

# Podstawy elektroniki

dr hab. inż. Michał K. Urbański, prof. nzw.

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej  
Zakład V "Badań strukturalnych",  
Gmach Fizyki pok 127B,  
murba@if.pw.edu.pl,  
strona <http://www.if.pw.edu.pl/~murba/>

*tekst z dnia 21.10.2015*

*tekst na prawach rękopisu, kopiowanie jedyni za zgodą autora*

*Tekst może zawierać błędy, a szczególnie literówki.*

*Celem tego wykładu jest przedstawienie metod i koncepcji, za  
przepisanie tekstu zawierającego błędy na sprawdzianie autor nie  
ponosi odpowiedzialności*

## ZASADY ZALICZANIA:

- 4 kolokwia na wykładzie trwające 45min. obejmujące materiał, z wykładów i ćwiczeń, będą zadania, kolokwia będą oceniane systemem punktowym, (kol do 12p.).
- Laboratorium 9 ćwiczeń po 5p
- całkowita liczba punktów do uzyskania  $48+45=93$
- Trzeba mieć zaliczone trzy kolokwia (od 7 punktów) i 8 laboratoriów

zaliczenie od 47p oceny wg systemu:

(47-56) - 3,0 (56-63) - 3,5 (64-71) - 4,0 (72-79) - 4,5 (80-93) - 5,0

terminy kolokwiów:

29 paźdz, 26 listop, 17 grud. 2015, stycz. 2016 (ostatni wykład)  
będą dwa dodatkowe terminy poprawy: w grudniu i w końcu stycznia (w sesji).

## ELEMENTY TEORII OBWODÓW:

sygnały elementy obwodów obwody, prawa Kirchffa, superpozycja, układy zastępcze prąd zmienny, opis zespolony prądów sinusoidalnych, układy liniowe, filtry RC i RL, moc, praca.

## ELEMENTY CZYNNNE i NIELINIOWE

dioda, tranzystor, układ scalony. fizyczne podstawy działania tranzystora i diody podstawowe układy wzmacniające filtry dolno- i górnoprzepustowy

Sygnaly, klasyfikacja, parametry sygnałów. Elementy obwodów: rezystor, kondensator, indukcyjność, źródło napięciowe i prądowe. Obwody liniowe: prawa Kirchoffa, metody rozwiązywania układów liniowych. Dwójniki i czwórniki. Matematyczny opis czwórników. Układy równoważne, twierdzenia o źródłach zastępczych. Zasada superpozycji, wyznaczanie parametrów układów równoważnych. Opis i analiza obwodów prądu zmiennego: rachunek symboliczny (opis zespolony), wskazy. Dwójniki i czwórniki przy pobudzeniach harmonicznym. Filtry RC i RL. Zależności energetyczne w obwodach prądu zmiennego, dopasowanie źródła i obciążenia.

# Układy czynne

Fizyczne podstawy działania elementów półprzewodnikowych. Diody: charakterystyki, schematy zastępcze, układy z dużymi i małymi sygnałami. Tranzystory bipolarne i tranzystory polowe: zasady działania, charakterystyki. Parametry wielko- i małosygnałowe tranzystorów bipolarnych i polowych przy małych i wielkich częstotliwościach, parametry impulsowe. Zastosowania tranzystorów: liniowe (wzmacniacze) i nieliniowe (przełączniki, układy impulsowe). Wzmacniacze operacyjne idealne, opis ich działania. Zastosowania w układach liniowych i nieliniowych. Rzeczywiste wzmacniacze operacyjne, ich właściwości i ograniczenia. Zastosowania wzmacniaczy operacyjnych w układach pomiarowych.

J.Osiowski, J.Szabatin Podstawy teorii obwodów, WNT Warszawa  
1998.

książki z teorii obwodów

# Wielkości podstawowe

Napięcie elektryczne  $U = \frac{W}{q}$

gdzie  $q$  - ładunek elektryczny,  $W$  - praca ładunku w polu elektrycznym.

natężenie prądu  $I = \frac{dq}{dt}$

Natężenie pola elektrycznego  $E = \frac{F}{q}$

gdzie:  $F$  siła pola działająca na ładunek  $q$ .

Napięcie elektryczne pomiędzy punktem  $A$  i  $b$ :  $U_{a,b} = \frac{W}{q}$

$W$  - praca wykonana przy przemieszczaniu ładunku z punktu  $a$  do  $b$ , ponieważ praca  $W = \int_a^b \vec{F} d\vec{l}$  więc:

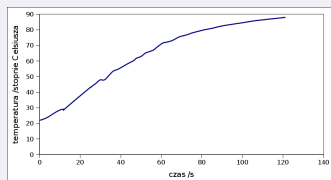
$$U_{a,b} = \frac{\int_a^b \vec{F} d\vec{l}}{q} = \int_a^b \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

Prawo Ohma  $I = \frac{U}{R}$  co na poziomie mikroskopowym odpowiada  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , gdzie  $\sigma$  przewodność właściwa,  $\vec{j}$  - wektor gęstości prądu..

Wyróżniamy nośnik i treść sygnału

- Nośnik sygnału - wielkość fizyczna np. sygnał elektryczny, mechaniczny itd
- Treść sygnału - informacja zapisana w sygnale, matematycznie jest to funkcja czasu opisująca zależności wielkości będącej nośnikiem od czasu.

W obliczeniach i w modelach matematycznych zjawisk sygnał utożsamiamy z funkcją czasu. Funkcję tą opisujemy podając parametry sygnału.



Rysunek: Przykład sygnału, zależność temperatury od czasu grzanego kubka z wodą - przykład funkcji rosnącej



# Parametry sygnałów

wartość średnia AV - (average value):  $X_{AV} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$

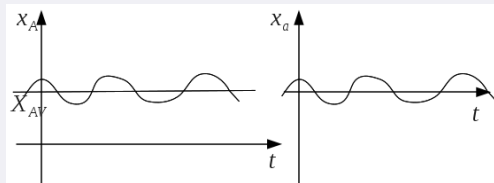
Wartość średnie dla sygnałów okresowych nie zależy od wyboru momentu początkowego całkowania  $t_0$ .

$x_A$  - sygnał całkowity wielkości  $A$ ,

$x_a$  - składowa zmienna sygnału wielkości  $A$

sygnał rozkładamy na składową zmienną  $x_a$  i stałą  $X_{AV}$ :

$$x_A(t) = x_a(t) + X_{AV} \quad (1)$$



Rysunek: Rozkład sygnału na składową zmienną i stałą

# Rozkład sygnału na składowe zmienną i stałą

$$x_A(t) = x_a(t) + X_{AV} \quad (2)$$

Wartość średnia składowej zmiennej wynosi zero tj.:  $X_{a(av)} = 0$ ,  
uzasadnienie:

$$X_{a(av)} = \int_{t_0}^{t_0+T} x_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (x_A(t) - X_{AV}) dt = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A(t) dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_{AV} dt = \quad (4)$$

$$= X_{AV} - X_{AV} = 0 \quad (5)$$

# SYGNAŁY - oznaczenia

litera mała  $x$  - sygnał, czyli sygnał zależny od czasu  $x(t)$

litera wielka  $X$  - parametr sygnału,

wskaźnik  $A$  przy znaku sygnału:  $x_A$  - sygnał wielkości  $A$ .

wskaźniki przy oznaczeniu sygnału

wielka duża odnosi się do całego sygnału, np  $x_A$

litera mała - odnosi się do składowej zmiennej, np  $x_a$  oznacza składową zmienną sygnału  $x_A$ .

Przykład:  $I_E$  - parametr całkowitej wartości prądu emitera  $i_E$

$I_{E(AV)}$  - wartość średnia całkowitego prądu emitera  $i_E$

$i_E(t)$  - wartość chwilowa prądu emitera  $i_E$

$i_e(t)$  - wartość chwilowa składowej zmiennej prądu emitera  $i_E$ .

$I_{e(rms)}$  - wartość skuteczna składowej zmiennej prądu emitera.

# wartość skuteczna RMS – Root Mean Square

Wartość skuteczna sygnału  $X_A$ :

$$X_{A(RMS)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A^2(t) dt} \quad (6)$$

gdzie:  $t_0$  - początek całkowania, dla sygnałów okresowych nie ma wpływu na wartość całki,  $T$  - okres sygnału.

Wartość skuteczna opisuje średnia moc sygnału

Jeśli zapiszemy sygnał jako sumę składowych zmiennej i stałej:

$$x_A(t) = x_a(t) + X_{AV} \quad (7)$$

to mamy:

$$X_{A(RMS)}^2 = X_{a(rms)}^2 + X_{AV}^2 \quad (8)$$

średnia moc sygnału równa jest sumie mocy składowej zmiennej i składowej stałej.

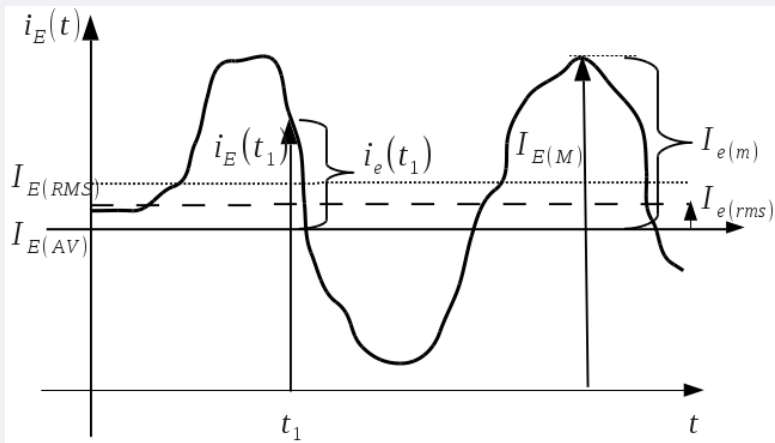
# Wartość skuteczna - składowe

$$\begin{aligned} X_{A(RMS)}^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (x_a(t) + X_{AV})^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_a^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2x_a(t)X_{AV} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (X_{AV})^2 dt = \\ &= X_{a(rms)}^2 + 0 + X_{AV}^2 \end{aligned}$$

Wykorzystano fakt, że wartość średnia składowej zmiennej jest

zerowa:  $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2x_a(t) dt = 0$

# Oznaczenia



Rysunek: Oznaczenia sygnału i jego parametrów

$i$  wartość chwilowa,  $I$  - parametry

# Moc prądu zmiennego

Napięcie - praca  $dW$  wykonana przy przesuwaniu ładunku

$$dq: dW = Udq$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u(t)dq = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u^2(t)}{R}dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Moc średnia w okresie  $T = t_2 - t_1$ :

$$P_{AV} = \frac{W}{T} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt \right) = \frac{U_{RMS}^2}{R}$$

# Operacja uśredniania, różne oznaczenia

Wartość średnia sygnału  $x(t)$ :

$$X_{AV} = \bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (9)$$

Korzystając z tego oznaczenia:  $X_{RMS}^2 = \langle x^2 \rangle$   
operator uśredniania jest liniowy:

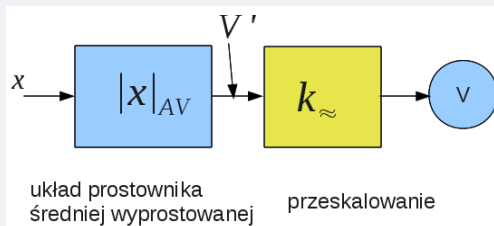
$$\begin{aligned} \langle x + y \rangle &= \langle x \rangle + \langle y \rangle \\ \langle \alpha y \rangle &= \alpha \langle x \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ -liczby rzeczywiste.



# Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

Konstrukcja uproszczona: miernik średniej wyprostowanej wyskalowany w wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego.



$V'$  - napięcie średnie z sygnału wyprostowanego:

$$V' = |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (11)$$

Współczynnik przeskalowania  $k_{\approx}$  tak dobrany aby miernik wskazywał wartość skuteczną dla sygnału sinusoidalnego.

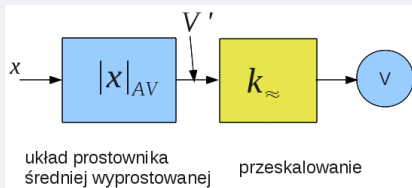
# Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

obliczenia dla sygnału sinusoidalnego  $x(t) = A \sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} V' &= |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T |A \sin(\omega t)| dt = A \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t))^2 dt} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Współczynnik przeskalowania  $k_{\approx}$  jest tak dobrany aby  $V = X_{RMS}$  dla sygnału sinusoidalnego.



podstawiając:

$$\begin{aligned} V &= k_{\approx} |X|_{AV} = X_{RMS} \text{ czyli} \\ k_{\approx} &= \frac{X_{RMS}}{|X|_{AV}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

# Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

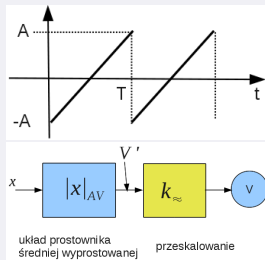
obliczenia dla sygnału trójkątnego  $x(t) = at + b$  dla  $0 < x < T$ ,  
gdzie  $a = \frac{2a}{T}$  i  $b = -A$ .

$$V' = |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt =$$
$$= \frac{2}{T} \int_0^T |at + b| dt = \frac{A}{2}$$

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (at + b)^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

współczynnik kształtu dla trójkąta :

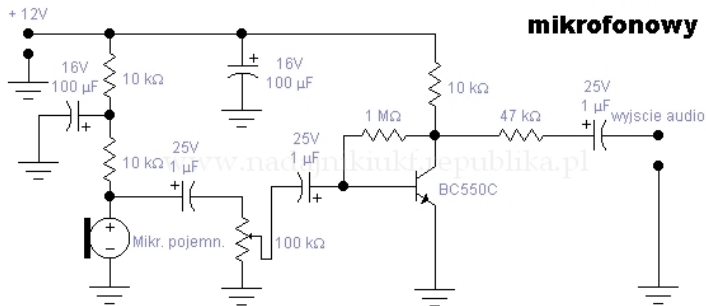
$$k_{\Delta} = \frac{X_{RMS}}{|X|_{AV}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (13)$$



Wskazanie woltomierza:

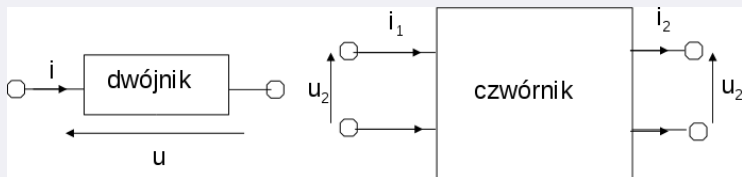
$$V = k_{\approx} V' = k_{\approx} |X|_{AV} =$$
$$k_{\approx} \frac{X_{RMS}}{k_{\approx}}$$

## Wzmacniacz mikrofonowy



Rysunek: Wzmacniacz mikrofonowy - do przemyślenia



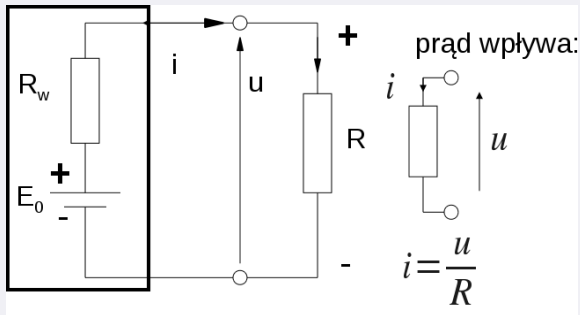


Rysunek: Schematy blokowe („czarne skrzynki”) dwójnika i czwórника

Konwencja strzałek zazwyczaj zakłada się, że : w dwójniku – prąd wchodzi do układu (strzałka skierowana do pudełka)  
w czwórniku – prąd wchodzi do wejścia i wychodzi z wyjścia.  
Czasami wygodniej jest założyć inną orientację strzałek i jedynie zmienia to znak prądu w równaniach.

# Zasady wskaźnikowania i ustalania znaków

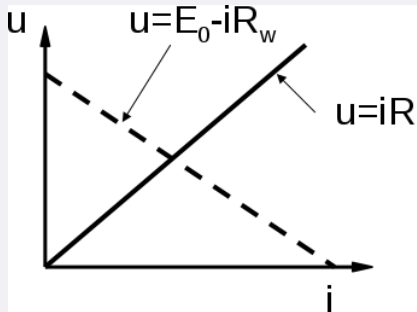
Prąd płynie od plusa do minusa:



Rysunek: strzałkowanie napięć i prądów źródła napięciowego i rezystora (układu biernego). Prąd wypływa ze źródła i wpływa do opornika

$$\text{dla źródła } u = E_0 - iR_w \quad \text{dla rezystora } u = iR \quad (16)$$

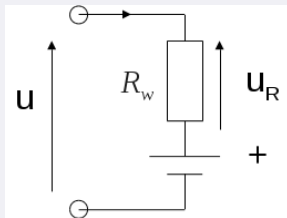
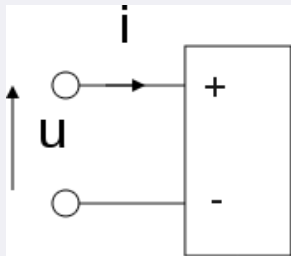
# Źródło napięciowe



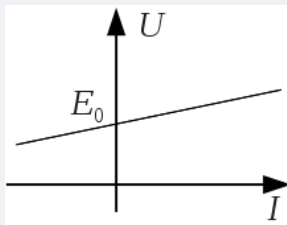
Rysunek: Charakterystyka prądowo napięciowa źródła napięciowego.  
**Linia przerywana** – zależność napięcia od natężenia prądu dla źródła napięciowego o sile elektro-motorycznej  $E_0$  o rezystancji wewnętrznej  $R_W$ :  $u = E_0 - iR_W$ , **linia ciągła** - równanie rezystora  $R$ :  $u = iR$



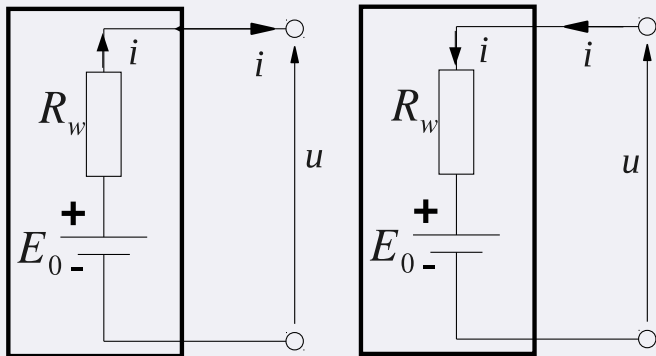
# Dwójnik



Rysunek: Dwójnik - prąd wpływa do dwójnika, napięcie – strzałka od strony +. Obok: Dwójnik aktywny zastrzałkowany jak dwójnik bierny. Zależność napięcia od prądu dla zastrzałkowania jak dla dwójnika biernego.  $u = E + iR_w$



# Porównanie dwóch przypadków kierunków prądu



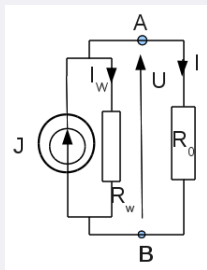
$$u = E_0 - iR_w$$

$$u = E_0 + iR_w$$

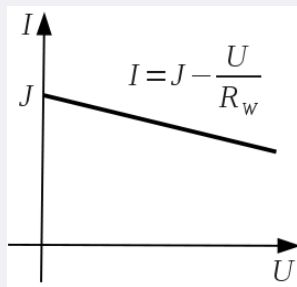
Rysunek: Różne rodzaje strzałek prądu i równania.

układ lewy  $E_0 = iR_w + u$  układ prawy  $E_0 = -iR_w + u$  (17)

# Źródło prądowe



Rysunek: Źródło prądowe



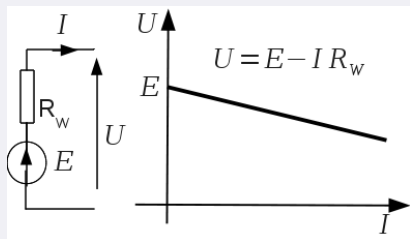
Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła prądowego

równanie:  $J = I + I_w$  i  $I_w = \frac{U}{R_w}$   
czyli  $I = J - \frac{U}{R_w}$

Wyliczamy napięcie:

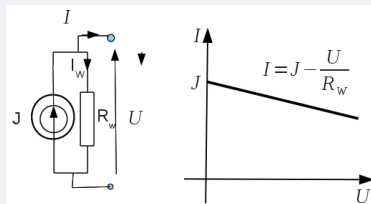
$$U = JR_w - IR_w \quad (18)$$

# Źródło prądowe i napięciowe



Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła napięciowego

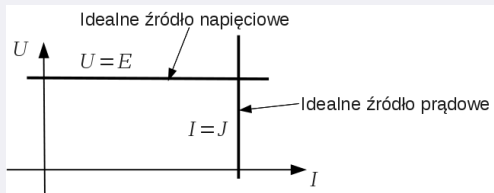
równanie opisujące źródło napięciowe:  $U = E - I R_w$



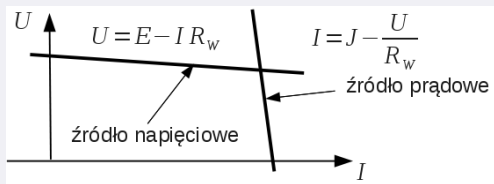
Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła prądowego  $I = J - \frac{U}{R_w}$

Dla schematu napięciowego mamy  $U = J R_w - I R_w$ , czyli siła elektromotoryczna napięciowego układu zastępczego dla źródła prądowego wynosi:  $E_z = J R_w$

# Idealne źródła napięciowe i prądowe



Rysunek: Idealne źródło prądowe napięciowe



Rysunek: źródło napięciowe i prądowe na wykresie  $U=U(I)$

# RÓWNOWAŻNOŚĆ SYSTEMÓW

kiedy dwa wielomiany  $W(x)$  i  $H(x)$  są równe: gdy mają jednakowe współczynniki

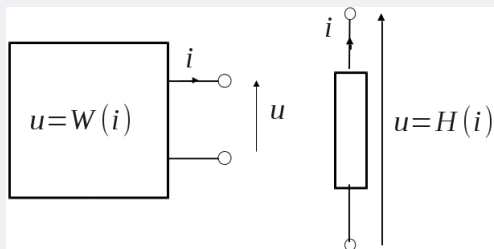
$$W(x) = ax^2 + bx + c \quad (19)$$

$$H(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (20)$$

$$W(x) \equiv H(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases} \quad (21)$$

# RÓWNOWAŻNOŚĆ DWÓJNIKÓW - układy zastępcze

Dwa dwójniki są równoważne jeśli równania są równoważne.



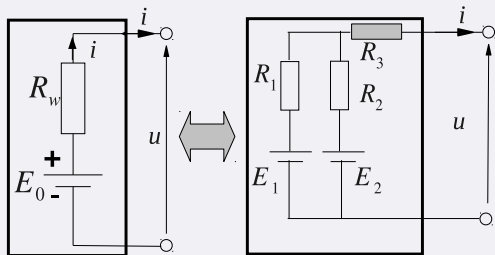
Rysunek: Dwa dwójniki opisane równaniami liniowymi  $W(i)$  i  $H(i)$ . W obu przypadkach prądy zostały zaznaczone jako wyływające.

$$W(i) = a + b i \text{ oraz } H(i) = E_0 - R_w i \quad (22)$$

$$W(i) \equiv H(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a = E_0 \\ b = -R_w \end{cases} \quad (23)$$

# Układ liniowy - dwa parametry

Układ liniowy opisany jest równaniem liniowym  $H(i) = ai + b$ , czyli określony jest dwoma parametrami  $a$  i  $b$ .

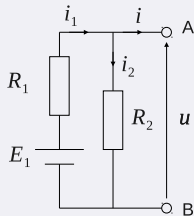


Rysunek: Układ opisany dwoma parametrami  $E_0$  i  $R_w$  jest równoważny układowi liniowemu złożonemu z dowolnej liczby elementów liniowych



# Przykład wyznaczania układu zastępczego

Wyznacz zastępczą wartość siły elektromotorycznej  $E_z$  i zastępczą rezystancję wewnętrzną  $R_z$ , czyli wyznacz parametry  $E_z$  i  $R_z$  modelu liniowego:  $u = E_z - iR_w$  poniższego układu:



Rysunek: Układ liniowy złożony z trzech elementów

$$E_1 = i_1 R_1 + i_2 R_2 \quad (24)$$

$$i_1 = i + i_2 \quad (25)$$

$$u = i_2 R_2 \quad (26)$$

$$E_1 = (i + i_2) R_1 + i_2 R_2 \quad (27)$$

$$i_2 = \frac{E_1 - R_1 i}{R_1 + R_2} \quad (28)$$

$$u = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (29)$$

$$\text{parametry zastępcze: } E_z = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ i } R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (30)$$

# INTERPRETACJA

Szukamy opisu układu liniowego przy pomocy równania  $u = H(i)$  dla  $H(i) = E_z - iR_z$ .

Rozwiązując równania Kirchoffa mamy  $u = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  więc:

$$E_z = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ i } R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (31)$$

$E_z$  - jest to napięcie na zaciskach układu AB gdy nie ma obciążenia (gdy nie płynie prąd)

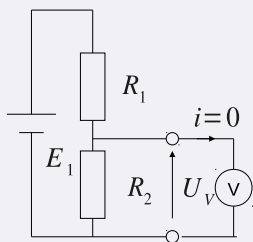
$$E_z = H(0) \quad (32)$$

Rezystancja  $R_z$  jest rezystancją widzianą z zacisków AB układu:

$$R_z = -\frac{d}{di} H(i) = -\frac{du}{di} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (33)$$

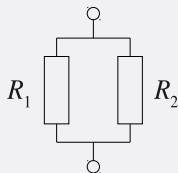
$$\text{lub } R_z = -\frac{u}{i} \text{ gdy } E_1 = 0 \text{ (źródła są „wyzerowane”)} \quad (34)$$

# Zastępcza wartość siły elektromotorycznej i rezystancji



$$E_z = U_V = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$E_1 = 0$$



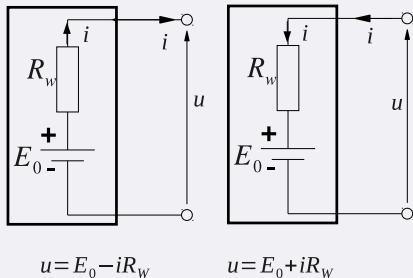
$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Rysunek: **Zasada Thevenina**: parametry napięciowego źródła zastępczego otrzymujemy – napięcie gdy prąd obciążenia dwójnika jest zerowy, rezystancja wewnętrzna gdy siły elektromotoryczne są zerowe.

# Dlaczego „-” we wzorze na rezystancję

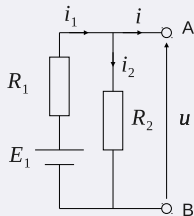
Rezystancja  $R_z$  jest rezystancją widzianą z zacisków AB układu:

$$R_z = -\frac{d}{di}H(i) = -\frac{du}{di} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (35)$$



Rysunek: gdy  $u = E_0 - iR_w$  wtedy  $R_z = -\frac{du}{di}$ , gdy  $u = E_0 + iR_w$  wtedy  $R_z = +\frac{du}{di}$

# Rezystancja zastępcza - obliczenia dla składowej zmiennej



Rysunek: Układ liniowy dwa rezystory ze źródłem napięciowym, Rezystancja zastępcza równoległe połączenie  $R_1$  i  $R_2$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (36)$$

$$\frac{1}{R_z} = -\frac{\Delta i}{\Delta u}$$

$$i = i_1 - i_2 \text{ czyli } \Delta i = \Delta i_1 - \Delta i_2$$

$$\frac{1}{R_z} = -\frac{\Delta i_1}{\Delta u} + \frac{\Delta i_2}{\Delta u}$$

$$u = i_2 R_2 \text{ czyli } \Delta u = \Delta i_2 R_2$$

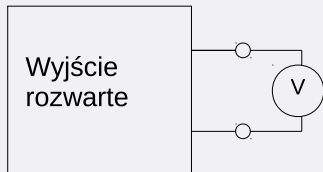
$$u = E_1 - i_1 R_1 \text{ czyli } \Delta u = -\Delta i_1 R_1$$

$$-\frac{\Delta i_1}{\Delta u} = \frac{1}{R_1}$$

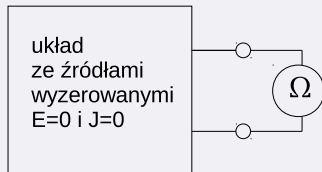
$$\frac{\Delta i_2}{\Delta u} = \frac{1}{R_2}$$

# Źródło zastępcze – twierdzenie Thevenin

Siła elektromotoryczna = napięcie dla prądu zerowego  
rezystancja = rezystancja układu dla zwartych sił elektromotorycznych i rozwartych źródeł prądowych



Pomiar woltomierzem

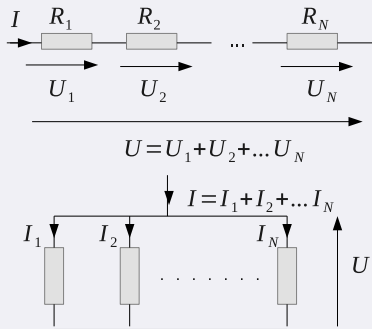


Pomiar omomierzem

Rysunek: Zasada Thevenina

# Rezystancja i konduktancja układów szeregowych i równoległych

Układ szeregowy - napięcie jest sumą napięć, układ równoległy - prąd jest sumą prądów.



Rysunek: Połączenie szeregowe i równoległe rezystorów

Układ szeregowy

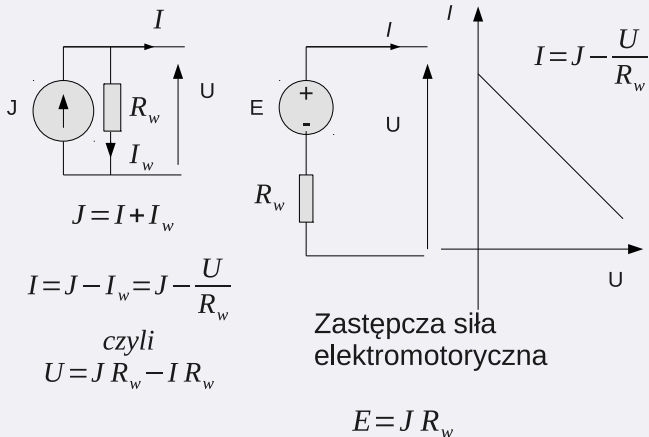
$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_N}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \dots + \frac{U_N}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

układ równoległy

$$\frac{1}{R} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_N}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \dots + \frac{I_N}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

konduktancja  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_N$

# Źródło prądowe

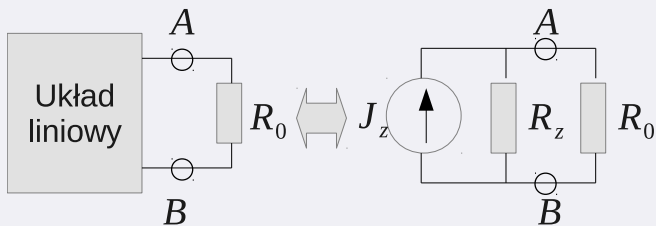


Rysunek: transformacja źródło prądowe - źródło napięciowe



# Twierdzenie Nortona o prądowym źródle zastępczym

Każdy dwójnik liniowy może być zastąpiony źródłem prądowym o wydajności  $J_z$  i rezystancji wewnętrznej  $R_z$ .

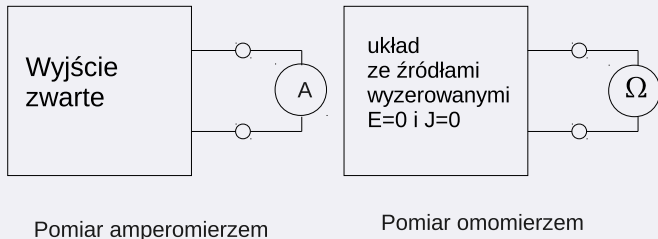


Rysunek: Układ zastępczy prądowy

# Twierdzenie Nortona, wyznaczania parametrów

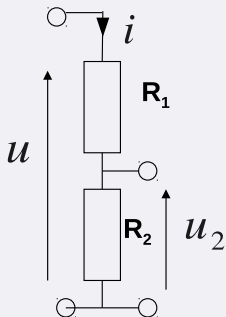
Wydajność prądowa = natężenie prądu dla zerowego napięcia (przy zwarciu)

rezystancja = rezystancja układu dla zwartych sił elektromotorycznych i rozwartych źródeł prądowych



Rysunek: Zasada Nortona

# Dzielnik napięcia



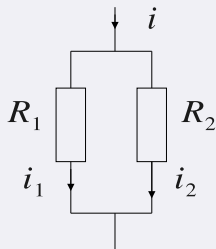
$$i = \frac{u}{R_1 + R_2} \quad (37)$$

$$u_2 = iR_2 \quad (38)$$

$$u_2 = u \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (39)$$

Rysunek: Dzielnik napięcia, napięcie jest proporcjonalne do rezystancji

# Dzielnik prądowy



$$\left. \begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ i_1 R_1 &= i_2 R_2 \end{aligned} \right\} i = i_2 \frac{R_2}{R_1} + i_2 \quad (40)$$

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} = i \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad (41)$$

Rysunek: Dzielnik prądowy

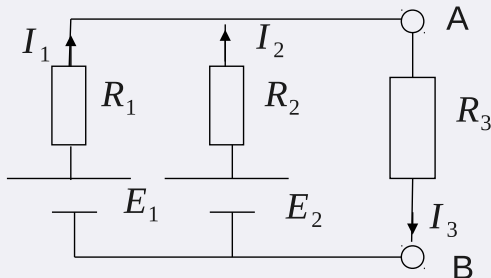
Rezystancja:  $R = \frac{u}{i}$ , konduktancja  $G = \frac{i}{u}$ .

# Metody wyznaczania prądów w układach liniowych

- 1 rozwiązanie równań Kirchoffa
- 2 metoda prądów oczkowych
- 3 zasada superpozycji
- 4 metoda źródła zastępczego
  - reguła Thevenina o napięciowym źródle zastępczym
  - Twierdzenie Nortona o prądowym źródle zastępczym
  - zasada superpozycji
  - transformacja źródło prądowe - napięciowe i składanie źródeł prądowych i napięciowych
- 5 metoda potencjałów węzłowych

# Układ z dwoma źródłami napięciowymi

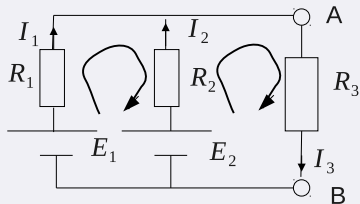
Wyznacz prąd  $I_3$  w układzie, w którym dane są  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ . Wyznacz zastępcze źródło napięciowe i prądowe względem zacisków A i B (gdy rezystor  $R_3$  jest odłączony).



Rysunek: Układ z dwoma źródłami napięciowymi

# Prawa Kirchofa dla dwóch źródeł

Zapisujemy prawa KIRCHOFFA:



$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (42)$$

$$E_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (43)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (44)$$

po podstawieniu:

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (45)$$

$$E_2 = I_1 R_3 + I_2 (R_2 + R_3) \quad (46)$$

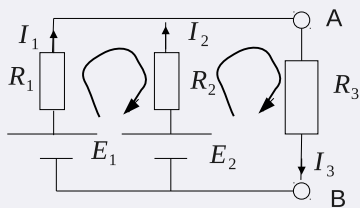
Rysunek: Układ z dwoma źródłami, układ oczek

Rozwiązujemy metodą wyznaczników. Wyznacznik

$$|W| = R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3.$$

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2)(R_2 + R_3) + E_2 R_2}{|W|}; \quad I_2 = \frac{R_1 E_2 + R_2 (E_1 - E_2)}{|W|}$$

# wyliczenie prądów



$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (48)$$

$$E_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (49)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (50)$$

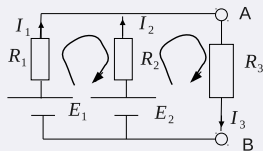
$$I_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \quad (51)$$

$$I_2 = \frac{E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (52)$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{E_2 R_1 + E_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (53)$$



# Metoda prądów oczkowych



$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (54)$$

$$E_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (55)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (56)$$

Rysunek: Układ z dwoma źródłami, układ oczek

Nowe zmienne:  $I_A$  i  $I_B$

$$I_1 = I_A, \quad (57)$$

$$I_2 = I_B - I_A, \quad (58)$$

$$I_3 = I_B. \quad (59)$$

$$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) - I_B R_2$$

$$E_2 = -I_A R_2 + I_B(R_2 + R_3)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix}$$

Wyznaczniki:

$$\begin{aligned} |W| &= \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \\ &= (R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} |W_A| &= \begin{vmatrix} E_1 - E_2 & -R_2 \\ E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \\ &= (E_1 - E_2)(R_2 + R_3) - E_2R_2 = E_1(R_1 + R_2) - E_2R_3 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} |W_B| &= \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E_1 - E_2 \\ -R_2 & E_2 \end{vmatrix} = \\ &= E_2(R_1 + R_2) - R_2(E_1 - E_2) = E_1R_2 + E_2R_1 \end{aligned} \quad (63)$$

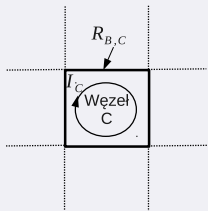
## Wynik dla prądów oczkowych

$$I_A = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (64)$$

$$I_B = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (65)$$

Prąd wyjściowy  $I_3 = I_B$

# metoda prądów oczkowych, zasada ogólna

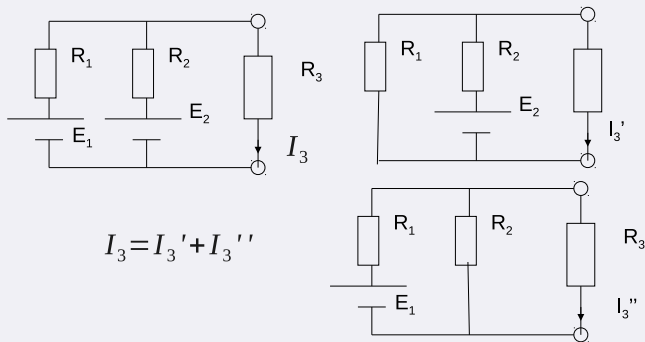


- $\sum_C E_i$  - suma sił elektromotorycznych w oczku C  
 $\sum_C R_i$  - suma rezystancji w oczku C,  
 $R_{B,C}$  - rezystancja wspólnej gałęzi oczka B i C.

$$\begin{bmatrix} \sum_A E_i \\ \sum_B E_i \\ \dots \\ \sum_Z E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_A R_i & -R_{A,B} & \dots & -R_{A,Z} \\ -R_{B,A} & \sum_B R_i & \dots & -R_{B,Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R_{Z,A} & \dots & \dots & \sum_Z R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ \dots \\ I_Z \end{bmatrix}$$

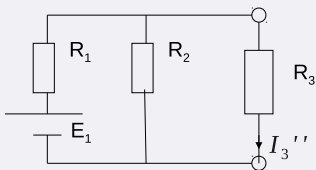
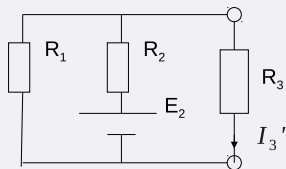
# Zasada superpozycji

Prąd = sumą prądów pochodzących od poszczególnych źródeł  
skrót: „prąd” = natężenie prądu elektrycznego



Rysunek: Zasada superpozycji

# Zasada superpozycji



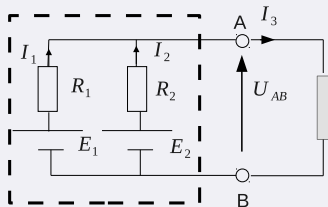
Rysunek: Zasada  
superpozycji, obliczenia

$$I_3' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \frac{R_1}{R_3 + R_1} \quad (66)$$

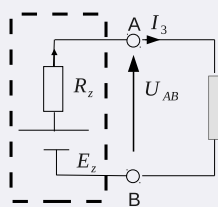
$$I_3'' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_3 + R_2} \quad (67)$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' \quad (68)$$

# Metoda źródła zastępczego - obliczenia z zasad Kirchoffa



Układ dwóch źródeł napięciowych



Układ równoważny

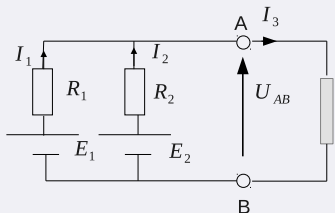
$$U_{AB} = E_z - R_z I_3$$

Rysunek: Równoważność układu dwóch źródeł (lewy schemat) z zastępczym źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej  $E_z$  i rezystancji wewnętrznej  $R_z$ . Układy zaznaczono ramką kreskową.

Zadanie: wyznacz parametry  $E_z$  i  $R_z$  źródła zastępczego dla układu równolegle połączonych źródeł napięciowych  $E_1$  i  $E_2$  o rezystancjach  $R_1$  i  $R_2$ .

## zastępcze źródło - równania Kirchoffa

Prawa Kirchoffa tak należy napisać aby można było wyznaczyć zależność napięcia  $U_{AB}$  od prądu  $I_3$  niezależnie od  $R_3$ , czyli w równaniach (48),(49),(50) należy  $U_{AB}$  wstawić w miejsce  $I_3 R_3$ :



$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (69)$$

$$E_2 = I_2 R_2 + U_{AB} \quad (70)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (71)$$

Wyliczamy  $I_1$  z równania (71):  $I_1 = I_3 - I_2$  i wstawiamy do (69):

$$E_1 - E_2 = (I_3 - I_2)R_1 - I_2 R_2 = I_3 R_1 - I_2(R_1 + R_2) \quad (72)$$

z tego wyznaczamy  $I_2$  i wstawiamy do (70) i wyznaczmy  $U_{AB}$ :

$$U_{AB} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} - I_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (73)$$



# Źródło zastępcze - interpretacja równań

Z rozwiązania równań Kirchoffa otrzymujemy:

$$U_{AB} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} - I_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (74)$$

Układ zastępczy opisany jest równaniem liniowym:

$$U_{AB} = E_z - I_3 R_z \quad (75)$$

czyli z równoważności układów mamy równość stałych i współczynników nachylenia:

$$E_z = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (76)$$

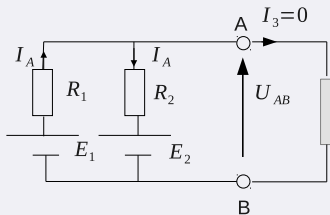
$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (77)$$

Siła elektromotoryczna  $E_z$  może być wyliczona z zasad Thevenina a także z połączenia równoległego źródeł prądowych.

Rezystancja zastępcza jest równoległym połączeniem rezystancji poszczególnych źródeł co wynika wprost z reguły Thevenina.

# Układ dwóch źródeł napięciowych - reguła Thevenina

Siła elektromotoryczna układu zastępczego równa jest napięciu gdy prąd  $I_3 = 0$ , w oczku płynie prąd  $I_A$  (ponieważ  $I_3 = 0$  więc  $I_1 = -I_2 = I_A$ ). Prawa Kirchoffa dla wyjścia bez obciążenia dla  $I_3$ :



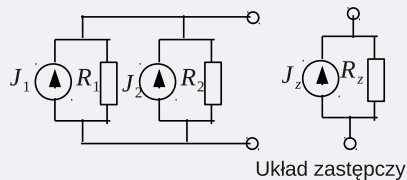
$$E_1 - E_2 = I_A(R_1 + R_2) \quad (78)$$

$$U_{AB} = E_2 + I_A R_2 \quad (79)$$

Czyli dla siły elektromotorycznej

$$E_z = U_{AB}(0) = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (80)$$

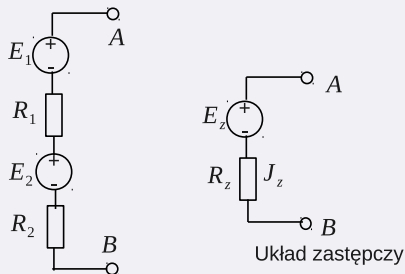
# Łączenie źródeł



Rysunek: składanie źródeł prądowych połączonych równolegle

$$J_z = J_1 + J_2 \quad (81)$$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (82)$$

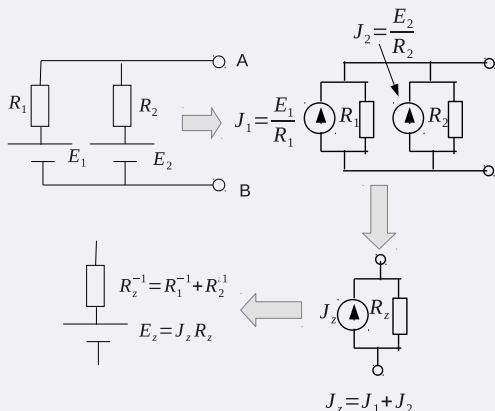


Rysunek: składanie źródeł napięciowych połączonych szeregowo

$$E_z = E_1 + E_2 \quad (83)$$

$$R_z = R_1 + R_2 \quad (84)$$

# Dwa źródła napięciowe połączone równolegle



Rysunek: Wyznaczenie źródła napięciowego przez transformację źródła napięciowe - źródło prądowe. Zastępcza siła elektromotoryczna:

$$E_z = (J_1 + J_2)R_z = \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$