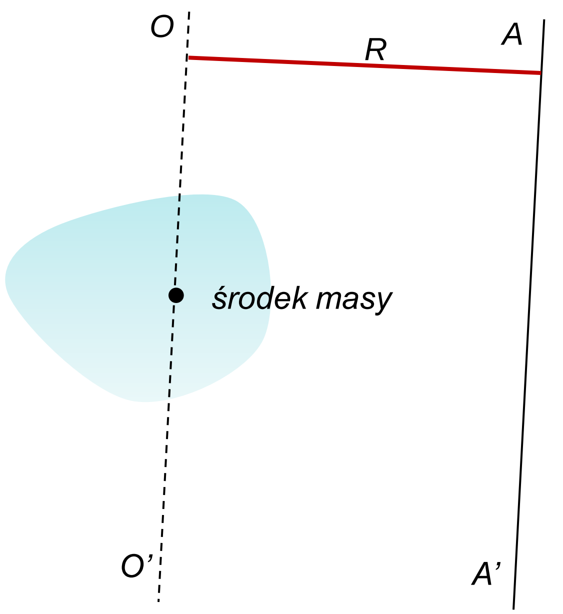


$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Twierdzenie Steinera

$$I = I_c + mR^2$$

Jeżeli znany jest moment bezwładności I_c względem osi przechodzącej przez środek masy bryły sztywnej to można znaleźć moment bezwładności tej bryły względem dowolnej, równoległej osi leżącej w odległości R.



I_c to moment bezwładności względem osi *OO'* przechodzącej przez środek masy,
I - moment bezwładności względem osi *AA'*

Energia kinetyczna ciała sztywnego

W ruchu postępowym bryły energia kinetyczna wyraża się podobnie jak energia kinetyczna punktu materialnego.

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v_c^2$$

Gdzie m to masa bryły a v_c to prędkość ruchu postępowego (prędkość środka masy).

W przypadku ruchu obrotowego różne punkty bryły poruszają się z różnymi prędkościami liniowymi. Energię kinetyczną należy więc wyrazić przez prędkość kątową jednakową dla wszystkich punktów:

$$E_k = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

W ogólności energia kinetyczna bryły jest sumą energii związanej z ruchem postępowym i ruchem obrotowym,

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_c \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_c^2$$

v_c to prędkość środka masy a I_c to moment bezwładności względem osi obrotu.

Moment pędu

W dynamice punktu materialnego ważną rolę odgrywa zasada zachowania pędu. W opisie ruchu obrotowego można zdefiniować podobną wielkość zwaną momentem pędu, która wiąże się z równie ważną zasadą zachowania.
Momentem pędu punktu materialnego względem określonego punktu w przestrzeni nazywamy wektor:

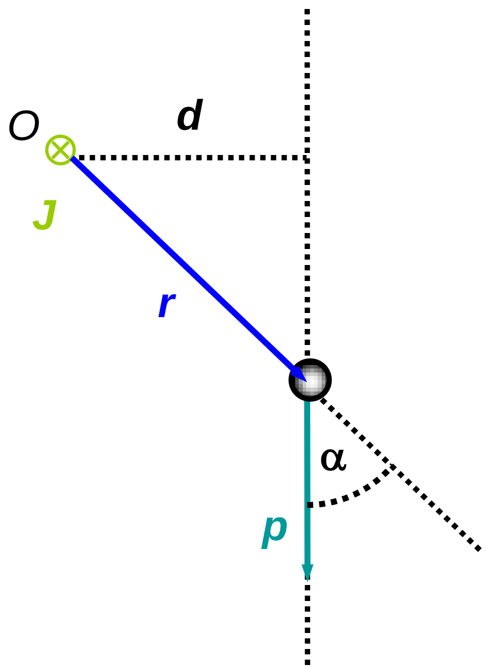
$$\vec{J} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

Momentem pędu bryły sztywnej nazwiemy sumę momentów pędu poszczególnych punktów składających się na bryłę.
Zasada zachowania momentu pędu:
jeśli na ciało nie działają z zewnątrz żadne momenty sił, lub gdy się one równoważą, to moment pędu ciała jest niezmienny w czasie.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i^{zewn} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{J} = const$$

przykłady

Moment pędu punktu materialnego poruszającego się ruchem prostoliniowym względem osi *O* prostopadłej do ekranu.

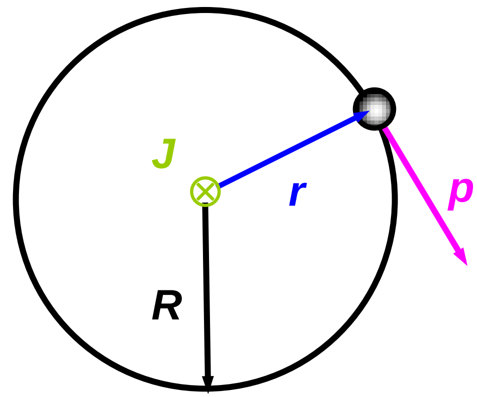


$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$J = mvr\sin\alpha$$

$$= mvd$$

Moment pędu punktu materialnego poruszającego się po okręgu.



$$\boldsymbol{J = mvR}$$

Moment pędu jest prostopadły do pędu i promienia wodzącego punktu.
Kierunek momentu pędu jest zgodny z kierunkiem osi obrotu.

Moment pędu

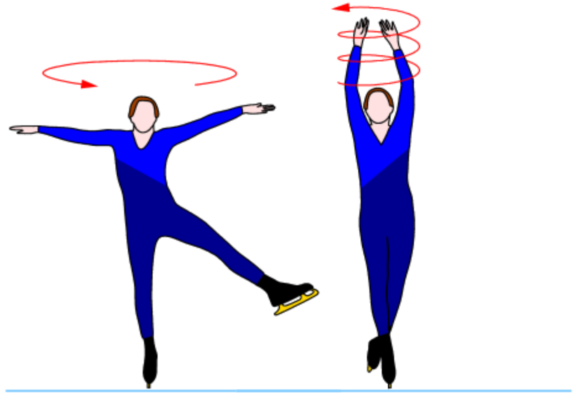
Jeżeli mamy do czynienia z obrotem dookoła ustalonej osi to moment pędu bryły wyraża się:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

Wynika to z tego, że mimo, że choć różne punkty bryły sztywnej mają różną prędkością to wszystkie one charakteryzują się tą samą prędkością kątową. Zasadę zachowania momentu pędu można więc wyrazić jako:

$$I\vec{\omega} = const$$

Przykładowo jeśli zmniejszy się moment bezwładności obiektu to musi on obracać się z większą prędkością kątową. Ponieważ jest to prawo wektorowe, to jeśli suma momentów sił jest równa zero, oś obrotu ma niezmienną orientację w przestrzeni.



Porównanie pojęć opisujących ruch postępowy i obrotowy.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
Masa m	Moment bezwładności $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$
Siła $\vec{F}$	Moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Prędkość liniowa $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0$	Prędkość kątowa $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
Przyspieszenie liniowe $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0$	Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0$
Pęd $\vec{p}$	Moment pędu $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$

II zasada dynamiki

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$
Zasada zachowania pędu: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{zewn} = 0 \quad \to \quad \vec{p} = const$	Zasada zachowania momentu pędu: $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i^{zewn} = 0 \quad \to \quad \vec{J} = const$

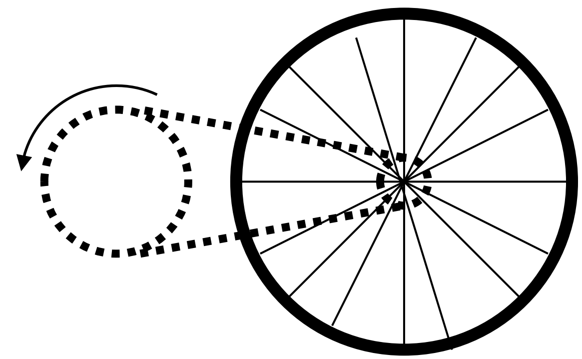
Energia kinetyczna

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

Zadanie 1.

Przekładnia rowerowa połączona jest z trybem tylnego koła za pomocą łańcucha. Koło zębate przekładni ma 54 zęby a koło trybu tylnego koła 9 zębów. Promień koła wynosi *r* = 36 cm a przekładnia obraca się z częstotliwością ν = 5 1/s. Z jaką prędkością jedzie rower.

Dane: $\begin{cases} r = 36\ cm \\ \nu = 0{,}5\ \dfrac{1}{s} \\ n_1 = 54 \\ n_2 = 18 \end{cases}$



Szukane: *v* = ?

Rozwiązanie:
Częstotliwość obrotu trybu tylnego koła wynosi: $\nu' = \dfrac{n_1}{n_2}\nu$

Okres obrotu trybu wraz z tylnym kołem wynosi : $T = \dfrac{1}{\nu'}$

Prędkość roweru jest równa prędkości liniowej punktu na obwodzie koła: $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu' = \dfrac{2\pi r n_1}{n_2}\nu$
(warunek na ruch bez poślizgu)

Odpowiedź: *v* = 3,4 m/s = 12,2 km/h

Zadanie 2

Oblicz przyspieszenie, z jakim stacza się po równi pochyłej o kącie nachylenia α pierścień o promieniu *r* i masie *m*. Przyjmij, że grubość pierścienia jest mała w porównaniu z *r*. Przyjmij też, że nie ma poślizgu ani rozpraszania energii.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania energii początkowa energia potencjalna *mgh* zamienia się podczas staczania na energię kinetyczną ruchu postępowego oraz energię kinetyczną ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment bezwładności pierścienia względem osi przechodzącej przez środek i prostopadłej do płaszczyzny pierścienia wynosi:

$$I = mr^2$$

Mamy też związki:

$$\omega r = v$$
$$h = l \sin\alpha$$

Stąd:

$$gl \sin\alpha = v^2$$

W ruchu jednostajnie przyspieszonym:

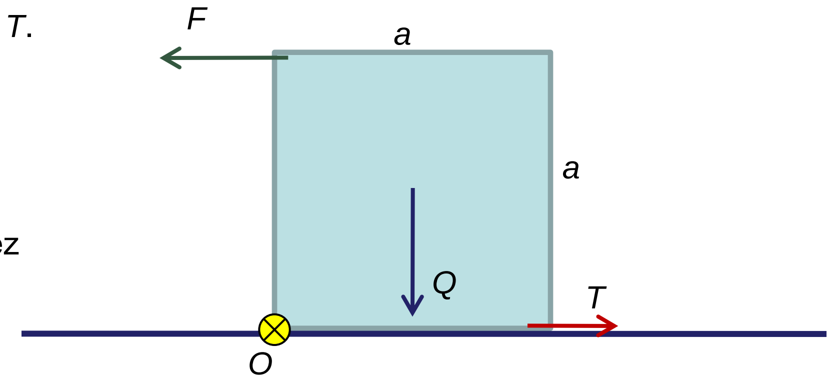
$$v = at$$
$$s = \frac{at^2}{2}$$
$$v^2 = 2as$$

Ostatecznie:

$$a = \frac{g \sin\alpha}{2}$$

Jest to dwa razy mniej niż w przypadku ześlizgiwania się bez tarcia. Wówczas zeruje się bowiem energia kinetyczna ruchu obrotowego.

Zadanie 3
Jaki musi być współczynnik tarcia, aby sześcienny klocek o boku *a* pod działaniem siły przyłożonej do górnej krawędzi mógł się przesuwać bez przewracania?



Aby ruch mógł się rozpocząć siła *F* musi być większa od siły tarcia *T*. Maksymalna wartość współczynnika tarcia spełnia warunek:

$$F = f_{max} Q \Rightarrow f_{max} = \frac{F}{Q} \qquad (1)$$

Rozważmy teraz momenty sił względem osi *O* przechodzącej przez dolną krawędź sześcianu. Moment siły tarcia równy jest zeru. Moment siły *F* próbuje przewrócić sześcian, moment siły ciężkości *Q* przeciwdziała temu.

Moment siły *F:* $M_F = Fa$ Moment siły *Q:* $M_Q = Q\frac{a}{2}$

Aby sześcian nie przewrócił się musi zachodzić nierówność*:* $M_F < M_Q$

$$Fa < \frac{Qa}{2} \Rightarrow F < \frac{Q}{2}$$

Do nierówności wstawiamy wzór (1) na siłę F i otrzymujemy:

$$f_{max} Q < \frac{Q}{2} \Rightarrow f_{max} < \frac{1}{2}$$

Odp.: współczynnik tarcia musi być mniejszy od ½.

Zadanie 4
Tarcza obracająca się swobodnie wokół pionowej osi ma moment bezwładności I = 2 kg·m^2. Na brzeg tarczy wskakuje żaba o masie m = 100 g. Powoduje to zmniejszenie prędkości kątowej n = 1,2 raza. Jaki jest promień tarczy? Rozmiary żaby można pominąć.

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że początkowy moment pędu układu jest równy końcowemu momentowi pędu układu:

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_k \qquad (1)$$

Początkowy moment pędu tarczy jest równy: $\vec{J}_0 = I\vec{\omega}_0$

Końcowy moment pędu tarczy z żabą jest równy: $\vec{J}_k = (I + I_{\dot{z}})\vec{\omega}_k$

Moment bezwładności żaby na brzegu tarczy: $I_{\dot{z}} = mR^2 \longrightarrow$ R – szukany promień

Zależność między prędkością kątową początkową i końcową: $\omega_0 = n\omega_k$

Do równania (1) wstawiamy powyższe równości: $nI\omega_k = (I + mR^2)\omega_k$

Po przekształceniu otrzymujemy wzór na promień tarczy:

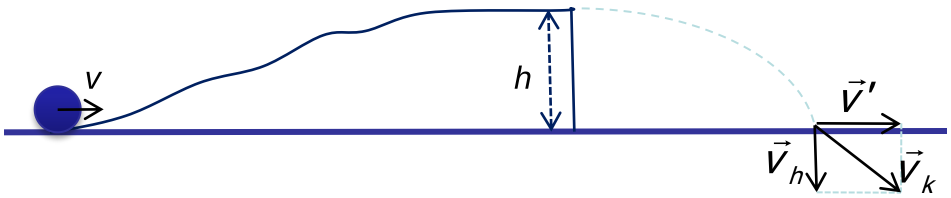
$$R = \sqrt{\frac{I(n-1)}{m}} = \sqrt{\frac{2(1,2-1)}{0,1}} = 2[m]$$

Odp.: Promień tarczy jest równy 2 m.

Zadanie 5
Na stok o poziomym wierzchołku wtacza się bez poślizgu kula, która następnie spada na ziemię. Wysokość stoku wynosi *h* a prędkość początkowa kuli *v*. Oblicz z jaką prędkością liniową kula spada na ziemię.

Energia kinetyczna początkowa kuli:

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$



Moment bezwładności kuli: $I = \frac{2}{5}mr^2$

Prędkość kątowa w ruchu bez poślizgu: $\omega = \frac{v}{r}$

Czyli: $E_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mr^2v^2}{2r^2} = \frac{7}{10}mv^2$

Energia potencjalna:

Na szczycie stoku energia kinetyczna kuli będzie wynosić: $\frac{7}{10}mv^2 - mgh = \frac{7}{10}mv'^2 \Rightarrow v'^2 = v^2 - \frac{10}{7}gh$

v' – prędkość pozioma kuli, która nie ulegnie zmianie w czasie spadania na ziemię

W czasie lotu prędkość kątowa kuli jest niezależna od prędkości liniowej środka masy. Prędkość kątowa nie ulega zmianie, a prędkość liniowa rośnie.

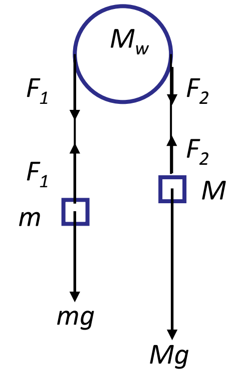
Pionowa składowa prędkości końcowej w rzucie poziomym wynosi: $v_h = \sqrt{2gh}$

Prędkość końcowa jest sumą wektorów prędkości poziomej i prędkości pionowej:

$$v_k = \sqrt{v^2 - \frac{10}{7}gh + 2gh} = \sqrt{v^2 + \frac{4}{7}gh}$$

Zadanie 6

Dwa ciężarki o masach m = 1 kg i M = 4 kg połączone są nicią przerzuconą przez bloczek w kształcie walca. Masa walca wynosi M = 2 kg. Zakładamy, ze nić nie ślizga się po powierzchni walca, opory w osi walca pomijamy. Oblicz przyspieszenie ciężarków i siłę naciągu nici, na których wiszą ciężarki: F_1 i F_2.



Na każdy z ciężarków działają dwie siły: ciężkości i naciągu nici.
Z drugiej zasady dynamiki :

$$ma = F_1 - mg \qquad (1)$$

$$Ma = Mg - F_2 \qquad (2)$$

gdzie a to przyspieszenie ciężarków (założyliśmy, że ciężarek M porusza się w dół).
Na bloczek działają dwie siły F_1 i F_2.
Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy: $F_2R - F_1R = I \cdot \varepsilon$ (3)

gdzie ε to przyspieszenie kątowe bloczka, a $I = \frac{1}{2}M_wR^2$ to moment bezwładności walca.

Jeśli nić nie ślizga się po powierzchni walca, to: $\varepsilon = \frac{a}{R}$

Wstawiając tę wartość do równania (3) otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi: a, F_1 i F_2.
Wyznaczając z (1) i (2) F_1 i F_2:

$$F_1 = ma + mg$$

$$F_2 = Mg - Ma$$

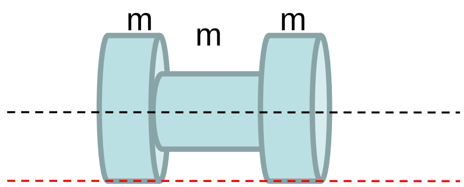
i wstawiając do (3) otrzymujemy: $MgR - maR - maR - mgR = \frac{1}{2}M_wRa$

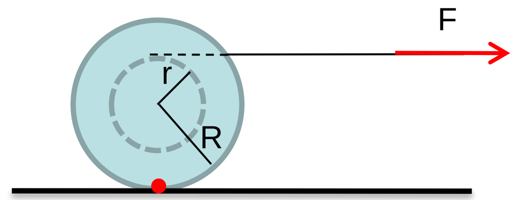
Stąd:

$$a = \frac{2g(M-m)}{M_w + 2M + 2m} = 5\frac{m}{s^2}$$

$$F_1 = \frac{mg(M_w + 4M)}{M_w + 2M + 2m} = 15N \qquad F_2 = \frac{Mg(M_w + 4m)}{M_w + 2M + 2m} = 20N$$

Zadanie 7
Na szpulkę zbudowaną z trzech walców o masach *m* oraz promieniach *r* i *R* nawinięto nitkę. Za koniec nitki ciągnie pozioma siła *F*. Jakie jest przyśpieszenie liniowe środka masy szpulki, która toczy się bez poślizgu?





Z II zasady dynamiki: $M = \varepsilon I \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{M}{I}$

Przyspieszenie liniowe środka masy: $a = \varepsilon R = \dfrac{M}{I} R$

Na szpulkę działa moment siły względem chwilowej osi obrotu, która znajduje się w punkcie styku szpulki z podłożem:

$$M = F(R + r)$$

Moment bezwładności *I* to moment bezwładności względem chwilowej osi obrotu (czerwona linia przerywana).
Najpierw obliczamy moment bezwładności szpulki względem osi symetrii:

$$I' = \frac{1}{2}\left(mR^2 + mr^2 + mR^2\right) = \frac{m\left(2R^2 + r^2\right)}{2}$$

Korzystając z twierdzenia Steinera obliczamy moment bezwładności *I*:

$$I = \frac{m\left(2R^2 + r^2\right)}{2} + 3mR^2 = \frac{m}{2}\left(8R^2 + r^2\right)$$

Ostatecznie przyspieszenie liniowe środka masy:

$$a = \frac{2FR(R + r)}{m\left(8R^2 + r^2\right)}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Przyjmując, że orbitą Ziemi w jej ruchu dookoła Słońca jest okrąg o promieniu $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m oblicz liniową prędkość Ziemi.

   Odp. prędkość Ziemi wynosi 30 km/s

2. Oblicz prędkość liniową punktu na równiku ziemskim podczas dobowego ruchu obrotowego wokół własnej osi. Promień Ziemi przyjmij jako R = 6370 km.

   Odp. prędkość punktu na równiku wynosi 463 m/s

2. Oblicz moment bezwładności hantli składającej się z cienkiego, nieważkiego pręta o długości d i z dwóch kul o masach m i promieniach r względem obu osi symetrii układu.

   Odp. $I_1 = \frac{4}{5} mr^2 \qquad I_2 = \frac{14}{5} mr^2 + \frac{1}{2} md^2 + 2mdr$

2. Jednorodna kula o masie m i momencie bezwładności I toczy się bez poślizgu z prędkością v. Oblicz moment pędu kuli względem jej środka.

   Odp. $L = \frac{2mv}{5}\sqrt{\frac{5I}{2m}}$

5. Dwa krążki o momentach bezwładności I_1 i I_2 obracają się wokół wspólnej, pionowej osi z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2. W pewnej chwili górny krążek spada na dolny i przylepia się do niego. Z jaką prędkością kątową obraca się powstały układ? O ile zmalała energia kinetyczna układu?

   Odp. $\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} \qquad \Delta E_k = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$

6. Jednorodny pręt o długości a i masie m zawieszono za końce poziomo na dwóch pionowych sznurkach. Do pręta przyczepiono ciężar $2m$ w jednej czwartej długości pręta. Znaleźć siłę naciągu każdego ze sznurków.

   Odp.: $F_1 = 2mg$, $F_2 = mg$

7. Oblicz czas staczania się kuli i walca z równi pochyłej o długości l i kącie nachylenia α, jeśli oba ciała puszczono z równi z zerową prędkością początkową.

   Odp.: $t_{kuli} = \sqrt{\frac{10l}{7g\sin\alpha}} \qquad t_{walca} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3l}{g\sin\alpha}}$

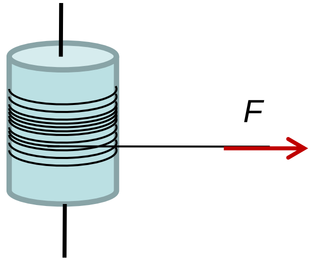
8. Na bloczku w kształcie pierścienia o masie M_W = 2 kg zawieszono nić obciążoną na końcach ciężarkami o masach m = 3 kg i M = 5 kg. Oblicz przyspieszanie klocków. Przyjmij, że ruch odbywa się bez oporów, a nić nie ślizga się po pierścieniu. *Odp. Przyspieszenie wynosi 2km/s^2.*

9. Z równi pochyłej o wysokości *h* = 7 m stacza się bez poślizgu kula o promieniu *r* = 10 cm. W chwili początkowej prędkość kuli była równa 0. Oblicz prędkość liniową środka masy kuli oraz prędkość kątową na dole równi. *Odp. v = 10 m/s; ω = 100 rad/s.*

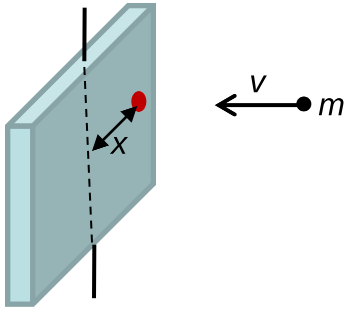
10. Tarcza obracająca się swobodnie wokół pionowej osi ma moment bezwładności *I* = 2520 kg·m^2. Człowiek o masie *m* = 70 kg przeszedł ze środka tarczy do jej brzegu. Powoduje to zmniejszenie prędkości kątowej *n* = 2 razy. Jaki jest promień tarczy? Rozmiary człowieka można pominąć. *Odp. Promień tarczy wynosi 6 m.*

11. Na szpulę w kształcie walca o promieniu *R* i masie *m* nawinięta jest nić. Szpula może się obrać wokół osi, jak pokazano na rysunku. Do nici przyłożono siłę *F*. Oblicz przyspieszenie kątowe walca.

Odp.: $\varepsilon = \frac{2F}{mR}$



12. W jednorodną tarczę o momencie bezwładności *I,* mogącą obracać się wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek, wbija się kula o masie *m* w odległości *x* od osi obrotu. Tor lotu kuli jest prostopadły do powierzchni tarczy, a prędkość kuli wynosi *v*. z jaką prędkością zacznie wirować tarcza?



Odp.: $\omega = \frac{mxv}{I + mx^2}$