PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Elektrostatyka

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

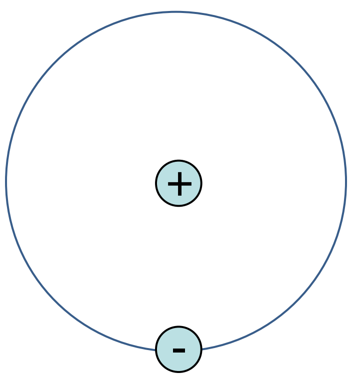
Ładunek elektryczny

Materia zbudowana jest z atomów. Atom składa się z dodatnie naładowanego jądra atomowego (zbudowanego z dodatnie naładowanych protonów i nienaładowanych neutronów) oraz ujemnie naładowanych elektronów. Cechą charakterystyczna protonów i elektronów jest to, że dwa protony lub dwa elektrony odpychają się natomiast proton i elektron się przyciągają. Cechę protonów i elektronów, która odpowiada za takie przyciąganie lub odpychanie nazywamy **ładunkiem elektrycznym**.

Mówimy, że ładunek elektryczny jest skwantowany, co oznacza, że **jest on zawsze wielokrotnością dodatniego ładunku protonu lub ujemnego ładunku elektronu: q = n*e** gdzie n – liczba całkowita, e – ładunek elektronu, q – ładunek elektryczny.

Jednostką ładunku elektrycznego jest **kulomb** oznaczany symbolem [C].

Wartość bezwzględną ładunku protonu lub elektronu nazywamy **ładunkiem elementarnym** i oznaczamy jako *e*. Poniżej znajduje się schemat atomu wodoru według Bohra. Ujemnie naładowany elektron krąży wokół dodatni naładowanego protonu podobnie jak Księżyc krąży wokół Ziemi. Ponieważ ładunki różnoimienne się przyciągają, elektron nie „ucieka” z orbity protonu.



ładunek protonu $+e=1.601 *10^{-19}$ [C]

ładunek elektronu $-e=-1.601 *10^{-19}$ [C]

Ładunkiem punktowym nazywamy ładunek skupiony w ciele, którego rozmiary są bardzo małe w porównaniu z odległościami do innych naładowanych ciał (podobnie jak przybliżenie punktu materialnego).

Prawo Coulomba

Podstawową cechą oddziaływań pomiędzy ładunkami jest to, że **ładunki jednoimienne się odpychają, a ładunki różnoimienne się przyciągają.**

Siłę oddziaływań pomiędzy dwoma ładunkami punktowymi opisuje prawo Coulomba. Prawo to głosi, że **siła wzajemnego oddziaływania pomiędzy dwoma ładunkami punktowymi jest wprost proporcjonalna do ich iloczynu i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.** Prawo to można zapisać za pomocą równania:

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

F –siła oddziaływania dwóch ładunków elektrycznych

q_1, q_2 –punktowe ładunki elektryczne

r –odległość pomiędzy ładunkami punktowymi

k –stała proporcjonalności

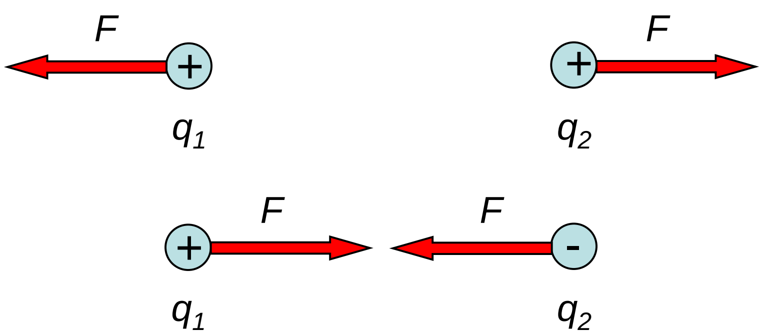
$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni

Warto zapamiętać!

$k \approx 9*10^9$ [N*m²/C²]

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ [F/m]

$[\varepsilon_0] = F/m = A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^3$



Pole elektryczne

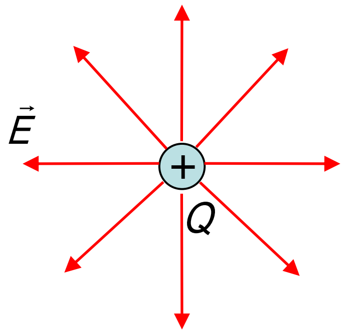
Ładunki elektryczne wytwarzają w otaczającej je przestrzeni **pole elektryczne**. Istnienie pola elektrycznego oznacza, że na ładunki znajdujące się w polu działa siła. Pole to opisuje się przez **natężenie pola elektrycznego** lub **potencjał elektryczny**.

Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową oznaczaną jako ***E***. Kierunek wektora natężenie pola elektrycznego jest taki sam jak kierunek działającej siły, natomiast zwrot jest zgodny ze zwrotem wektora siły, jaka działa na dodatni ładunek próbny.

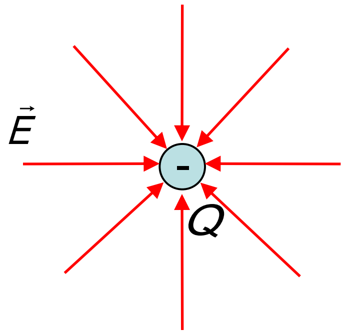
Wartość wektora natężenia pola od ładunku punktowego Q jest zdefiniowana jako stosunek siły działającej na ładunek próbny q do wartości tego ładunku.

$$\boxed{E = \frac{F}{q} = k\frac{Qq}{qr^2} = k\frac{Q}{r^2}}$$

Pole elektryczne od dodatniego ładunku punktowego



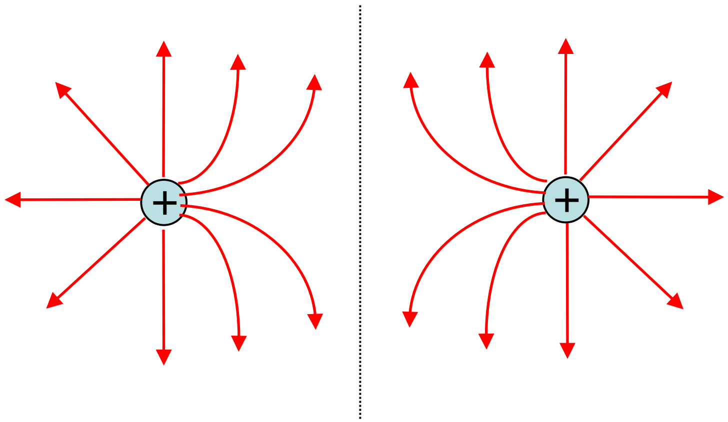
Pole elektryczne od ujemnego ładunku punktowego



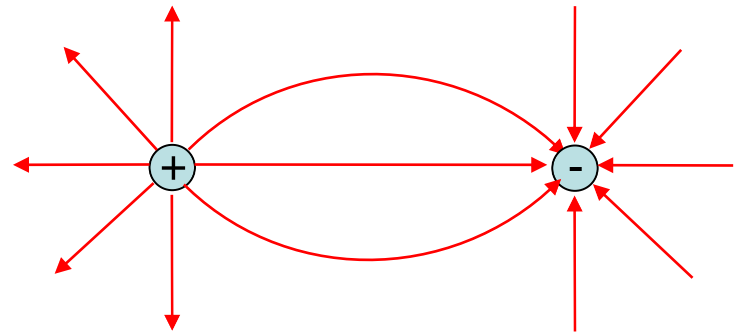
Pole elektryczne od ładunku punktowego ma symetrię radialną (promieniową) i jest skierowane na zewnątrz w przypadku gdy ładunek jest dodatni i do środka dla ładunku ujemnego.

Jednostką natężenia pola elektrycznego jest niuton na kulomb: [1N/1C]

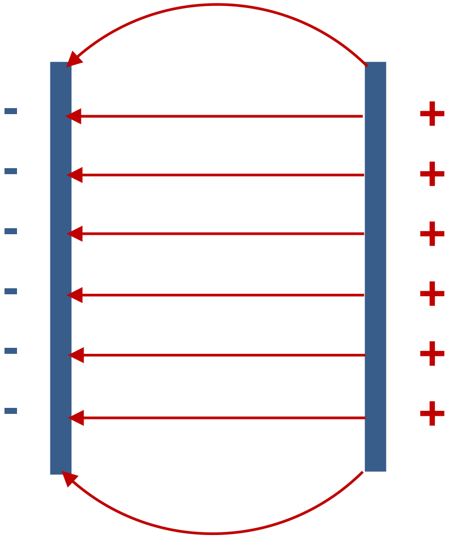
Pole elektryczne pochodzące od dwóch punktowych ładunków jednoimiennych



Pole elektryczne pochodzące od dwóch punktowych ładunków róznoimiennych

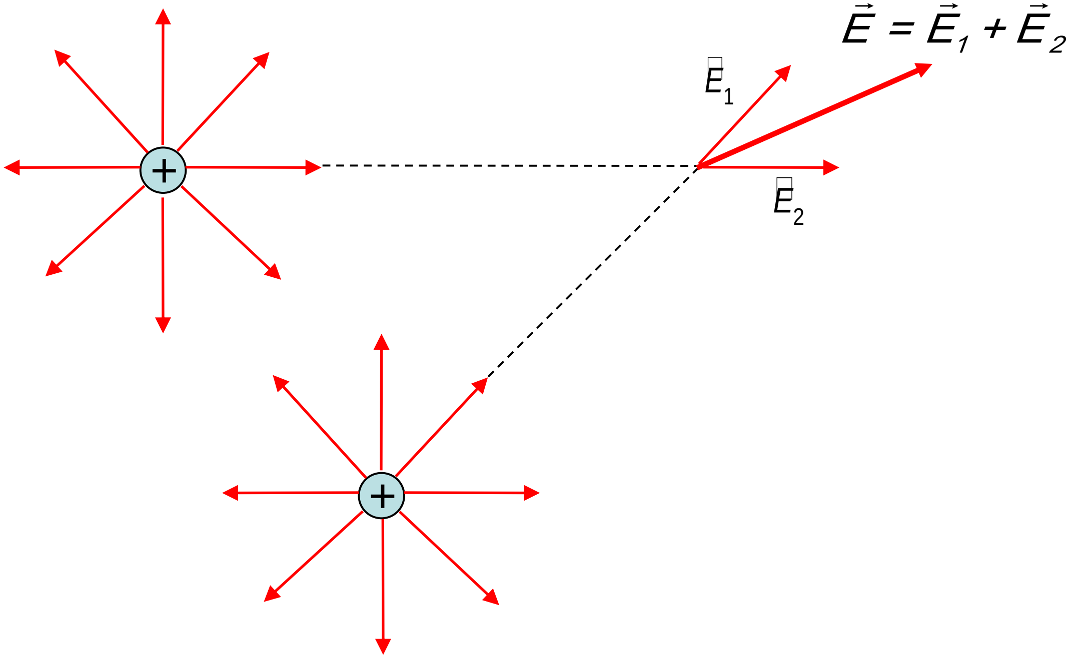


Pole elektryczne pomiędzy dwoma naładowanymi jednorodnie płytami. Linie pola elektrycznego są do siebie równoległe dla odpowiednio dużego stosunku powierzchnia płyt/odległość między płytami. Przedstawiony poniżej układ nazywamy kondensatorem płaskim.



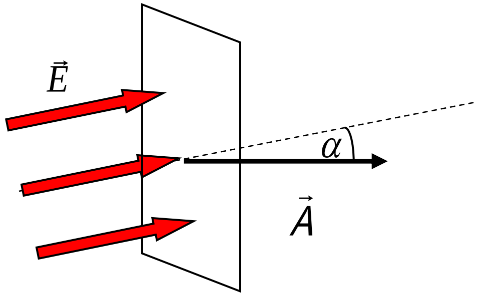
Pole elektryczne pochodzące od wielu ładunków punktowych jest sumą wektorową natężeń pochodzących od każdego z ładunków. Jest to tak zwana **zasada superpozycji**.

Pole elektryczne od dwóch ładunków punktowych



Prawo Gaussa

Strumień pola elektrycznego przez daną powierzchnię jest wielkością skalarną. Strumień pola elektrycznego oznaczamy symbolem Φ. Wartość strumienia jest proporcjonalna do liczby linii sił pola przechodzących przez daną powierzchnię i dana jest jako iloczyn skalarny wektora *E* i wektora *A* prostopadłego do rozpatrywanej powierzchni.



$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{E} = A \cdot E \cdot \cos\alpha$$

gdzie *E* jest natężeniem pola na powierzchni, *A* jest polem powierzchni, a α jest kątem pomiędzy kierunkiem wektora *E* i wektorem prostopadłym do powierzchni *A*.

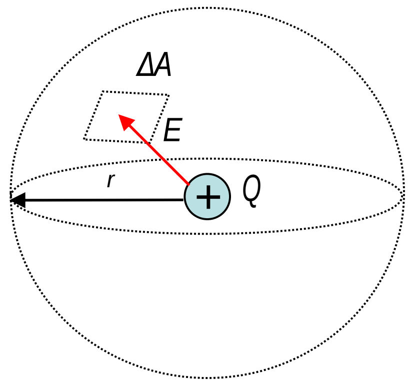
W szczególnym przypadku, gdy wektor *E* jest prostopadły do powierzchni *A*, strumień pola elektrycznego Φ można obliczyć z równania:

$$\Phi = A \cdot E$$

Prawo Gaussa mówi, że całkowity strumień przez powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi zamkniętemu tą powierzchnią podzielonemu przez stałą ε_0.

$$\Phi = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_0}$$

Prawo Gaussa najłatwiej prześledzić dla przypadku powierzchni sferycznej otaczającej ładunek punktowy *Q*.



Jeżeli chcemy obliczyć całkowity strumień przez zamkniętą powierzchnię sferyczną o promieniu *r*, możemy zrobić to, dzieląc całą powierzchnię na elementy o polu ΔA. Następnie obliczmy strumień pola *E* przez element powierzchni ΔA. Strumień $\Delta\Phi$ dla takiego elementu wynosi $E*\Delta A$. Możemy zauważyć, że dla powierzchni sferycznej, natężenie pola *E* jest takie samo dla każdego elementu powierzchni ΔA. Jeśli zsumujemy strumienie przez wszystkie elementy ΔA otrzymamy $E*A$ gdzie *A* jest polem powierzchni sferycznej. Pole powierzchni sfery o promieniu *r* wynosi $4\pi r^2$. Tak więc całkowity strumień Φ przez powierzchnię *A* wynosi:

$$\Phi = 4\pi r^2 \cdot E$$

Ponieważ ilość ładunku zamkniętego wewnątrz powierzchni sferycznej wynosi *Q*, na mocy prawa Gaussa mamy:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Z powyższych równań otrzymujemy:

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

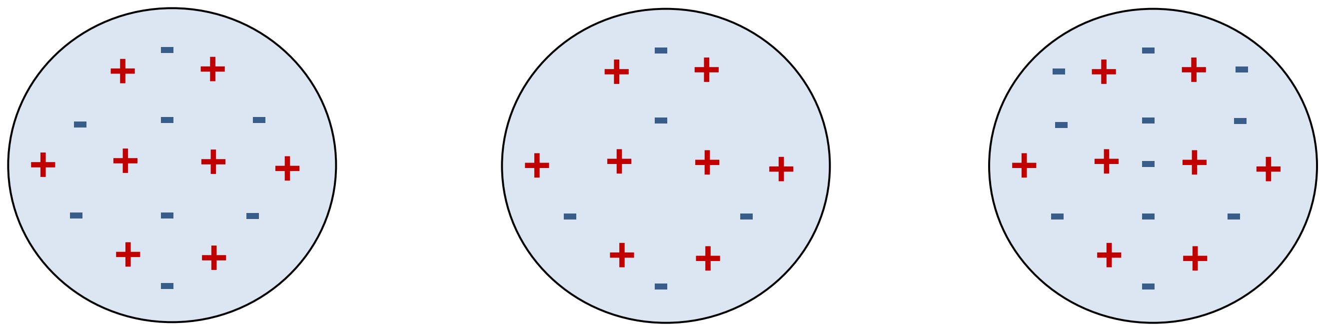
Przekształcając, możemy otrzymać wyrażenie na natężenie pola elektrycznego *E* dla punktów leżących w odległości *r* od ładunku *Q* *zgodne z prawem Coulomba*:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Elektryzowanie ciał

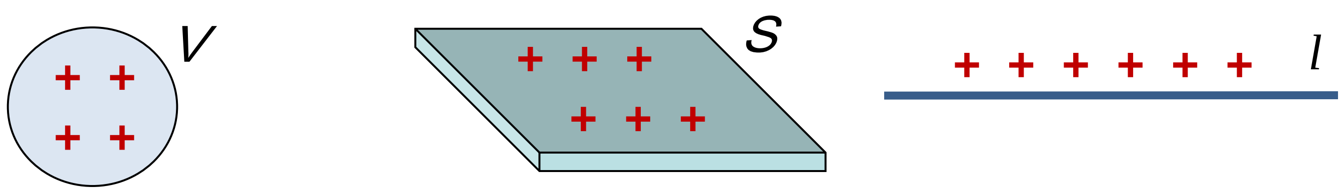
W większości przypadków wypadkowy ładunek wybranego ciała, będący sumą dodatnich ładunków protonów i ujemnych ładunków elektronów, wynosi zero – liczba ładunków dodatnich równa jest liczbie ładunków ujemnych. **Elektryzowanie ciała** to proces przekazywania mu ładunku. Jeśli do ciała napływają dodatkowe elektrony mówimy o ciele naelektryzowanym ujemnie, jeśli z ciała zabierane są elektrony mówimy o ciele naelektryzowanym dodatnio.

ciało nienaładowane | **ciało naładowane dodatnio** | **ciało naładowane ujemnie**



Gęstość ładunku – ilość ładunku Q na jednostkę objętości V, powierzchni S lub długości l.

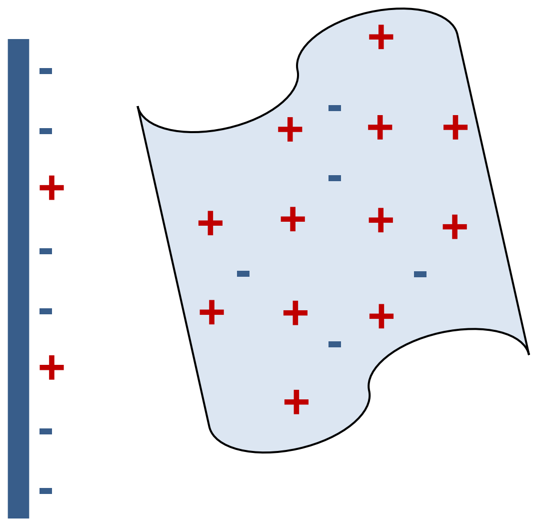
$$\rho = \frac{Q}{V} \qquad \sigma = \frac{Q}{S} \qquad \tau = \frac{Q}{l}$$



Elektryzowanie ciał

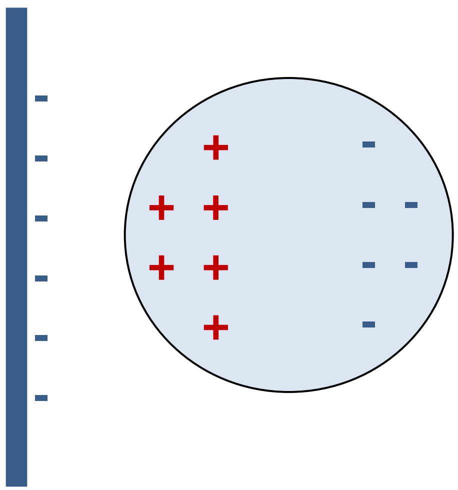
Ciała możemy naelektryzować na trzy różne sposoby:

przez potarcie



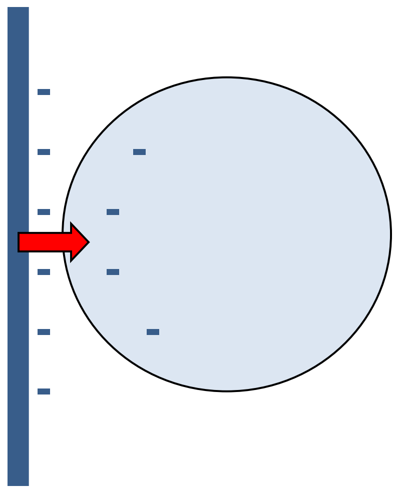
Pocierając laskę ebonitową o wełnę przenosimy elektorny z wełny na laskę ebonitową – czyli ładujemy laskę ujemnie. Pocierając laskę szklaną o jedwab przenosimy elektrony z laski na jedwab – czyli ładujemy laskę dodatnio.

przez indukcję



Gdy do nienaładowanej metalowej kulki zbliżymy naładowaną laskę to w wyniku działania pola elektrycznego pochodzącego od ładunków na lasce ładunki elektryczne w nienaładowanej kulce rozsuną się przestrzennie. Całkowity ładunek na kulce pozostanie zerowy!

przez dotyk

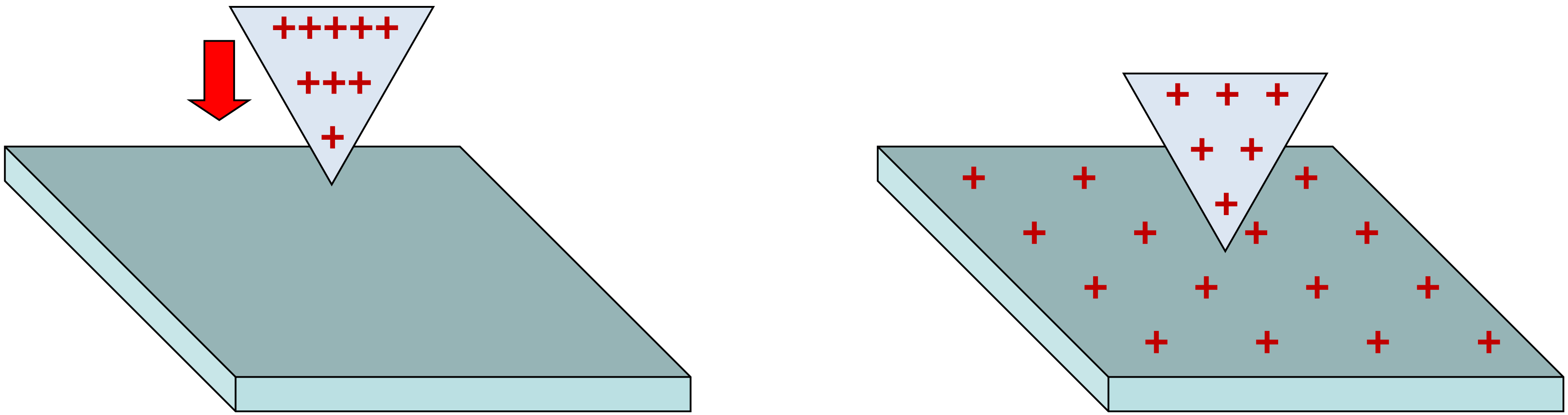


Gdy nienaładowaną metalową kulkę dotkniemy naładowaną laską to część ładunków przepłynie od naładowanej laski do nienaładowanej kulki. Ładunek na lasce zmiejszy się. Całkowity ładunek układu laska-kulka pozostanie stały.

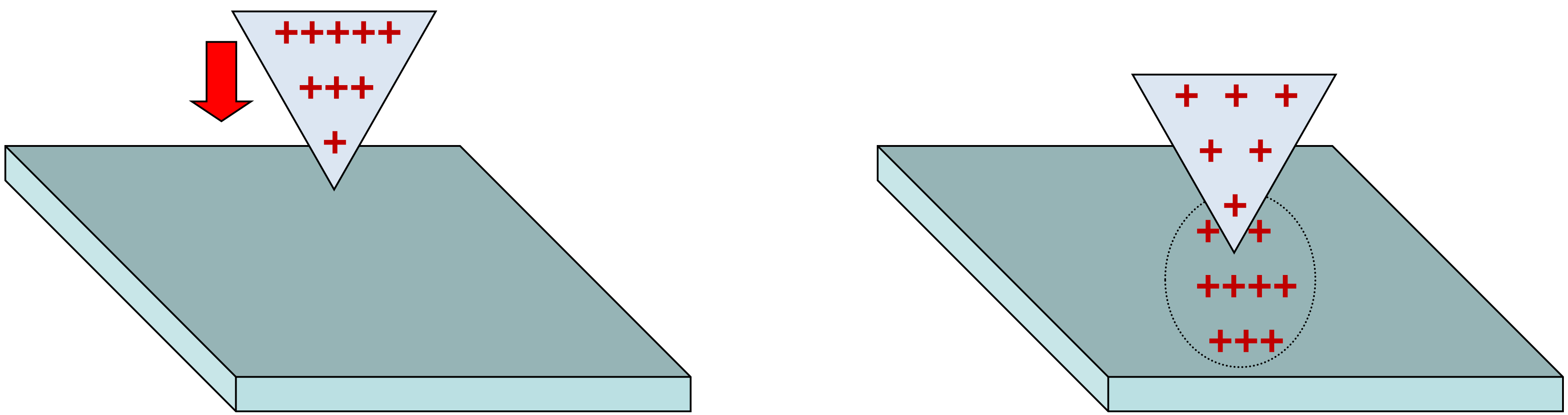
Elektryzowanie ciał

Ciała dzielimy na przewodniki i izolatory. Przewodniki to ciała, które dobrze przewodzą ładunek elektryczny, dzięki temu, że występują w nich ładunki swobodne (elektrony, jony dodatnie i ujemne). Izolatory to ciała, które nie przewodzą ładunku elektrycznego, gdyż nie występują w nich ładunki swobodne ani w postaci elektronów ani jonów.

Dodatnio naładowanym ciałem dotykamy przewodnika. Ładunek „rozlewa” się po całym przewodniku.

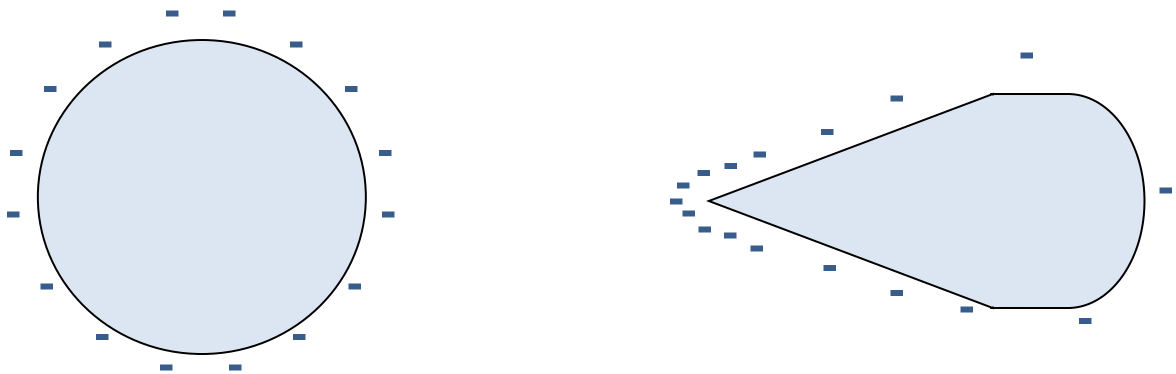


Dodatnio naładowanym ciałem dotykamy izolatora. Ładunek pozostaje tylko w miejscu styku ciała naładowanego i izolatora.



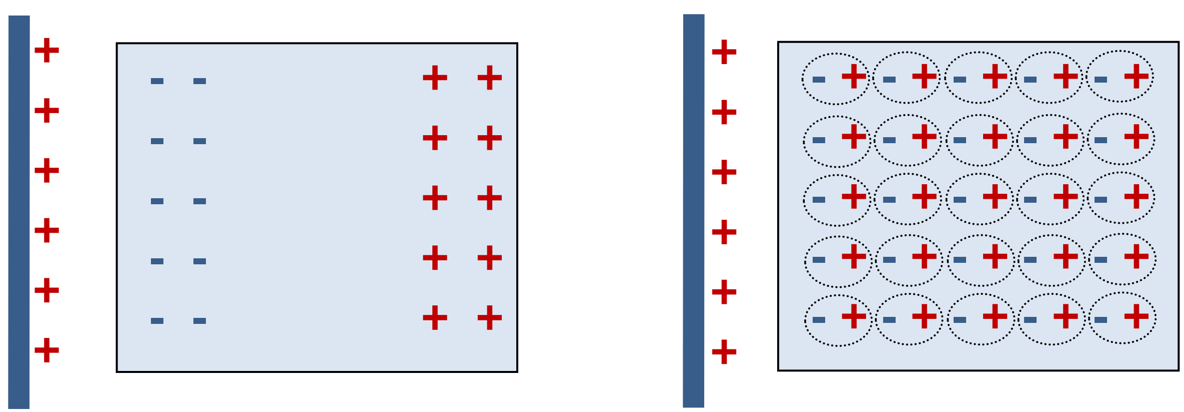
Rozkład ładunów w przewodnikach

Jeśli będziemy chieli naładować przewodnik ładunkiem elektrycznym to okaże się, że cały ładunek zgromadzony jest na jego powierzchni. Wynika to z faktu, że ładunki jednoimienne odpychają się i będą dążyć do takiego rozkładu aby minimalizować oddziaływanie coulombowskie. W przypadku metalowej kuli wszystkie ładunki zgromadzą się na powierzchni tej kuli. W przypadku przewodników o innych kształtach niż kula ładunki będą gromadzić się chętniej na powierzchniach o mniejszym promieniu krzywizny – na ostrzach.



Polaryzacja przewodników i izolatorów

W przewodnikach istnieją ładunki swobodne i mogą się one przemieszczać po całym przewodniku. W izolatorach nie ma ładunków swobodnych a rozsunięcie ładunku następuje w atomach lub cząsteczkach, z których zbudowany jest izolator. Takie dwa rozsunięte ładunki o przeciwnych znakach nazywamy dipolem.



Przykłady

Zadanie 1

*Ile ładunków elementarnych składa się na ładunek kropli deszczu równy 1.6*10^{-13}C?*

Ponieważ dowolny ładunek jest wielokrotnością ładunku elektronu q = n*e, liczba elementarnych ładunków w kropli deszczu wynosi:

$$n = \frac{q}{e} = \frac{1.6 \cdot 10^{-13} C}{1.6 \cdot 10^{-19} C} = 10^6$$

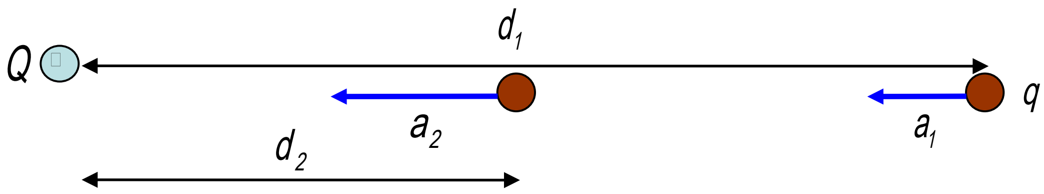
Zadanie 2

W jakiej odległości od siebie należy umieścić dwa ładunki dodatnie o wartości 1μm każdy, aby odpychały się siłą 10N?

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{k \cdot q_1 \cdot q_1}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-6} C}{10N}} = 3cm$$

Zadanie 3

W punkcie O znajduje się nieruchomy ładunek Q=1C. W polu elektrycznym wytwarzanym przez ten ładunek porusza się kulka o ładunku $q = -1\mu C$. Kiedy kulka znajduje się w odległości $d_1 = 1m$ od ładunku jej przyspieszenie wynosi $a_1 = 5m/s^2$. Jakie będzie przyspieszenie kuli a_2 kiedy będzie ona znajdować się w odległości $d_2 = 0.5m$ od ładunku?



Ładunki Q i $-q$ są różnoimienne, więc na kulkę działa siła przyciągająca zależna od odległości d:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^2}$$

Na mocy drugiej zasady dynamiki możemy zapisać przyspieszania a_1 i a_2 jako:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d_1^2 m} \qquad a_2 = \frac{F_1}{m} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d_2^2 m}$$

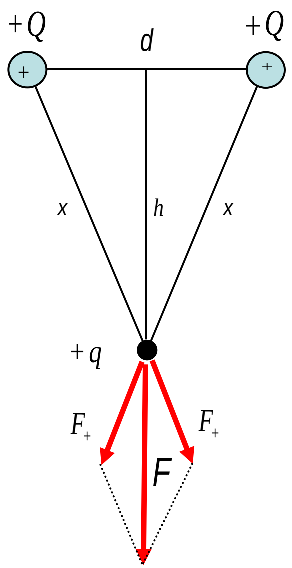
Dzieląc powyższe równania stronami otrzymujemy: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{d_2^2}{d_1^2}$

Po dokonaniu przekształceń mamy: $a_2 = a_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$, co po wstawieniu danych liczbowych daje: $a_2 = 4a_1 = 20\dfrac{m}{s^2}$

Przykłady

Zadanie 4

Oblicz siłę działającą na ładunek +q znajdujący się w odległości x od dwóch ładunków +Q i +Q odległych od siebie o d.



Korzystając z podobieństwa trójkątów możemy napisać:

$$\frac{F_+}{F} = \frac{x}{2h} \Leftrightarrow F = 2F_+ \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2x}\right)^2}$$

aby wyznaczyć wypadkową siłę F musimy obliczyć siłę pochodzącą od ładunku +Q:

$$F_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$$

Szukana siła *F* wynosi więc:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qq}{x^2}\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2x}\right)^2}$$

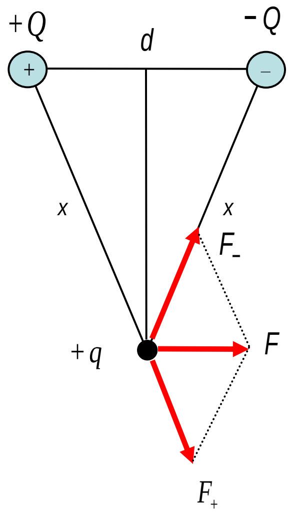
Gdy x>>d separacja przestrzenna ładunku Q nie ma znaczenia a na ładunek q działa siła:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qq}{x^2}$$

Przykłady

Zadanie 5

Oblicz siłę działającą na ładunek +q znajdujący się w odległości x od dwóch ładunków +Q i –Q odległych od siebie o d.



Korzystając z podobieństwa trójkątów możemy napisać:

$$\frac{F_+}{F} = \frac{x}{d}$$

aby wyznaczyć wypadkową siłę F musimy obliczyć siłę pochodzącą od ładunku +Q:

$$F_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$$

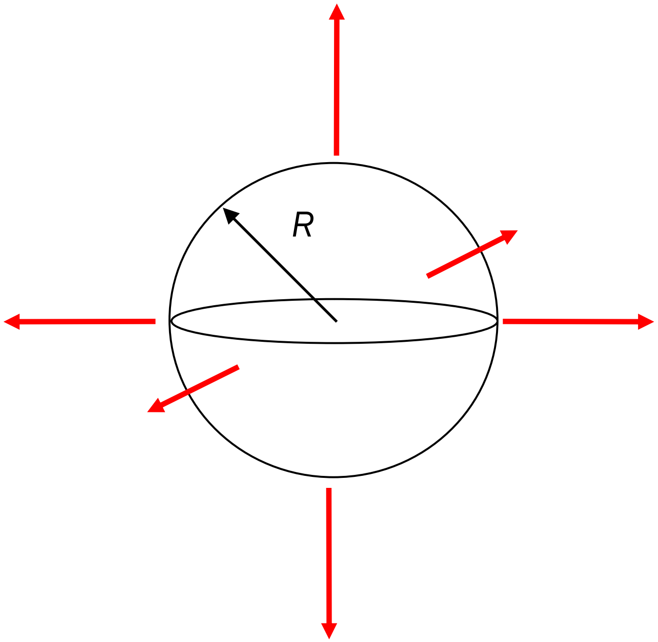
Szukana siła *F* wynosi więc:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqd}{x^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}\frac{d}{x}$$

Warto zauważyć, że siła maleje nie jak x^{-2} ale jak x^{-3}. Związane jest to z faktem, że sumaryczny ładunek dipola wynosi 0!

Zadanie 6

Metalowa kula o promieniu R posiada ładunek Q. Oblicz natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz kuli.



Ponieważ w metalu występują elektrony swobodne mogące się poruszać w polu elektrycznym, całkowity ładunek kuli zgromadzony jest na jej powierzchni. Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz kuli wybieramy sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu $r<R$.

Łatwo zauważyć, że każda z takich powierzchni sferycznych będzie zamykała zerowy ładunek. Z prawa Gaussa mamy więc:

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

Z kolei dla powierzchni sferycznych o promieniu $r>R$ prawo Gaussa przyjmuje następującą postać:

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

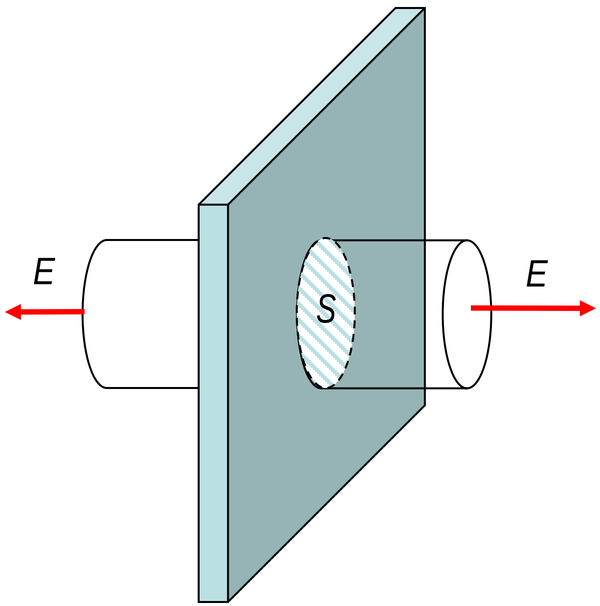
Otrzymujemy więc $E = 0$ wewnątrz kuli oraz $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ na zewnątrz kuli.

Z powyższych rozważań wynika, że pole wewnątrz metalowej kuli znika, natomiast na zewnątrz jest opisane wyrażeniem analogicznym do wyrażenia dla ładunku punktowego.

Zadanie 7

Oblicz natężenie pola pochodzącego od dużej, płaskiej płyty, na której zgromadzony jest ładunek o gęstości powierzchniowej σ.

Do obliczania natężenia pola możemy skorzystać z prawa Gaussa. Z warunków symetrii wynika, że pole E będzie miło kierunek prostopadły do płyty. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca przenikającego płaszczyznę (nie jest to jedyny możliwy wybór).



Dla walca o powierzchni podstawy *S* całkowity strumień Φ przez powierzchnię walca jest równy strumieniowi przez obie podstawy ponieważ wektor $\vec{E}$ jest równoległy do powierzchni bocznych walca.

$$\Phi = \Phi_{podst.} + \Phi_{pow.boczne} = 2 \cdot E \cdot S + 0 = 2ES$$

Z prawa Gaussa wiemy, że strumień Φ jest (z dokładnością do stałej ε_0) równy całkowitemu ładunkowi zamkniętemu wybraną powierzchnią. Tak więc możemy napisać:

$$2ES = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_0}$$

Wartość ładunku zamkniętego wewnątrz walca możemy obliczyć znając gęstość powierzchniową ładunku (ilość ładunku na jednostkę powierzchni)

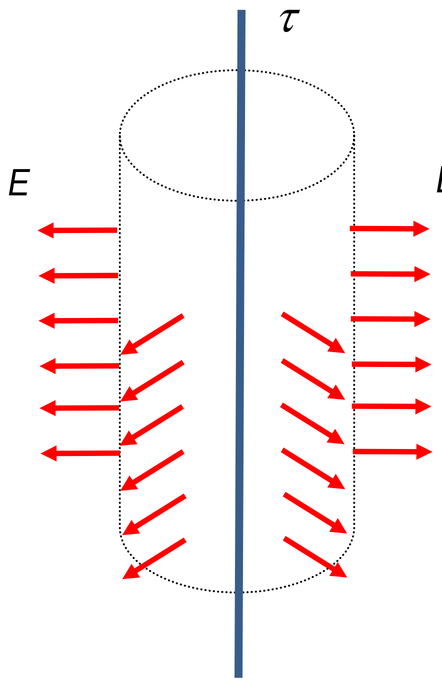
$$Q_{wew} = \sigma \cdot S$$

Ostatecznie mamy więc: $2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ z czego otrzymujemy wyrażenie na *E*: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Zadanie 8

Oblicz natężenie pola pochodzącego od długiego prostego przewodnika, na którym zgromadzony jest ładunek o gęstości liniowej τ.

Do obliczania natężenia pola możemy skorzystać z prawa Gaussa. Z warunków symetrii wynika, że pole E będzie rozchodziło się radialnie od przewodnika. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca, którego oś obrotu pokryje się z przewodnikiem.



Dla walca o promieniu podstawy R całkowity strumień Φ przez powierzchnię walca jest równy strumieniowi przez powierzchnię boczną walca.

$$\Phi = \Phi_{podst.} + \Phi_{pow.boczne} = 0 + 2\pi R \cdot h \cdot E$$

Z prawa Gaussa wiemy, że strumień Φ jest (z dokładnością do stałej ε_0) równy całkowitemu ładunkowi zamkniętemu wybraną powierzchnią. Tak więc możemy napisać:

$$2\pi R \cdot h \cdot E = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_0}$$

Wartość ładunku zamkniętego wewnątrz walca możemy obliczyć znając gęstość liniową ładunku (ilość ładunku na jednostkę długości)

$$Q_{wew} = \tau \cdot h$$

Ostatecznie mamy więc: $2\pi R \cdot h \cdot E = \frac{\tau h}{\varepsilon_0}$ z czego otrzymujemy wyrażenie na *E*: $E = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 R}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Jaka musi być wartość natężenia pionowego pola elektrycznego, aby jego działanie na kropelkę oleju o masie $3.2*10^{-12}$g i ładunku $1.6*10^{-19}$C zrównoważyło ciężar kropel? (Odp: $2*10^5$ N/C)
2. Dwie jednakowe metalowe kulki zawieszone są na jedwabnych niciach o długości *l*. Każda z kulek posiada ładunek *q* i masę *m*. Obliczyć odległość d w jakiej znajdują się kulki w stanie równowagi. Przyjąć, że siła elektrostatyczna jest dużo mniejsza od siły grawitacji, tzn. $d << l$ (przy takim założeniu tgα≈sin α). (Odp:
$$d = \sqrt[3]{2lkq^2 / mg}$$
3. Jaki ładunek należy umieścić w połowie odległości pomiędzy dwiema kulkami o ładunku 8μC każda, aby układ ten pozostał w równowadze? (Odp: -2μC)
4. W odległości 8cm od siebie umieszczono dwa ładunki q_1=18mC i q_2=2mC. W jakiej odległości od ładunku q_1 na prostej łączącej oba ładunki natężenie pola jest równe zeru? (Odp: 6cm)
5. Cztery identyczne ładunki dodatnie *q* umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku *a*. W środku symetrii kwadratu umieszczono ładunek ujemny *Q* taki, że cały układ pozostaje w równowadze. Znaleźć wartość ładunku *Q*. (Odp: $q*(2\sqrt{2}+1)/4$)
6. Natężenie pola *E* w środku dipola elektrycznego o długości d=5cm wynosi $3*10^3$ V/m. Oblicz natężenie pola w punkcie leżącym na osi dipola w odległości *2d* od ładunku dodatniego. (Odp: 281V/m lub -52V/m)
7. Dwie duże naładowane płyty umieszczono naprzeciw siebie. Na płytach zgromadzone są ładunki o gęstościach powierzchniowych odpowiednio $+\sigma$ i $-\sigma$. Jakie jest natężenie pola *E* w punktach a) na lewo od płyt, b) pomiędzy płytami, c) na prawo od nich. (0, σ/ε_0, 0)
8. Znajdź natężenie pola elektrycznego wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i całkowitym ładunku Q. ($E(r)=kQr/R^3$)
9. W jednym z naroży sześcianu znajduje się ładunek Q. Znajdź strumień pola elektrycznego przechodzący przez zaznaczony na rysunku bok. (Odp: $Q/24\varepsilon_0$)