

# Opracowywanie danych doświadczalnych

Michał K. Urbański,

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej, murba@if.pw.edu.pl

17 listopada 2016

## SPIS TREŚCI

<b>1. Wstęp</b>	<b>3</b>
1.1. Treść skryptu i rozkład materiału . . . . .	5
1.2. Model pomiaru, definicja pomiaru . . . . .	6
1.3. Fazy eksperymentu . . . . .	7
1.3.1. Planowanie eksperymentu pomiarowego . . . . .	9
1.3.2. Zorganizowanie zespołu badawczego . . . . .	9
1.3.3. Zestawienie układu pomiarowego i zapewnienie warunków pomiaru. . . . .	9
1.3.4. Wykonanie pomiarów . . . . .	10
1.3.5. Przetworzenie danych pomiarowych . . . . .	10
1.3.6. Ocena niepewności . . . . .	10
1.3.7. Interpretacja wyników pomiarów i wnioski . . . . .	11
1.4. Model obiektu, przedmiot badań . . . . .	11
1.4.1. Model obiektu . . . . .	11
1.4.2. Weryfikacja modelu . . . . .	15
1.5. Schemat układu pomiarowego . . . . .	16
1.6. Strategia eksperymentu . . . . .	17
1.6.1. Strategie wyznaczanie parametrów modelu . . . . .	18
1.7. Niepewność, podstawy prawne, publikacje i dokumenty . . . . .	20
1.8. Błąd, wartość prawdziwa, błąd systematyczny i przypadkowy . . . . .	21
1.9. Modele niepewności i metody jej wyznaczania . . . . .	26
<b>2. Elementy teorii pomiaru</b>	<b>28</b>
2.1. Wielkości fizyczne, mezurand . . . . .	29
2.2. Pomiar jako komparacja . . . . .	30
2.3. Teoria reprezentacji . . . . .	33
2.3.1. Struktura algebraiczna, relacje, działania . . . . .	34
2.3.2. Homomorfizm struktur algebraicznych . . . . .	35
2.3.3. Pomiar idealny, reprezentacja liczbowa . . . . .	37
2.3.4. Reprezentacja przedziałowa, błąd systematyczny . . . . .	37
2.3.5. Środek i promień sumy przedziałów, propagacja błędu maksymalnego . . . . .	38

<b>3. Podstawy teorii prawdopodobieństwa</b>	<b>39</b>
3.1. Pojęcia podstawowe . . . . .	39
3.2. Zmienna losowa, zbiór zdarzeń elementarnych . . . . .	40
3.2.1. Prawdopodobieństwo . . . . .	42
3.2.2. Zmienna losowa dyskretna . . . . .	43
3.3. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych . . . . .	44
3.4. Przypadek jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych . . . . .	45
3.5. Dystrybuanta . . . . .	46
3.6. Zmienna losowa ciągła, gęstość rozkładu prawdopodobieństwa . . . . .	46
3.7. Wartość oczekiwana . . . . .	47
3.7.1. Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretniej . . . . .	48
3.7.2. Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej, zmienna losowa dys- kretna . . . . .	48
3.7.3. Właściwości wartości oczekiwanej . . . . .	48
3.7.4. Przykłady obliczania wartości oczekiwanej . . . . .	49
3.7.5. Wartość oczekiwana zmiennej losowej ciągłej . . . . .	50
3.7.6. Wartość oczekiwana od funkcji zmiennej losowej, zmienna losowa ciągła . . . . .	51
3.8. Odchylenie standardowe – miara rozrzutu. . . . .	51
3.8.1. Odchylenie standardowe sumy zmiennych losowych . . . . .	52
3.8.2. Odchylenie standardowe sumy zmiennej losowej i stałej . . . . .	53
3.8.3. Uzasadnienie wzoru na wariancję . . . . .	53
3.9. Mediana, kwantyle . . . . .	54
3.10. Najczęściej wykorzystywane rozkłady prawdopodobieństwa . . . . .	55
3.10.1. Rozkład dwupunktowy . . . . .	55
3.10.2. Rozkład dwumianowy . . . . .	56
3.10.3. Rozkład normalny . . . . .	57
3.10.4. Rozkład jednostajny . . . . .	58
3.10.5. Rozkład Weibulla . . . . .	58
<b>4. Elementy statystyki matematycznej</b>	<b>59</b>
4.1. Estymacja prawdopodobieństwa z danych doświadczalnych, histogram . . . . .	60
4.1.1. Konstrukcja histogramu w przypadku obserwacji zmiennej losowej dyskretniej . . . . .	60
4.1.2. Konstrukcja histogramu w przypadku obserwacji zmiennej losowej ciągłej . . . . .	61
4.2. Estymatory wartości oczekiwanej . . . . .	63
4.2.1. Zasady doboru próby w badaniach statystycznych . . . . .	64
4.2.2. Własności wartości średniej z próby. Średnia z próby a rozkład empiryczny. . . . .	64
4.2.3. Przykłady obliczania średnich. . . . .	66
4.2.4. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe średniej z próby losowej	67
4.2.5. Estymator wariancji i odchylenia standardowego . . . . .	69
4.2.6. Estymator odchylenia standardowego w przypadku zmiennej losowej dyskretniej . . . . .	70
4.3. Rozstęp . . . . .	71

4.4. Estymacja przedziałowa, przedział ufności . . . . .	71
<b>5. Wyrażanie niepewności, zasady wyznaczania wartości mierzonych i niepewności</b>	<b>72</b>
5.1. Probabilistyczny model pomiaru . . . . .	72
5.2. Estymacja wartości mierzonej . . . . .	73
5.3. Niepewność . . . . .	74
5.4. Metody wyznaczania niepewności . . . . .	75
5.4.1. Niepewność względna . . . . .	76
5.4.2. Klasa dokładności . . . . .	76
5.4.3. Metoda statystyczna oceny niepewności standardowej (metoda A) .	76
5.4.4. Niepewność rozszerzona . . . . .	77
5.4.5. Niestatystyczne metody szacowania niepewności (metody typu B) .	78
5.4.6. Wyznaczanie niepewności na podstawie danych producenta . . . . .	79
5.4.7. Niepewność złożona (całkowita) w przypadku pomiaru bezpośredniego	80
5.4.8. Niepewność sumy dwóch wielkości - propagacja niepewności . . . . .	81
5.5. Źródła błędów i składowe niepewności . . . . .	82
5.5.1. Niepewność funkcji dwóch zmiennych . . . . .	85
5.6. Budżet niepewności . . . . .	86
5.7. Zasady zapisu wyniku pomiaru . . . . .	89
<b>6. Metoda najmniejszych kwadratów</b>	<b>90</b>
6.1. Dobór rodziny funkcji . . . . .	91
6.2. Kryteria dopasowania rodziny funkcji do danych empirycznych . . . . .	92
6.3. Dopasowanie funkcji liniowej $y = ax + b$ do danych empirycznych . . . . .	93
<b>7. Testowanie hipotez statystycznych</b>	<b>95</b>
7.1. Ogólny schemat weryfikacji hipotezy . . . . .	97
7.2. Moc testu, błąd drugiego rodzaju . . . . .	98
7.3. Test zgodności chi-kwadrat . . . . .	99
<b>8. Pojęcia podstawowe i ważniejsze definicje</b>	<b>103</b>
<b>9. Jednostki wielkości fizycznych, zamiana jednostek, wzorce</b>	<b>104</b>
<b>10. Przykładowe zadania</b>	<b>105</b>

## 1. WSTĘP

Pomiar jest podstawowym źródłem poznania w naukach przyrodniczych i dlatego teoria pomiarów i analiza danych doświadczalnych spełniają rolę metodologii badań eksperymentalnych. Teoria pomiarów obejmuje: matematyczne modele pomiaru, zasady konstrukcji przyrządów pomiarowych, analizę danych i metody wyznaczania niepewności. Matematycznymi podstawami teorii pomiarów są takie działy matematyki jak algebra, teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna.

Celem pomiaru jest poznanie właściwości badanych obiektów oraz podjęcie odpowiedniej decyzji praktycznej. Przykładem jest pomiar dla celów handlowych, wiedza o np. masie towaru jest niezbędna do podjęcia decyzji o zakupie towaru. Bezpośrednim wynikiem pomiaru jest wartość wielkości mierzonej. Punktem wyjścia dla wykonania pomiaru jest określenie mierzonej wielkości (nazywanej w metrologii mezurandem) i metody jej pomiaru (procedury pomiarowej). Empiryczna operacja przyporządkowania obiektom wartości wielkości wynika z metody pomiarowej i musi być opisana gdy podajemy wynik pomiaru. Wynik pomiaru jest zawsze przybliżoną wartością (czyli estymatą) wartości mierzonej i dlatego wartość mierzonej wielkości zawsze musi być podana razem z wartością niepewności (i oczywiście z jednostką mierzonej wielkości).

W tym skrypcie będziemy zajmowali się wyłącznie pomiarami wielkości fizycznych<sup>1</sup>. W fizyce zakłada się, że wartości wielkości są liczbami rzeczywistymi. Przez obiekt będziemy rozumieli cokolwiek co jest poznawalne metodami naukowymi, czyli wszystko co może być obserwowalne zmysłowo i mierzalne przy pomocy aparatury pomiarowej. Obiektem może być zjawisko, ciało lub proces, a także właściwość charakteryzująca zjawisko. Wielkością jest cecha fizyczna, która może być mierzona.<sup>2</sup>

Wyniki pomiaru nie są zbiorami liczb, tworzą strukturę, która powinna reprezentować rzeczywiste obiekty. Pomiar i jego wyniki powinny spełniać następujące warunki:

- 1) Pomiary nigdy nie są dokładne i wynik pomiaru reprezentowany jest przez parę liczb: wartość wielkości mierzonej i niepewność. Wynik pomiaru zawsze wymaga podania niepewności.
- 2) Przez wynik pomiaru należy rozumieć nie tylko wartość liczbową, ale też interpretację w ramach modelu opisującego mierzone zjawiska. Utożsamienie pomiaru z odczytem wskazania przyrządu pomiarowego jest znacznym uproszczeniem procesu pomiaru.
- 3) Liczby będące wynikami pomiarów określonej wielkości fizycznej powinny reprezentować relacje pomiędzy obiektami, dla których zmierzono tą wielkość.
- 4) Wartość wielkości mierzonej zawsze wyznaczana jest względem wzorca w konkretnych jednostkach, które muszą być podane razem z wartością liczbową. Wartość wielkości mierzonej jest liczbą mianowaną czyli parą: liczba i jednostka miary.

Odczytanie wskazań przyrządu pomiarowego jest jedynie jednym z etapów pomiaru. Prawidłowa interpretacja odczytanych wskazań przyrządów pomiarowych i właściwa analiza danych wymaga zrozumienia wszystkich składowych eksperymentu pomiarowego: zorganizowanie eksperymentu, wykonanie pomiaru, opracowanie danych, analizy niepewności i interpretacji wyników pomiaru.

### **Przykład 1.** Pomiar temperatury.

Rozważmy pomiar temperatury na zewnątrz budynku. Załóżmy, że termometr wskazuje  $-2,3^{\circ}\text{C}$ . Wynik pomiaru jest użyteczny, jeśli na podstawie uzyskanej wartości można podjąć decyzję, np. o ubiorze, w tym celu musimy podać warunki pomiaru: miejsce umiejscowienia termometru, wiatr (przepływ powietrza, czyli warunki wymiany ciepła

---

<sup>1</sup>W naukach społecznych wykonuje się pomiary wielkości niefizycznych, do pomiaru których tylko częściowo można zastosować opisane tutaj metody.

<sup>2</sup>Metrologicy wielkość mierzoną nazywają mezurandem, patrz definicja 2 na stronie 30

między człowiekiem a otoczeniem, co można opisać temperaturą odczuwalną), oświetlenie słoneczne, wilgotność, ciśnienie atmosferyczne i być może inne czynniki dotyczące kondycji (np. własne zmęczenie czy głód).

W powyższym przykładzie widać, że pomiar należy rozpatrywać w kontekście celu pomiaru i decyzji, które chcemy podjąć.

### 1.1. Treść skryptu i rozkład materiału

W procesie edukacji występuje zawsze problem doboru materiału i trzeba pogodzić sprzeczność pomiędzy ograniczonym czasem i możliwościami studentów a materiałem niezbędnym do tego aby móc samodzielnie dalej rozwijać twórczo daną dziedzinę. Zakładam, że tym skrypcie należy również umieścić materiał dla mniejszości studentów, którzy chcą poświęcić dodatkowy czas na rozwój swoich umiejętności i wiedzy w sposób wykraczający zakres materiału niezbędnego do zaliczenia przedmiotu i stosowania w praktyce laboratoryjnej.

Podstawą matematyczną analizy danych doświadczalnych jest teoria pomiaru (teoria reprezentacji<sup>3</sup>), teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna i temu poświęcone są trzy następne rozdziały skryptu. Analiza niepewności jest przedstawiona w rozdziale 5 i z punktu widzenia analizy danych doświadczalnych jest to jeden z najważniejszych rozdziałów książki. W dalszych rozdziałach omówiona jest metoda najmniejszych kwadratów (rozdział 6) i teoria testowania hipotez (rozdział 7), skrypt kończy omówienie jednostek wielkości fizycznych i opis podstawowych narzędzi pomiarowych.

W programie nauczania fizyków nie ma przedmiotu „Metrologia”, dlatego też umieściłem rozdział wprowadzający do teorii pomiarów i w końcowej części opis podstawowych jednostek fizycznych i ich pomiar. Wykład z teorii pomiarów z konieczności jest skrótowy i przeznaczony dla tych studentów którzy chcą pogłębić swoją wiedzę. Teoria prawdopodobieństwa i elementy statystyki są niezbędne do zrozumienia zasad analizy danych pomiarowych i wyłożone są w kolejnych rozdziałach. Będą one przedmiotem nauczania w programie matematyki na dalszych latach ale dla potrzeb pierwszego roku musiałem umieścić niezbędną wiedzę aby studenci mogli chociaż w jakimś stopniu zrozumieć skąd biorą się wzory niezbędne do analizy niepewności.

Analiza danych doświadczalnych potrzebna do przygotowania sprawozdań z laboratoriów i dlatego konieczne jest wyprzedzenie program z matematyki. Tak więc matematyczne podstawy probabilistyki i statystyki poprzedzone będą praktyką stosowania metod statystycznych na laboratorium i dzięki powtórzeniu części materiału będą mogli lepiej skorzystać z zajęć z matematyki.

Z punktu widzenia matematycznego każdy tekst powinien zawierać definicje wszystkich użytych terminów zanim się ich użyje. Z tego punktu widzenia została wybrana kolejność rozdziałów: najpierw matematyczne podstawy teorii pomiarów, teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej a potem zastosowania w analizie danych pomiarowych. Jedynie pierwszy rozdział omawiający wstępnie zasady wyznaczania niepewności korzysta z pojęć, które będą wyjaśnione w dalszej części.

Przy pierwszej lekturze można ominąć rozdziały matematyczne i po wstępie rozpocząć lekturę od rozdziału 5 pt.: „Wyrażenie niepewności” opisujący zasady wyznaczania

---

<sup>3</sup>Teoria reprezentacji, jest teorią algebraiczną.

wartości mezurandu i niepewności. Sugeruję aby przeczytać skrypt dwufazowo, najpierw przeczytać wstępnie rozdział 5 „Wyrażanie niepewności”, potem przestudiować matematyczne podstawy (teorię prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną) a następnie wrócić do rozdziału 5 i dokładnie go przestudiować.

Rozdziały końcowe poświęcone testowaniu hipotez i metodzie najmniejszych kwadratów należy czytać po przestudiowaniu podstaw rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Dla osób dociekliwych, które chcą zrozumieć język matematyki, polecam zapoznania się z podstawami matematyki np. wg podręczników Rasiowej [16] i Kuratowskiego [7], lub też udział w zajęciach dla matematyków (dla roku pierwszego).

## 1.2. Model pomiaru, definicja pomiaru

Zgodnie ze słownikiem terminów metrologii<sup>4</sup> pomiar jest zbiorem operacji empirycznych mających na celu wyznaczenie wartości wielkości.

Pomiar dowolnej wielkości (oznaczymy ją umownie  $\kappa$ )<sup>5</sup> możemy opisać odwzorowaniem  $\Phi_\kappa$ . Używając terminów matematyki powiemy, że odwzorowanie  $\Phi_\kappa$  reprezentuje<sup>6</sup> wielkość fizyczną  $\kappa$  (patrz rozdział 2):

$$\Phi_\kappa : V \rightarrow \mathbb{R} \times W \quad (1)$$

we wzorze powyższym występują następujące pojęcia:

- 1) Odwzorowanie  $\Phi_\kappa$  reprezentujące wielkość (wielkość fizyczną  $\kappa$ ), w metrologii odwzorowanie to nazywane jest *mezurandem*<sup>7</sup>. Z praktycznego punktu widzenia będziemy utożsamiać wielkość fizyczną  $\kappa$  z odwzorowaniem  $\Phi_\kappa$  reprezentującym tą wielkość.
- 2)  $V$  – zbiór obiektów mierzalnych (przedmiotów pomiaru). Obiektem mierzalnym może być wszystko, co może być poddane operacji pomiaru. Pojęcie obiektu obejmuje zjawiska, przedmioty i procesy.
- 3)  $\mathbb{R}$  - zbiór liczb rzeczywistych. Zakładamy, że wartości mierzonych wielkości są liczbami rzeczywistymi<sup>8</sup>.
- 4)  $W$  - zbiór jednostek wielkości fizycznych. Każda wielkość musi wyrażona w jednostkach odpowiednich do danej wielkości i odpowiadających wzorcom tej wielkości. Zbiór jednostek ma postać:  $W = \{s, m, kg, A, K, N, \dots\}$

Wartość wielkości  $\Phi_\kappa$  dla obiektu  $a \in V$  zapisujemy jako  $\Phi_\kappa(a)$ <sup>9</sup>, czyli jest to wartość funkcji  $\Phi_\kappa$  w punkcie  $a$ . Odróżniamy więc wielkość, oznaczoną jako  $\Phi_\kappa$ , od wartości wielkości  $\Phi_\kappa(a)$ , wartość wielkości jest wynikiem pomiaru wielkości  $\Phi_\kappa$  dla obiektu  $a$ .

Wartość wielkości ustalana jest empirycznie i zawsze uzyskujemy wartość przybliżoną, dlatego niezbędne jest podawanie niepewności każdego pomiaru.

<sup>4</sup>Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii [11]

<sup>5</sup>Przez symbol  $\kappa$  oznaczamy dowolną wielkość fizyczną np. długość, masę, ładunek elektryczny, dla przykładu odwzorowanie opisujące pomiar masy oznaczmy  $\Phi_m$ , gdzie  $m$  oznacza masę (przykład 2)

<sup>6</sup>Termin „reprezentacja” oznacza odpowiedni opis matematyczny. W tym przypadku powiemy, że odwzorowanie  $\Phi_\kappa$  opisuje wielkość fizyczną. Terminu „reprezentuje” używa się więc zamiast pojęcia potocznego „opisuje”.

<sup>7</sup>Mezurandem nazywamy wielkość fizyczną, definicja mezurandu powinna zawierać warunki pomiaru tej wielkości fizycznej (patrze definicja 2 na stronie 30).

<sup>8</sup>W naukach społecznych wynikiem pomiaru mogą być dowolne symbole, ale w fizyce ograniczymy się do wielkości fizycznych wyrażanych liczbami.

<sup>9</sup>Funkcję będzie zapisywać literą bez argumentu np.:  $f$  [7], zapis  $f(x)$  oznacza wartość funkcji w punkcie  $x$ , czyli wartość  $f$  dla argumentu  $x$

## Przykład 2. Pomiar masy.

Rozważmy pojęcie „masa”. Masa w sensie ogólnym jest właściwością ciał fizycznych i zdefiniowana jest poprzez sposób jej obserwacji. Zazwyczaj zakłada się, że waga jest sposobem wyznaczania masy ciał. Jeśli zmierzmy masę np. jabłka i otrzymamy 350g to powinniśmy to zapisać  $m(\text{jabłko}) = 350g$ , co czytamy: masa jabłka wynosi 350g. Litera  $m$  oznacza tu masę rozumianą jako funkcję, która obiektom przyporządkowuje wartości, co zapisujemy jako  $m : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \{g\}$ , gdzie  $\mathbb{R}^+$  - liczby rzeczywiste dodatnie a  $\{g\}$  - jednostkę masy gram zapisaną jako zbiór jednoelementowy. Zgodnie z zapisem we wzorze (1) odwzorowanie reprezentujące masę powinniśmy zapisać jako  $\Phi_m : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \{g\}$ , jednak w praktyce wygodnie jest to odwzorowanie utożsamiać z masą i oznaczyć odwzorowanie  $\Phi_m$  nazwą wielkości  $m$  ( $\Phi_m \equiv m$ ).

Ogólna teoria pomiaru opisana jest w skrócie w rozdziale 2, gdzie podane są matematyczne warunki poprawnej reprezentacji mierzonych obiektów przez liczby.

### 1.3. Fazy eksperymentu

Każde działanie ludzkie realizuje się w warunkach określonych przez układy społeczne i uwarunkowania przyrodnicze. Dotyczy to również każdego pomiaru, który jest zazwyczaj elementem jakiegoś szerszego zadania. Warunki te nazwiemy warunkami zewnętrznymi i obejmują:

- 1) cele pomiaru wyznaczone przez zadania, dla których realizowany jest pomiar,
- 2) środki finansowe i warunki techniczne (posiadane sprzęt i dostęp do laboratoriów),
- 3) wiedzę na temat przedmiotu badania (zjawisk, procesów, obiektów, ciał) i metod pomiarowych,
- 4) umiejętności osób wykonujących pomiary,
- 5) oddziaływania pól fizycznych w miejscu wykonywania eksperymentu pomiarowego, dotyczy to pola grawitacyjnego, elektromagnetycznego (naturalnego i zakłóceń), temperatury, ciśnienia, składu powietrza i innych czynników fizycznych i biologicznych (np. bakterie wpływające zarówno na eksperymentatora jak i używaną aparaturę).

Warunki te są podstawą określenia planu badawczego jaki będzie można realizować.

W przypadku pomiarów w laboratorium studenckim celem wyznaczonym przez Uniwersytet czy Politechnikę jest nauczanie studentów podstawowych zasad prowadzenia pomiarów laboratoryjnych i rozumienie procesów fizycznych zachodzących w obserwowanych zjawiskach (zaliczenie przedmiotu jest środkiem do uzyskania dyplomu a nie celem edukacji).

Zanim przystąpimy do planowania eksperymentu należy zapoznać się z wiedzą teoretyczną i empiryczną o badanym obiekcie, czyli niezbędne jest zapoznanie się z literaturą naukową w danym temacie w celu ustalenia modelu badanego obiektu (teorii badanego zjawiska). Zakres tych studiów zależy oczywiście od celów, środków finansowych i ograniczeń czasowych na wykonanie badań (czas i pieniądze tworzą ramy badań empirycznych). W przypadku ćwiczenia studenckiego niezbędne jest zapoznanie się z instrukcją do ćwiczenia jak również z podstawową literaturą (podręcznikiem) niezbędną do zrozumienia badanego zjawiska.

Pomiary stosuje się we wszystkich dziedzinach życia, nauki, handlu przemysłu. Cele pomiaru możemy podzielić na następujące grupy różniące się stopniem udziału aspektu poznawczego i rynkowego:

- Badawcze (poznawanie zjawisk, tworzenie modeli rzeczywistości),
- Technologiczne (rozwój technologii, kontrola produkcji),
- Handlowe.
- Domowe (użytek domowy, prywatny taki jak pomiar czasu, temperatury, masy)

Podział ten nie jest zapewne kompletny, ale ma zwrócić uwagę na różne aspekty pomiaru i ich rolę w planowaniu pomiarów.

Przedmiot badań czyli obiekt pomiaru identyfikowany jest (odróżniany od innych) dzięki temu, że mamy jego model. Model może być bardzo prosty opisujący podstawowe własności obiektu pozwalające na jego identyfikację i często nie uświadamiamy sobie, że korzystamy z modeli rzeczywistości. Podczas wieloletniej edukacji uczymy się wiedzy teoretycznej o obiektach rzeczywistości i uczymy posługiwać się modelami. Przyjmujemy, że każda obserwacja nawet potoczna i każdy pomiar wymaga wiedzy teoretycznej – uświadomionej lub też nieświadomionej. Nawet pomiar masy kupowanych ziemniaków w sklepie odbywa się przy założeniu, że mierzony obiekt jest izolowany od sił zewnętrznych innych niż grawitacyjne (nie należy dodatkowo przykładać dodatkowych sił do ziemniaków podczas ważenia).

Wstępne badania nad modelem badanego zjawiska powinny pozwolić na sensowne zaplanowanie badań. W przypadku laboratorium studenckiego, mimo że plan eksperymentów został ustalony przez pracowników uczelni, to student powinien zapoznać się z odpowiednią teorią badanych obiektów czyli zjawisk, ciał i procesów fizycznych.

Można wyróżnić następujące fazy eksperymentu pomiarowego:

- 1) planowanie eksperymentu przy założonym celu badań, wyjściowym modelu obiektu ram finansowych i czasowych
- 2) zebranie odpowiedniego zespołu badawczego, o odpowiednich kompetencjach
- 3) zestawienie układu pomiarowego, testowanie i zapewnienie warunków pomiaru
- 4) wykonanie eksperymentu pomiarowego i odczytanie wskazań przyrządów pomiarowych (często tę operację nazywa się pomiarem, ale poprawna wartość wielkości mierzonej można podać dopiero po opracowaniu wyniku odczytu)
- 5) przetworzenie uzyskanych danych, czyli wykonanie obliczeń w celu wyznaczenia wartości mierzonych wielkości. Zasady wykonywania obliczeń wynikają z modelu badanego obiektu i celu badań
- 6) ocena dokładności wyznaczonej wartości (wyznaczenie niepewności)
- 7) interpretacja uzyskanych wyników w ramach teorii obserwowanych zjawisk i wysunięcie wniosków (zgodność wyników pomiarów z teorią, zaplanowanie nowego doświadczenia lub opracowanie nowej teorii)

W przypadku eksperymentów przeprowadzanych w laboratorium studenckim dwa pierwsze etapy wykonane zostały przez pracowników uczelni. Ponadto gdy korzystamy ze współczesnych skomputeryzowanych systemów pomiarowych fazy 3 i 4, a często i 5 są połączone i automatycznie wykonywane przez komputer (dla zadanego w programie komputerowym modelu zjawiska). Ocena niepewności jest bardzo ważną składową opracowywania wyników pomiarów, bowiem od dokładności zależą wnioski i użyteczność wykonanych pomiarów. Etap ostatni - interpretacja wyników i wysuwanie wniosków – zależy



od celów eksperymentu i powinien zawierać wnioski dotyczące dalszych badań i sposobów wykorzystania wyników pomiarów. W sprawozdaniu z badań (jak i w sprawozdaniu studenckim z laboratorium), wszystkie powyższe etapy eksperymentu muszą być opisane.

Omówimy teraz kolejne fazy eksperymentu.

### **1.3.1. Planowanie eksperymentu pomiarowego**

W ramach planowania eksperymentu musimy ustalić:

- 1) Cel badań.
- 2) Metodę pomiarową adekwatną do modelu badanego obiektu.
- 3) Dokładność pomiarów niezbędną do osiągnięcia zakładanego celu.
- 4) Aparaturę, którą należy dobrać do celu i wymaganej dokładności.
- 5) Finanse, zbadać czy środki finansowe i posiadane zasoby laboratoryjne są wystarczające do przeprowadzenia pomiarów o wymaganej dokładności.
- 6) Zespół badawczy: liczbę niezbędnych specjalistów, obsługę techniczną, a dla wielkich eksperymentów obsługę administracyjną i sposób zarządzania projektem.
- 7) Zestaw przyrządów pomiarowych dostosowany do celu badań, wymaganej dokładności i posiadanych środków finansowych.
- 8) Sposób wykorzystania komputera (sterowanie pomiarem i analiza danych).
- 9) Warunki eksperymentu zapewniające wymaganą dokładność i zgodność z założonym celem i modelem.
- 10) Plan czasowy eksperymentu (czy jesteśmy w stanie przeprowadzić badania w czasie przewidzianym w założeniach).

W przypadku pomiarów handlowych i technicznych dokładność pomiaru wyznaczają odpowiednie przepisy i normy, a przyrządy pomiarowe muszą posiadać aktualną legalizację Głównego Urzędu Miar. W przypadku badań naukowych ocena dokładności jest ważną i często trudną składową sporządzania projektu badań. Należy tu podkreślić, że dokładność jest bardzo kosztowna, np. multimetr amatorski klasy 10% kosztuje na bazarze ok. 10–15 zł, natomiast przyrząd profesjonalny o dokładności  $10^{-6}$  ma cenę kilka tysięcy zł, a o dokładności  $10^{-8}$  ma cenę w dziesiątkach tysięcy zł (ceny z 2013 roku, ale proporcje są zachowane niezależnie od kursu walut).

### **1.3.2. Zorganizowanie zespołu badawczego**

Wielkość zespołu zależy od wielkości planowanych badań. Zespół badawczy składa się w najprostszym przypadku z dwóch grup: pracowników merytorycznych (naukowych w przypadku np. uniwersytetu) oraz obsługi. Zazwyczaj wielkość obsługi technicznej i administracyjnej rośnie z wielkością projektu znacznie szybciej niż liczba pracowników merytorycznych.

### **1.3.3. Zestawienie układu pomiarowego i zapewnienie warunków pomiaru.**

Zestawienie i uruchomienie stanowiska pomiarowego jest zazwyczaj procesem zajmującym znacznie więcej czasu i wysiłku niż same pomiary i zazwyczaj też ten etap wymaga wysokich kwalifikacji. Wykonanie pomiarów można powierzyć osobom znacznie mniej wykwalifikowanym niż wymaga tego etap projektowania, zestawiania i testowania aparatury. Po zestawieniu przyrządów pomiarowych i sterujących należy:

- wykonać pomiary próbne testujące posiadane przyrządy dla wzorcowych i znanych obiektów (w tym zerowych w celu wyzerowania aparatury).
- określić wpływ warunków eksperymentu na badany obiekt. Przez warunki rozumieć będziemy wszystkie czynniki (zewnętrzne i wewnętrzne) określające badany obiekt takie jak: moment obserwacji, czas trwania pomiarów, pola zewnętrzne (temperatura, ciśnienie, grawitacja, pola elektryczne itd.).
- określić wpływ otoczenia na mierzone wielkości i zapoznać się z czynnikami, które mogą zakłócać pomiary (np. pola emitowane przez urządzenia energetyczne),
- określić (w sposób ilościowy) wpływ przyrządów pomiarowych na badany obiekt (przyrząd zawsze oddziałuje z badanym obiektem zmieniając jego stan, np.: woltomierz zmienia rozptył prądów, termometr zmienia rozkład temperatury, itd.).

Warunki eksperymentu muszą być dostosowane do właściwości badanego obiektu bowiem to warunki decydują o możliwości obserwacji tego obiektu. Najczęściej w fizyce obiektem badań jest zjawisko, które występuje w odpowiednich warunkach, tak więc organizacja eksperymentu musi zapewniać wystąpienie tych warunków. Jeżeli np. zjawisko jest uwarunkowane momentem czasowym (zjawiska naturalne np. zaćmienie Słońca), to czas jest czynnikiem decydującym o zaobserwowaniu zjawiska i wykonaniu pomiarów. Precyzyjne badania wymagają określenia wpływu zmiany warunków na badany obiekt i określenia granic tolerancji obserwowalności zjawiska.

#### 1.3.4. Wykonanie pomiarów

Kiedy już wszystko jest właściwie przygotowane wykonanie pomiarów może być bardzo proste i nie wymagające wiedzy fachowej, a w przypadku wykorzystania układu skomputeryzowanego pomiar wykonuje się „sam”. Jednak aby poprawnie zinterpretować wyniki pomiarów należy zapoznać się z modelem fizycznym obiektu i zasadami działania aparatury pomiarowej. W warunkach laboratorium studenckiego ten etap student powinien wykonać samodzielnie rozumiejąc co robi.

#### 1.3.5. Przetworzenie danych pomiarowych

Celem pomiaru bardzo rzadko bywa „surowy” wynik pomiaru (z takimi sytuacjami mamy do czynienia często w handlu), zazwyczaj wynik musimy przetworzyć w celu wyznaczenia parametrów opisujących badany obiekt. Przetworzenie surowych wyników pomiaru polega zazwyczaj na wyznaczeniu wielkości, która może być zinterpretowana w ramach realizacji celu pomiaru.

Przykładem analizy danych pomiarowych jest wyznaczenie z serii danych wartości średniej i odchylenia standardowego. W przypadku gdy modelem zjawiska jest pewna znana funkcja metodą analizy danych jest metoda najmniejszych kwadratów.

#### 1.3.6. Ocena niepewności

Każdy pomiar jest operacją niedokładną i zawsze, niezależnie od tego jak dokładnie jest wykonywany musimy dokonać oceny ilościowej niepewności pomiaru. Wynik pomiaru jest estymatą (wartością przybliżoną) mierzonej wielkości. Podstawą tej oceny są: wyniki

pomiarów (seria danych), dane dotyczące aparatury pomiarowej (umieszczone na przyrządach lub w instrukcji dostarczonej przez producenta) oraz własna analiza źródeł błędów poparta dodatkowymi pomiarami.

### 1.3.7. Interpretacja wyników pomiarów i wnioski

Interpretacja zależy od celów pomiaru, w przypadku celów poznawczych podstawowym zadaniem interpretacji jest porównanie wyników pomiarów z modelem teoretycznym i ocena ilościowa (statystyczna) uzyskanej zgodności, np. może to być weryfikacja hipotezy sformułowana językiem statystyki matematycznej. W wielu przypadkach zgodność taka określamy jako zgodność teorii z eksperymentem w granicach błędu pomiarowego (mierzonego niepewnością).

## 1.4. Model obiektu, przedmiot badań

Przedmiotem badań (nazywanym obiektem) może być każde ciało, proces, pole fizyczne lub zjawisko, które może być wyodrębnione dzięki cechom charakterystycznym wyróżniającym ten przedmiot. Przez „obiekt” będziemy nazywali cokolwiek co może być nazwane, obserwowane i pomierzone, tak więc jest to bardzo ogólne pojęcie. Obiekt musi być opisany jakimś językiem, opis językiem potocznym jest zazwyczaj zbyt mało precyzyjny, dlatego musimy posługiwać się modelami sformułowanymi w języku naukowym fizyki, chemii, biologii itp.

Przedmiot badań jest tym precyzyjniej określony im lepszym modelem badanego obiektu dysponujemy. W przypadku gdy przedmiotem badań są obiekty fizyczne takie jak zjawiska, pola lub ciała fizyczne to model obiektu nazywamy zazwyczaj teorią tego obiektu. Każdy pomiar odbywa się przy założeniu jakiegoś modelu przedmiotu badań i zawsze powinniśmy sprawdzić w jakim stopniu model ten opisuje badany przedmiot. Często wnioskiem z wykonywanych badań jest to, że zastosowany model jest za mało dokładny i trzeba go poprawić.

Zazwyczaj zakładamy, że obiekty badań istnieją realnie<sup>10</sup>, jednak nauka zawsze opisuje obiekty poprzez modele, które stale doskonalimy w wyniku badań naukowych. Przez obiekt będziemy rozumieli ciała fizyczne, zjawiska lub procesy.

### 1.4.1. Model obiektu

Przez model (zazwyczaj obiektu materialnego będącego elementem rzeczywistości) rozumiemy opis obiektu w języku potocznym lub matematycznym. Rolą modelu jest:

- 1) przekaz informacji o obiekcie. Model zastępuje obiekt w opisie rzeczywistości. Dzięki modelowi możliwe jest gromadzenie wiedzy o rzeczywistości.
- 2) sterowanie obiektem, przewidywanie zachowania i możliwości modyfikacji tego zachowania.

Podstawową składową modelu są zasady przyporządkowujące właściwości obiektu materialnego odpowiednim obiektom językowym (nazwy i relacje). W języku fizyki modelem

---

<sup>10</sup>Spór filozoficzny o istnienie bytów nie ma istotnego wpływu na konstrukcję teorii naukowych jak i budowę aparatury pomiarowej

obiektu jest zespół założeń i równań opisujących obiekt wraz z zasadami interpretacji równań i metodami identyfikacji obiektu. Model zawiera następujące składowe:

- 1) Opis obiektu w języku matematycznym lub potocznym, wraz z założeniami, przy których określony zbiór parametrów opisuje badany obiekt. Opiszem matematycznym są równania matematyczne reprezentujące relacje pomiędzy wielkościami fizycznymi (parametrami) charakteryzującymi badany obiekt. Modelem matematycznym jest zazwyczaj równanie.
- 2) Sposób wyróżniania (identyfikacji) obiektu. Obiekt wyróżniamy poprzez wykonanie odpowiednich czynności poznawczych (w odpowiednich warunkach) pozwalających na porównanie wyniku obserwacji z opisem definiującym obiekt.
- 3) Metody obserwacji i pomiaru wielkości fizycznych (parametrów) charakteryzujących obiekt. Do metod obserwacji zaliczymy założenia określające warunki wykonywania pomiarów.

Modele matematyczne obiektów dzielimy na:

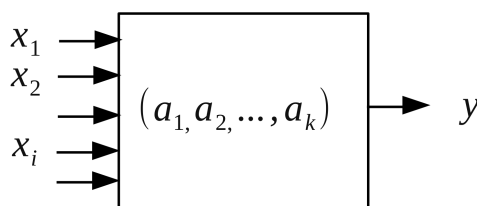
- dynamiczne, zapisane zazwyczaj w postaci równań różniczkowych
- statyczne, opisane zależnością funkcyjną zmiennych opisujących parametry obiektu.

W tej książce zajmujemy się jedynie modelami statycznymi, obiekty opisane więc będą równaniem o postaci:

$$y = f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_k) \quad (2)$$

gdzie:  $y$  - zmienna fizyczna, którą traktujemy jako zmienną wyjściową (lub zmienną zależną) czyli wielkość, która zmienia się w wyniku eksperymentu,  $x_1, \dots, x_n$  - parametry kontrolne czyli zmienne niezależne, przy pomocy których kontrolujemy przebieg eksperymentu,  $a_1, \dots, a_k$  - parametry wewnętrzne określające własności badanego obiektu. Podział zmiennych na zmienne wyjściowe (zależne), niezależne i wewnętrzne jest często umowny i zależy od warunków i założeń eksperymentu.

Równanie (2) można symbolicznie przedstawić w postaci schematu „pudełkowego” reprezentującego układ mający  $n$  wejść  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), jedno wyjście  $y$  i  $k$  parametrów  $a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) określających stan wewnętrzny układu (rys 1).



**Rysunek 1.** Schemat „pudełkowy” układu z  $n$  wejściami i jednym wyjściem  $y$ . Wektor  $(a_1, \dots, a_k)$  opisuje stan wewnętrzny

Równania matematyczne bez odpowiedniej interpretacji (interpretacji fizycznej dla zjawisk fizycznych) nie są modelem a jedynie zbiorem równań matematycznych. Rozpatrzymy kilka przykładów dotyczących znanych wszystkim obiektów – ciał fizycznych.

### Przykład 3. Rezystor (opornik elektryczny).

Rezystancja jest parametrem opisującym obiekty, które zostały wyposażone w elektrody (sztuczne - wyprodukowane przez człowieka) mające dwa wyprowadzenia. Obiekt który można opisać przy pomocy dyskretnych parametrów nazywany jest krótko, że ciało

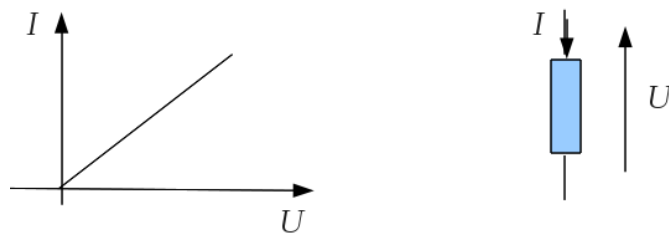
jest obiektem o stałych skupionych. Modelem rezystora jest zazwyczaj funkcja liniowa opisująca zależność napięcia elektrycznego od natężenie prądu elektrycznego (prawo Ohma):

$$I = \frac{1}{R}U \quad (3)$$

Zmienną wyjściową jest natężenie prądu  $I$ , a parametrem kontrolnym jest napięcie elektryczne  $U$ . Rezystancja  $R$  jest tu parametrem wewnętrznym charakteryzującym badany obiekt (w równaniu typu (2) będzie jeden parametr).

Jeśli jak w równaniu (3) model ma postać równania liniowego z jednym parametrem  $R$  to taki model nazwiemy prawem Ohma.

Model taki jest uproszczony, ale w wielu przypadkach całkowicie wystarczający. W celu wyznaczenia rezystancji elektrycznej w ramach takiego modelu wystarczy zmierzyć napięcie pomiędzy dwoma punktami badanego ciała i natężenie prądu przez nie płynące a następnie podzielić dwie wartości tych wielkości. Należy pamiętać, że dla obiektów zachowujących się nieliniowo (np. przyrządów półprzewodnikowych) podstawą interpretacji wyników pomiarów nie może być model liniowy bo może prowadzić do dużych błędów metody pomiarowej. W celu pełniejszego i dokładniejszego zbadania rezystora niezbędne są pomiary zależności natężenia prądu od napięcia i określenia funkcji  $I(U)$  i sprawdzenie metodami statystycznymi (np. metodą najmniejszych kwadratów opisaną w rozdziale 6) jaka funkcja najlepiej pasuje do danych empirycznych.

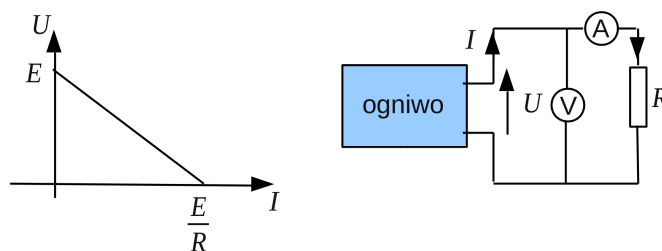


**Rysunek 2.** Prawo Ohma i zasady strzałkowanie napięć i prądów. Prąd płynie od plusa do minusa, a strzałka napięcia pokazuje plus napięcia.

#### Przykład 4. Kubek.

Gdy mówimy o kubku mamy na myśli ciało o określonej geometrii, pełniące funkcję naczynia, w którym można przechowywać ciecz. Parametrem określającym podstawowe cechy użytkowe jest objętość. Jednak ważne też są inne cechy: masa, cechy estetyczne, własności wytrzymałościowe, odporność na temperaturę oraz skoki temperatury, odporność na chemiczne działanie cieczy, łatwość mycia itd. Gdy myślimy potocznie o kubku sprawa wydaje się prosta jednak gdy chcemy opisać go precyzyjnie, pojawiają się trudności z doprecyzowaniem pojęć oraz metod obserwacji. Bez doprecyzowania pojęć i metod nie byłoby nauki ani zaawansowanej technologii. Na podstawie modelu obiektu (czyli wiedzy o obiekcie) może być opracowana masowa produkcja, jakość produkcji zależy od dokładności modelu i precyzji pomiaru.

**Przykład 5 (Ogniwo elektrochemiczne).** Ogniwo jest to układ chemiczny posiadający podobnie jak rezystor w przykładzie 3, dwie elektrody. Jednak budowa ogniwa jest bardziej złożona zawiera bowiem elektrolit i procesy elektrochemiczne generujące prąd elektryczny. Z punktu widzenia użytkownika modelem matematycznym ogniwa może być zależność pomiędzy napięciem  $U$  a natężeniem prądu  $I$ . Najprostszym przybliżonym modelem ogniwa



**Rysunek 3.** Zależność napięcia od natężenia prądu dla ogniwa elektrochemicznego w przybliżeniu liniowym oraz zasady strzałkowania napięć i prądów zgodne z równaniem (4)

jest równanie liniowe:

$$U = E - IR_w, \quad (4)$$

gdzie:  $E$  - siła elektromotoryczna,  $R_w$  - opór wewnętrzny ogniwa.

Taki model może opisywać ogniwo chemiczne o ile spełnione są następujące założenia:

- Ogniwo można traktować jako dwójnik (układ o stałych skupionych, mający dwa wyprowadzenia elektryczne, poprzez które zachodzi oddziaływanie z otoczeniem).
- Parametry (wielkości fizyczne) opisujące ogniwo są niezależne od czasu.
- Rezystancja wewnętrzna nie zależy od natężenia prądu i od czasu.

W równaniu (4) opisującym ogniwo natężenie prądu jest zapisane ze znakiem odwrotnym niż w równaniu rezystora (3), takie strzałkowanie związane ze sposobem strzałkowania napięć i prądów na rezystorze co pokazano na rysunku 3.

Dwa podstawowe parametry: siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny nie wyczerpują listy parametrów opisujących ogniwo, ważna też jest pojemność ogniwa, jego masa, wymiary geometryczne, trwałość, stabilność parametrów w czasie, zależność rezystancji od prądu i inne. W zastosowaniach profesjonalnych niezbędne jest uwzględnienie nieliniowych właściwości (np. zależność rezystancji wewnętrznej od natężenia prądu) i efekty pamięciowe.

### Przykład 6. Model matematyczny jednofunkcyjny

Założmy, że chcemy opisać zachowanie się układu opisanego czterema parametrami. Najprostszą postacią równania opisującego zachowanie się takiego układu jest zależność o postaci:

$$f(x, y, v, z) = 0 \quad (5)$$

Jeśli podamy interpretację parametrów  $x, y, v, z$  to równanie (??) staje się modelem jakiegoś obiektu fizycznego. Dla przykładu gaz doskonały opisany jest czterema parametrami opisującymi stan gazu są to: temperatura  $T$ , ciśnienie  $p$  i objętość  $V$  i ilość gazu wyrażoną liczbą moli  $n$ . Równanie stanu gazu ma postać:  $pV = nRT$ , co można zapisać w postaci:  $pV - nTR = 0$  (gdzie  $R$  jest stałą gazową). Jeśli umówimy się, że  $x = p$ , czyli  $x$  to jest ciśnienie i dalej  $V = y$ ,  $v = n$  i  $z = T$ , to funkcja opisująca stan gazu ma postać:  $f(x, y, v, z) = xy - Rvz$ .

Inny przykład przedstawiony jest w zadaniu nr. 1 (rozdział 10), należy je wykonać opisując dokładnie pojęcia podstawowe.

### 1.4.2. Weryfikacja modelu

W badaniach naukowych celem pomiarów jest poznanie właściwości badanych obiektów i zjawisk i budowa modelu matematycznego. Proces ten ma następujące fazy:

- 1) Badanie empiryczne zależności pomiędzy wielkościami fizycznymi charakteryzującymi badane zjawisko lub ciało,
- 2) Weryfikacja modelu teoretycznego poprzez porównanie wyników eksperymentalnych z modelem (teorią) zazwyczaj wykorzystując metody statystyczne testowania hipotez.
- 3) Wyciągnięcie wniosków dotyczących:
  - niezgodności doświadczenia z modelem
  - możliwości poprawienia modelu
  - możliwości poprawienia doświadczenia

Zrozumienie i wyjaśnienie obserwowanego zjawiska zazwyczaj uzyskuje się budując model matematyczny obserwowanego zjawiska i porównanie go z wynikami doświadczalnymi. Pomiary wykonywane dla celów technologicznych i handlowych korzystają z wyników badań poznawczych.

**Przykład 7.** Zależność rezystancji (oporu elektrycznego) od temperatury może być wyznaczona dla wszelkich możliwych ciał, dla których pomiar rezystancji jest możliwy. W większości układów fizycznych (w większości obiektów fizycznych) możliwe jest zainstalowanie elektrod (kontaktów) pozwalających na pomiar napięcia elektrycznego i natężenia prądu. Każdy taki obiekt może być przekształcony w dwójnik, czyli układ, w którym wejściem pomiarowym są dwa punkty geometryczne. Mogą to być obiekty wykonane z materiałów metalicznych, półprzewodnikowe, elektrolitów itd. Trzeba pamiętać, że geometria takiego układu może być złożona i interpretacja wyników pomiaru musi być ściśle związana z metodą umieszczenia elektrod pomiarowych i z własnościami tych elektrod.

Jeśli wykonamy  $n$  pomiarów dla różnych wartości napięcia i natężenia prądu to wynikiem eksperymentu jest zbiór  $n$  punktów na płaszczyźnie napięcie-natężenie, opisujących zależności rezystancji od temperatury, zbiór ten zapiszemy jako zbiór punktów  $(I_i, U_i)$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ .

Model teoretyczny ma zazwyczaj postać równania matematycznego z pewnymi parametrami, które trzeba dobrać tak aby uzyskać możliwie najlepszą zgodność z danymi pomiarowymi.

Jeżeli model matematyczny ma postać prostej:  $y = ax + b$  opracowanie wyników pomiaru polegać będzie na takim dobraniu parametrów  $a$  i  $b$  aby najlepiej pasowały do danych doświadczalnych. Zazwyczaj dopasowanie parametrów wykonuje się metodą najmniejszych kwadratów (rozdział 6).

Aby zinterpretować uzyskany wynik w kategoriach właściwości przewodnictwa niezbędny jest model wiążący przewodnictwo elektryczne z rezystancją mierzoną względem wykonanych elektrod.

**Przykład 8.** Wahadło matematyczne.

Modelem matematycznym wahadła matematycznego (czyli ciała zawieszonego na nierozciągliwej linie) jest równanie Newtona  $F = ma$  zapisane dla ruchu po okręgu w jednorodnym polu grawitacyjnym. W równaniu tym siła zależy od kąta  $\alpha$  i często (dla małych

kątów) wyrażamy tą siłę równaniem  $F = mg\alpha$  (gdzie  $m$  masa ciała powieszona na lince o długości  $l$ ). Przyspieszenia można zapisać w postaci  $a = l \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}$ , gdzie  $t$  jest czasem, kąt zależy od czasu:  $\alpha = \alpha(t)$ .

Równanie opisujące ruch wahadła (po okręgu w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $g$ ) ma postać:  $g\alpha(t) = l \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}$ . Rozwiązanie tego równania ma postać:  $\alpha(t) = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ , gdzie  $A$  jest amplitudą drgań, to otrzymamy znany związek pomiędzy okresem drgań  $T$  a długością wahadła i polem grawitacyjnym  $g$ :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Powyższy wzór na okres wahadła jest przybliżony, w ogólniejszej formule mamy zależność okresu  $T$  od amplitudy drgań  $A$ . Jeśli założymy, że amplituda drgań nie przekracza kąta  $\alpha_{max} = 20^\circ$  to błąd względny graniczny okresu wyniesie  $\frac{\Delta T}{T} = 0,0077$ .

Jeśli pomiary okresu wykonamy stoperem, np. dla dziesięciu drgań otrzymamy 10s z błędem granicznym 0,4s, to błąd względny graniczny okresu wyniesie  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,4}{10} = 0,04$ , czyli jest to ok. 6 więcej niż błąd wzoru przybliżonego na okres drgań. W tym przypadku założenie o „małym kącie” jest wystarczające do opisu drgań wahadła. Innym źródłem błędów modelu jest rozciąganie się linki i to, że punkt zawieszenia wykonuje drgania (zawieszenie osi zawsze jest elastyczne). Model wahadła uwzględniający sprężystość linki i punktu zawieszenia wahadła można opisać matematycznie, ale jest to zadania trudne. W warunkach laboratorium studenckiego błąd spowodowany elastycznością linki i poruszaniem się punktu zawieszenia może być dużo większy od błędu spowodowanego przybliżeniem małego kąta.

W każdym raporcie z badań (w sprawozdaniu studenckim również) powinna znaleźć się analiza na temat zgodności teorii (modelu) badanego zjawiska z wynikami pomiarów.

### 1.5. Schemat układu pomiarowego

Pomiar jest możliwy dzięki temu, że badany obiekt oddziałuje z przyrządem pomiarowy. Jednak w czasie pomiaru mamy do czynienia z wieloma innymi oddziaływaniami, które można przedstawić w postaci schematu składającego się z badanego obiektu, przyrządu pomiarowego oraz otoczenia. Przez otoczenie rozumiemy wszystkie procesy i zjawiska określające warunki pomiaru. Wpływ otoczenia obejmuje więc wszelkie możliwe do wyobrażenia oddziaływania:

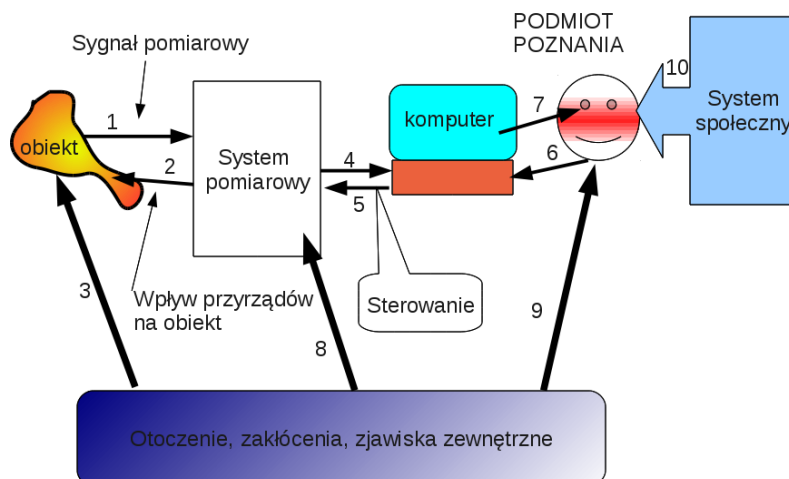
- czynniki termodynamiczne takie jak temperatura i ciśnienie,
- pola fizyczne: grawitacyjne i elektromagnetyczne zarówno naturalne jak i sztuczne,
- kwanty pola elektromagnetycznego o różnych energiach: fotony, kwanty X i  $\gamma$ ,
- cząstki elementarne wysokiej energii ( $\alpha$ ,  $\beta$ , neutrina, itd.) pochodzące z kosmosu, wnętrza ziemi i innych źródeł promieniowania (szczególnie reakcji jądrowych),
- oddziaływania chemiczne,
- wpływy społeczne. Dotyczą one efektów edukacji, presji społecznych, posiadanej wiedzy (modeli, potrzeb i światopoglądów), chwilowych trendów i mód, czynników ekonomicznych (możliwości wynikających z posiadanych środków).

Zarówno planowanie eksperymentu jak jego interpretacja zależą od wiedzy naukowej (ogólnie uznawanej jak i indywidualnie opanowanej), ograniczeń spowodowanych czynnikami społecznymi, umowami w ramach których wykonuje się badania i wszelkich presji psychicznych i paradygmatów<sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Paradygmat jest obowiązującym w nauce poglądem [8]



Przykładem może być spór pomiędzy Teslą i Edisonem dotyczący tego czy w liniach przesyłowych ma być prąd stały czy zmienny [18].



**Rysunek 4.** System pomiarowy, zaznaczono strzałkami oddziaływania (sygnały) pomiędzy badanym obiektem, systemem pomiarowym, komputerem, obserwatorem i otoczeniem

Na rys. 4. zaznaczono strzałkami następujące oddziaływania:

- (1) przesyłanie sygnału od obiektu do przyrządu (przeniesienie wielkości mierzonej z obiektu do przyrządu pomiarowego), proces ten polega na oddziaływaniu obiektu na czujniki pomiarowe.
- (2) oddziaływanie przyrządu na mierzony obiekt, sterowanie obiektem i kontrola parametrów eksperymentu,
- (3) oddziaływanie otoczenia na mierzony obiekt, oddziaływanie otoczenia na kanał przesyłania stanu obiektu do systemu pomiarowego (do czujników),
- (4) rejestracja sygnału wyjściowego z systemu pomiarowego (odczyt lub przesłanie danych do komputera),
- (5) sterowanie systemem pomiarowym przez komputer,
- (6) sterowanie komputerem przez człowieka odczyt danych,
- (7) odczyt danych i obliczeń z komputera przez eksperymentatora,
- (8) oddziaływanie otoczenia na przyrząd pomiarowy,
- (9) oddziaływanie otoczenia fizycznego na obserwatora, wpływy pól fizycznych, warunków chemicznych,
- (10) wpływ czynników społecznych na eksperymentatora.

## 1.6. Strategia eksperymentu

Ekspertyment polega zazwyczaj na zbadania zależności jednych zmiennych fizycznych od drugich dla badanego zjawiska i porównanie uzyskanej zależności empirycznej z modelem teoretycznym. Modelem teoretycznym jest równanie matematyczne opisujące związek pomiędzy obserwowanymi wielkościami fizycznymi i parametrami opisującymi własności badanego obiektu (ciała lub zjawiska).

Ekspertyment pomiarowy zazwyczaj nie sprowadza się do odczytu wskazania przyrządu pomiarowego. Nawet jeżeli mamy zmierzyć jedną wartość wielkości charakteryzującej badany obiekt to aby wyznaczyć tę wielkość dostatecznie dokładnie, dobrze jest zaplanować

eksperyment, w którym zbadamy zachowanie się obiektu w zależności od warunków kontrolowanych przez wybrane przez nas zmienne.

**Przykład 9** (Pomiar rezystancji). Rezystancję dwójnika można wyznaczyć mierząc natężenie prądu płynącego przez badany element dla jednej ustalonej wartości napięcia (np. napięcia bateryjki, którą właśnie dysponujemy) i wyliczyć wartość rezystancji z definicji. Można wyznaczenie rezystancji zrealizować jako badanie zależności natężenia prądu od napięcia w celu zbadania czy zależność ta jest liniowa i jeden parametr poprawnie opisuje badany obiekt. Jeśli zależność jest liniowa to można wyznaczyć rezystancję na podstawie metody najmniejszych kwadratów, rezystancję wyznaczamy wyliczając z metody najmniejszych kwadratów nachylenie uzyskanej prostej

### 1.6.1. Strategie wyznaczanie parametrów modelu

Sposób wyznaczenia parametrów opisujących badany obiekt zależy od stopnia komplikacji modelu, można wyróżnić dwa przypadki:

- 1) pomiar bezpośredni, gdy możemy utożsamić mierzony parametr z wynikiem wskazania przyrządu pomiarowego
- 2) pomiar pośrednim, gdy szukane parametry należy obliczyć wstawiając zmierzone wielkości do równań opisujących zależności między mierzonymi wielkościami.

Przykładem pomiarów, w których odczyt wskazania przyrządu pomiarowego traktujemy jako wartość wielkości mierzonej jest pomiar masy wagą, natężenia prądu elektrycznego amperomierze, pomiar napięcia woltomierzem czy też pomiar temperatury termometrem.

**Przykład 10** (Pomiar rezystancji). Rezystancję opornika możemy wyznaczyć mierząc jednocześnie natężenie prądu płynącego przez opornik i napięcia na tym oporniku. Opór  $R$  wyliczamy jako iloraz napięcia elektrycznego  $U$  i natężenia prądu elektrycznego  $I$  :  $R = \frac{U}{I}$ .

**Przykład 11** (Pomiar gęstości masy). Gęstości cieczy równana jest ilorazowi masy i objętości. Przy pomocy wagi wyznacza się masę odmierzonej objętości, natomiast objętość cieczy wyznaczmy cylindrem pomiarowym. Ale możliwy jest pomiar areometrem, który można zaliczyć do pomiarów bezpośrednich (choć faktycznie bezpośrednio mierzy się głębokość zanurzenia areometru).

Bezpośrednio mierzymy wielkości poprzez porównanie ze wzorcem, jak to jest na przykład przy pomiarze masy na wadze szalkowej równoramiennej. Tak mierzy się długość i czas. Do pomiarów bezpośrednich można zaliczyć wielkości mierzone przetworzeniowo - porównawczo, czego przykładem jest pomiar natężenia prądu, napięcia czy też temperatury. Dokładniejsza analiza tego zagadnienia będzie przedstawione w rozdziale 2 pt. „Elementy teorii pomiaru”.

W systemach pomiarowych skomputeryzowanych programy same wyliczają wielkości mierzone na podstawie zadanego wzoru. Komputer sterujący systemami pomiarowymi wykonuje pomiary kilku wielkości (bezpośrednie lub pośrednie) jednocześnie na podstawie często złożonego modelu obserwowanego zjawiska i wylicza wartość wielkości mierzonej. Mimo, że wynik obliczeń odczytujemy z ekranu, to jest to pomiar, pomiar pośredni.

W przypadku większości badań doświadczalnych strategie wyznaczania mierzonych parametrów modelu możemy podzielić na dwie grupy:

1) strategia jednopunktowa (pojedynczego pomiaru):

równanie obiektu (2) przekształcamy tak aby wielkość, która mamy wyznaczyć (oznaczymy ją  $y$ ), można było wyliczyć z danej jawnym wzorem jako funkcji zmiennych  $x_i$ , które mierzymy bezpośrednio (odczytujemy bezpośrednio z miernika):

$$y = g(x_1, x_2, x_3, \dots; a_1, a_2, \dots, a_k)$$

2) strategia dopasowania równania obiektu do serii danych:

eksperyment planujemy tak aby wyznaczyć empirycznie zależność zmiennej wyjściowej  $y$  opisanej równaniem obiektu (2) od zmiennych kontrolnych  $x_1, x_2, x_3, \dots$

Następnie metodami statystyki matematycznej wyznaczamy parametry  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , tak aby dane empiryczne najlepiej pasowały do równania teoretycznego (2) będącego modelem badanego obiektu. Taki sposób wyznaczanie wielkości fizycznych nazywamy estymacją parametryczną. Zazwyczaj korzystamy w tym celu z metody najmniejszych kwadratów (patrz rozdział 6).

Jeżeli eksperyment tak zaplanujemy, że będziemy zmieniać tylko jedną zmienną niezależną  $x$ , mierzyć zmiany wielkość zależnej  $y$  i mamy znaleźć jeden parametr  $a$ , to równanie obiektu ma postać:  $y = g(x; a)$

W wyniku eksperymentu, w którym będziemy zmieniać zmienną niezależną  $x$  i mierzyć zmienną zależną  $y$  (czyli będziemy mierzyć zmienną  $y$  w funkcji zmiennej  $x$ ), to w wyniku uzyskamy tabelę opisującą zależność zmiennej  $y$  od zmiennej  $x$ :

**Tablica 1.** Tabela wyników pomiarów zależności zmiennej  $y$  od zmiennej  $x$

x	jednostka	$x_1$	$x_2$	...	$x_N$
y	jednostka	$y_1$	$y_2$	...	$y_N$

Gdzie  $x_1, \dots, x_N$  i  $y_1, \dots, y_N$  – kolejne wyniki pomiarów zmiennych  $x$  i  $y$ .

**Przykład 12** (Strategie wyznaczania rezystancji). Rozważmy ponownie przykład pomiaru rezystancji (patrz przykład 10) obiektu opisanego równaniem (3) (na stronie 13). Przedstawimy teraz obie strategie wyznaczanie rezystancji:

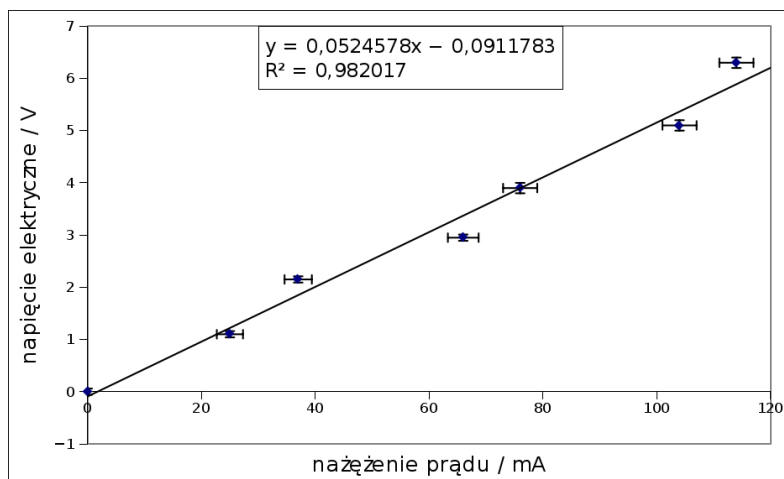
- 1) Wykonać jeden pomiar natężenia prądu dla określonego napięcia elektrycznego i wyznaczyć oporność ze wzoru:  $R = \frac{U}{I}$
- 2) Wykonać serię pomiarów natężenia  $I$  w funkcji napięcia elektrycznego  $U$  i następnie znaleźć prostą, najlepiej pasującą do uzyskanych danych, metodą najmniejszych kwadratów opisaną w rozdziale 6).

Założmy, że wykonano pomiary zależności natężenia prądu  $I$  od napięcia elektrycznego  $U$  dla miniaturowego metalizowanego rezystora o mocy 0,25W o nominalnej wartości  $56\Omega$  o tolerancji 10%. Wyniki pomiarów oraz wartości błędów granicznych mierzonych wielkości wielkości  $\Delta I$  i  $\Delta U$  przedstawiono w tabeli 2 (wyniki zapisano w układzie poziomym, ponieważ zajmują mniej miejsca):

Rezystancja wyznaczona na podstawie pojedynczego pomiaru dla napięcia największego wyniesie  $R = \frac{6,3V}{114mA} = 0,055k\Omega$  z błędem granicznym  $\Delta R = R_{max} - R_{min}$  gdzie  $R_{max} = \frac{6,3+0,1}{114-3} = 57,7\Omega$  oraz  $R_{min} = \frac{6,3-0,1}{1143}k\Omega = 53,0\Omega$ , czyli  $\Delta R = 4,7\Omega \approx 5\Omega$ . Metodę wyznaczenia niepewności zgodnie z zasadami ISO (patrz rozdział 1.7) podano w rozdziale 5. Metodą najmniejszych kwadratów (rys.5) otrzymujemy rezystancję równą  $52,5k\Omega$  z odchyleniem standardowym  $3,1\Omega$ .

**Tablica 2.** Tabela wyników pomiarów zależności natężenia prądu od napięcia dla rezystora 56Ω. Napięcie zmierzono multimetrem analogowym klasy 2%, natężenie prądu multimetrem cyfrowym o błędzie granicznym 1%+dwie cyfry.

zakres	mA	2,00	200	200	200	200	200	200
I	mA	0,02	25	37	66	76	104	114
Δ I	mA	0,02	2,3	2,4	2,7	3	3	3
zakres	V	3	3	3	3	10	10	10
U	V	0	1,10	2,15	2,95	3,9	5,1	6,3
ΔU	V	0,06	0,06	0,06	0,06	0,1	0,1	0,1



**Rysunek 5.** Wyniki pomiarów zależności natężenia prądu od napięcia dla rezystora o mocy 0,25W o nominalnej wartości 56Ω. Wyniki pomiarów zaznaczone są jako punkty ze słupkami błędów. Prosta jest wykresem równania liniowego uzyskanego metodą najmniejszych kwadratów, powyżej wykresu zapisane jest równanie tej prostej. Dane do wykresu przedstawione są w tabeli 2

## 1.7. Niepewność, podstawy prawne, publikacje i dokumenty

Zasady szacowania niepewności zostały ujęte jako zalecenia ISO (International Organization for Standardization [www.iso.org](http://www.iso.org)) [24]. Podstawowy dokument prezentujący zasady wyznaczania niepewności zatytułowany jest: „Guide to Expression of Uncertainty in Measurement, ISO/BIPM” (skrót angielski GUM, lub GUIDE) i wydany jest przez BIPM (Bureau International des Poids et Mesures). Jest to praca zbiorowa ekspertów powołanych przez BIPM [25]. Wszelkie dokumenty wydawane przez BIPM dostępne są na stronie internetowej BIPM: <http://www.bipm.org/>. Dokumenty wydawane przez ISO nie są obowiązującym bezwzględnie prawem, ale zasad zawartych w tych dokumentach przestrzega Główny Urząd Miar, PCA (Polskie Centrum Akredytacji<sup>12</sup>) i są przestrzegane w przemyśle. W publikacjach naukowych w dziedzinie fizyki można stosować każdą dobrze uzasadnioną metodę szacowania niepewności (można używać starej teorii błędów), ale w technice (zarówno w przemyśle jak i w publikacjach) obowiązują zasady ISO, ponieważ normalizacja jest podstawą wymiany informacji i zapewnia jakość wyrobów.

<sup>12</sup>Zgodnie z opisem na stronie [www.pca.gov.pl](http://www.pca.gov.pl) „Polskie Centrum Akredytacji jest krajową jednostką akredytującą upoważnioną do akredytacji jednostek certyfikujących, kontrolujących, laboratoriów badawczych i wzorcujących oraz innych podmiotów prowadzących oceny zgodności i weryfikacje na podstawie ustawy z dnia 30 sierpnia 2002 r. o systemie oceny zgodności.”

Dokument dotyczący analizy niepewności został ratyfikowany przez Główny Urząd Miar Rzeczypospolitej Polskiej i wydany po polsku z tytułem „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik” [23] (w skrócie „Przewodnik ”). Niestety ze względu na „specyficzny” sposób działania w Polsce tzw. Prawa Autorskiego jest dostępny dla użytkowników jedynie w bibliotece (nakład jest wyczerpany a nie można go umieścić na stronie internetowej). Wersja angielska (wydanie najnowsze) dostępna jest na stronie internetowej BIMP [25].

Podstawowe terminy metrologiczne zdefiniowane zostały w dokumencie pt: „Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii” [11] wydanym przez BIPM.

Zgodnie z *Przewodnikiem* podstawą opracowywania danych empirycznych są metody statystyczne.

### 1.8. Błąd, wartość prawdziwa, błąd systematyczny i przypadkowy

*Przewodnik* ISO [23] zaleca aby parametrem charakteryzującym dokładność pomiaru była niepewność równa odchyleniu standardowemu. *Przewodnik* zakłada, że pojęcie błędu powinno być wyeliminowane z użycia jednak w celu wyjaśnienia metod charakteryzowania niedokładności pomiarowych pojęcia zarówno błędu jak i niepewności dobrze jest zdefiniować. Posługiwanie się pojęciem błędu ma długą tradycję, a także podział błędów na systematyczne i przypadkowe dobrze reprezentuje zjawiska fizyczne opisujące różne mechanizmy błędów.

Każdy wynik pomiaru jest przybliżeniem (czyli estymatą) wartości mierzonej. Błąd jest różnicą pomiędzy wartością zmierzoną (estymatą wartości mierzonej) i wartością estymowaną (nazywaną prawdziwą lub poprawną):

$$\Delta x = \tilde{x} - x_0 \quad (6)$$

$x_0$  – wartość prawdziwa (wartość poprawna - wynik pomiaru, który uzyskano by w idealnych warunkach),

$\tilde{x}$  – estymata wartości mierzonej (odczytana z przyrządu lub wyznaczona z serii odczytów),

$\Delta x$  – błąd prawdziwy<sup>13</sup> (krótko - błąd).

Równanie (6) opisuje związek pomiędzy estymatą wartości zmierzonej a wartością estymowaną czyli prawdziwą.

Wartość prawdziwa jest wartością hipotetyczną wielkości mierzonej, jaką byśmy uzyskali gdyby przyrządy i warunki pomiaru były idealne. Ponieważ nie wiemy, czy jest to możliwe więc metrologowie często używają pojęcia „wartość poprawna”<sup>14</sup>. Wartości prawdziwej ani błędu prawdziwego nie znamy i możemy jedynie wyznaczyć miary charakteryzujące wielkość błędu, zgodnie z zaleceniami ISO taką miarą jest niepewność.

---

<sup>13</sup>Podkreślenie, że jest to „błąd prawdziwy” ma oznaczać, że nie jest to błąd maksymalny ani niepewność a prawdziwa różnica pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą.

<sup>14</sup>W literaturze fizycznej czasem używa się pojęcia „wartość rzeczywista”, pojęcie to jednak w literaturze angielskiej oznacza co innego. Wartość rzeczywista jest każdą wartością określoną poprzez pomiar „rzeczywisty” (czyli fizyczny), a nie jest wartością umowną (jak np. w ekonomii). W tym sensie każde wskazanie przyrządu pomiarowego jest rzeczywiste (a nie umowne) ale nie musi być prawdziwe.

Należy podkreślić, że prawa fizyki i równania fizyki zapisuje się dla wartości prawdziwych.

Za względu na naturę zjawisk wpływających na błędy błędy mogą być podzielone na systematyczne i przypadkowe. Klasyfikacja źródeł błędów podana w *Przewodniku* ISO jest odmienna polega na podziale według metod wyznaczania składowych niepewności, metody dzieli się na statystyczne i inne (eksperymentalne). Podział ten nie pokrywa się z podziałem na błędy systematyczne i przypadkowe ponieważ dotyczy metody analizy błędów przy założeniu, że wszystkie rodzaje błędów mogą być modelowane jako przypadkowe.

W tym rozdziale przedstawiony będzie model analiz błędów przy zachowaniu podziału na błędy przypadkowe i systematyczne. Model ten może pomóc w zrozumieniu modelu obowiązującego w zasadach ISO, w którym podział ten zostanie zamieniony na podział według metod estymacji rozkładu prawdopodobieństwa (rozdział 1.9 na stronie 26 i rozdział 5 na stronie 72).

Zakładamy, że błędy są addytywne (podobnie jak w rozdziale 5.4.8) dlatego błąd  $\Delta x$  może być przedstawiony jako suma składników<sup>15</sup>: składowej przypadkowej  $\varepsilon$  i składowej systematycznej  $\Delta_0 x$ :

$$\Delta X = \varepsilon + \Delta_0 x \quad (7)$$

gdzie:  $\varepsilon$  – zmienna losowa reprezentująca błąd przypadkowy (błąd przypadkowy z założenia jest zmienną losową),  $\Delta_0 x$  – błąd systematyczny będący liczbą,  $\Delta X$  – zmienna losowa reprezentująca błędy (zmienne losowe zapisujemy literami wielkimi).

Składowa przypadkowa  $\varepsilon$  obserwowana jest jako fluktuacje wyników pomiaru, czyli poprzez rozrzut wyników. Składowa systematyczna  $\Delta_0 x$  nie zmienia się w kolejnych pomiarach i można jedynie pośrednio wnioskować o jej istnieniu. Wiedza o składowej systematycznej pochodzi z analizy przyrządu pomiarowego, z poprzednich doświadczeń i danych producenta. Fluktuacje pomiarowe opisuje się modelem probabilistycznym, tak więc pomiar opisujemy zmienną losową  $X$ , którą możemy wyrazić jako sumę wartości prawdziwej  $x_0$  i błędów  $\Delta X$ , który jest zmienną losową:

$$X = x_0 + \Delta X \quad (8)$$

Wielką literą  $X$  oznaczamy zmienną losową, której wartościami są wyniki pomiaru  $\tilde{x}$ .

Równanie powyższe jest pozornie identyczne z równaniem (6), różnica polega na tym, że równanie (8) zapisane jest dla zmiennych losowych a równanie (6) dla wartości uzyskanych w konkretnym pomiarze. Równanie (8) jest probabilistycznym modelem pomiaru i jest podstawą wyznaczania niepewności (patrz rozdział 5.1).

Zasada podziału jest jednoznaczna dla ustalonego modelu probabilistycznego i określa ją następująca definicja.

**Definicja 1** (Błąd przypadkowy). Składowa błędów  $\varepsilon$  we wzorze (7) jest składową przypadkową jeśli spełnia warunek, że jej wartość oczekiwana składowej wynosi zero:

$$E(\varepsilon) = 0 \quad (9)$$

Z tej definicji wynikają dwie właściwości błędów, zapiszemy je w postaci następującego twierdzenia:

---

<sup>15</sup>Z addytywności wynika, że błąd może być przedstawiony jako suma dowolnych składników, w szczególności mogą to być składniki wyróżnione poprzez właściwości probabilistyczne.

**Twierdzenie 1.** Błąd systematyczny i przypadkowy spełniają następujące równości:

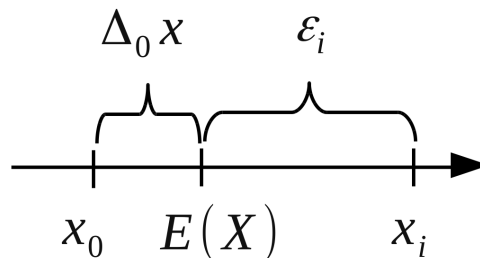
- 1) Błąd systematyczny jest różnicą pomiędzy wartością oczekiwaną a wartością prawdziwą:

$$\Delta_0 x = E(X) - x_0 \quad (10)$$

- 2) Błąd przypadkowy jest różnicą pomiędzy wynikiem pomiaru a wartości oczekiwaną:

$$\varepsilon = X - E(X) \quad (11)$$

Relacje pomiędzy błędem systematycznym i przypadkowym a wartością oczekiwaną można przedstawić na rysunku (rys. 6). Błąd systematyczny jest różnicą pomiędzy wartością oczekiwaną a wartością prawdziwą, a błąd przypadkowy opisuje odchylenie wyniku pomiaru od wartości oczekiwanej, którą można w tym momencie rozumieć jako średnią z nieskończonej liczby pomiarów (jest to ważna właściwość wartości oczekiwanej 3.7.3).



**Rysunek 6.** Błąd systematyczny i przypadkowy  $i$ -tego pomiaru.  $x_i$ -wynik  $i$ -tego pomiaru,  $\varepsilon_i$ -błąd przypadkowy  $i$ -tego pomiaru.

Aby udowodnić twierdzenie 1 trzeba skorzystać z tego, że wartość oczekiwana jest operacją liniową (patrz rozdział 3.7.3) <sup>16</sup>:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{oraz} \quad E(\alpha X) = \alpha E(X) \quad (12)$$

gdzie  $X, Y$  - dwie zmienne losowe,  $\alpha$  - dowolna liczba rzeczywista,  $E(X)$  - wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  (definicja dana jest wzorem (65) w rozdziale 3.7 na stronie 47).

W celu udowodnienia wzoru (10) należy wstawić wzór (7) do wzoru (8):

$$X = x_0 + \varepsilon + \Delta_0 x \quad (13)$$

Wartość oczekiwana tego wyrażenia wynosi:

$$E(X) = E(x_0 + \varepsilon + \Delta_0 x) = E(x_0) + E(\varepsilon) + E(\Delta_0 x) \quad (14)$$

Ponieważ wartość oczekiwana liczby jest tą liczbą:  $E(x_0) = x_0$  oraz  $E(\Delta_0 x) = \Delta_0 x$ , oraz z definicji 1 mamy  $E(\varepsilon) = 0$ , więc otrzymujemy:

$$E(X) = x_0 + \Delta_0 x \quad (15)$$

<sup>16</sup>W celu zrozumienia tej części dobrze jest przeczytać te obliczenia po przestudiowaniu rozdziału 3

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy równanie (10)

$$\Delta_0 x = E(X) - x_0 \quad (16)$$

Obu wielkości nie znamy ale możemy oszacować statystyczne estymatory (co będzie opisane w dalszych rozdziałach).

W celu wyprowadzenia równania (11) równanie (10) wstawimy do równania (13):

$$X = x_0 + \varepsilon + E(X) - x_0 = \varepsilon + E(X) \quad (17)$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie (11), czyli błąd przypadkowy jest różnicą pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością oczekiwaną:

$$\varepsilon = X - E(X) \quad (18)$$

Błąd przypadkowy opisuje więc odchylenie od wartości oczekiwanej, natomiast błąd systematyczny - odchylenie wartości oczekiwanej od wartości prawdziwej, pokazano to na rysunku 6.

Rozważmy teraz nie jeden pomiar a serię pomiarów jak to pokazano na rysunku 7. Wyniki pomiarów oznaczmy  $x_i$  ( $i$ -numer pomiaru), wartości te są realizacją zmiennej losowej  $X$  w równaniu (8). Do pojedynczego pomiaru możemy zastosować równanie (6), każde powtórzenie pomiaru (w warunkach niezmiennych) może dać inny wynik z powodu błędów przypadkowych, możemy zapisać:

$$x_i = \Delta x_i + x_0 \quad (19)$$

gdzie  $x_i$  jest  $i$ -tym pomiarem,  $\Delta x_i$  jest błędem  $i$ -tego pomiaru.

Równanie (19) jest równaniem (8) dla  $i$ -tego pomiaru czyli dla  $i$ -tej realizacji zmiennej losowej  $X$ . Istotą modelu probabilistycznego jest to, że wyniki pomiaru możemy matematycznie opisać jako realizację zmiennej losowej (wartości zmiennej losowej).

$\Delta x_i$  jest błędem  $i$ -tego pomiaru. Błąd  $i$ -tego pomiaru można rozłożyć na dwie składowe: przypadkową  $\varepsilon_i$  i systematyczną  $\Delta_0 x$ :

$$\Delta x_i = \varepsilon_i + \Delta_0 x \quad (20)$$

Błąd systematyczny jest taki sam dla każdego pomiaru (w serii o niezmiennych warunkach<sup>17</sup>, natomiast składowa przypadkowa jest inna dla każdego powtórzenia pomiaru.

Powtarzając wyprowadzania przedstawione powyżej (wzór (11) pokazujemy, że błąd przypadkowy  $\varepsilon_i$ ,  $i$ -tego pomiaru równy jest różnicy wartości zmierzonej  $x_i$  i wartości oczekiwanej  $E(X)$  (czyli wartości średniej z nieskończenie dużej ilości pomiarów):

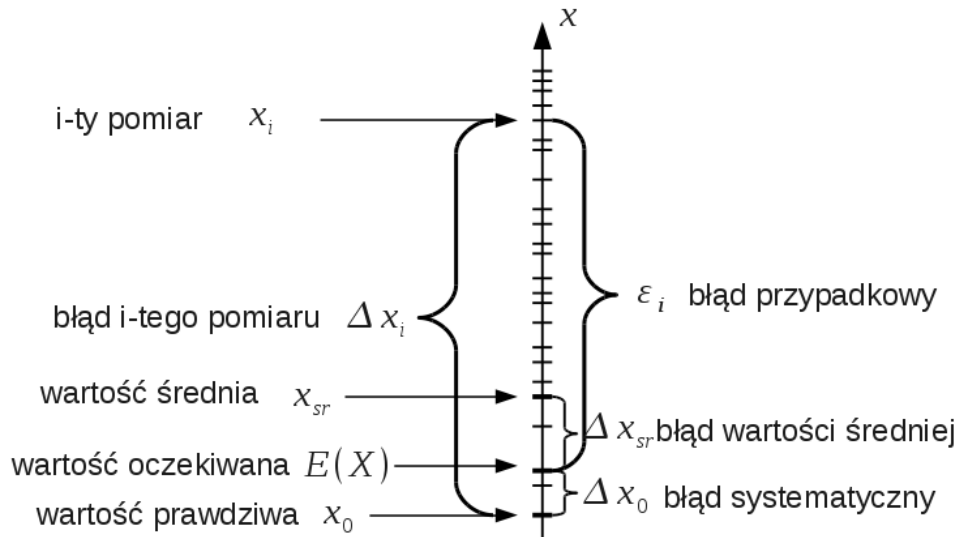
$$\varepsilon_i = x_i - E(X) \quad (21)$$

Błąd systematyczny jest taki sam dla każdego pomiaru, czyli  $\Delta_0 x$  równy jest różnicy wartości oczekiwanej  $E(X)$  i wartości prawdziwej  $x_0$ , co opisuje równanie (10). Ponieważ nie znamy ani wartości oczekiwanej  $E(X)$  ani wartości prawdziwej  $x_0$  więc zachodzi konieczność szacowania niepewności charakteryzującej błąd systematyczny na podstawie analizy źródeł błędów.

---

<sup>17</sup>Warunki te nazywamy warunkami powtarzalności





**Rysunek 7.** Błąd i jego składowe. Na rysunku oznaczono: wyniki pomiarów - cienkimi kreskami, wartość prawdziwa  $x_0$  zaznaczona jest grubsza kreską, wartość oczekiwana -  $E(X)$ , klamrami zaznaczone są błędy  $i$ -tego pomiaru  $\Delta x_i$ , błąd systematyczny  $\Delta x_0$  i błąd przypadkowy  $i$ -tego pomiaru  $\varepsilon_i$ ; oznaczono też średnią z pomiarów i błąd wartości średniej

W praktyce pomiar wykonujemy skończoną liczbę razy i nie znamy wartości oczekiwanej, a jedynie średnią ze skończonej liczby pomiarów. Wartość średnia ze skończonej liczby pomiarów zawsze różni się od wartości oczekiwanej, różnica ta jest błędem wartości średniej (rys. 7). Błąd wartości średniej empirycznej z  $N$  pomiarów  $\Delta x_{sr}$  równy jest różnicy wartości średniej  $x_{sr}$  i wartości oczekiwanej  $E(X)$ :

$$\Delta x_{sr} = x_{sr} - E(X) \quad (22)$$

gdzie wartość średnia równa jest

$$x_{sr} = \frac{1}{N} \sum x_i \quad (23)$$

Błąd wartości średniej  $\Delta x_{sr}$  dla każdej serii pomiarowej jest inny, jest więc zmienną losową. Miarą błędu wartości średniej niepewność standardowa równa odchyleniu  $\sigma(\Delta x_{sr})$ . Odpowiednie definicje i własności wartości oczekiwanej  $E(X)$  i wartości średniej i odchylenia standardowego opisane są w rozdziale 4.

Podział błędów na składową systematyczną i przypadkową zależy od tego, jak zdefiniujemy zmienną losową i rozkłady prawdopodobieństwa czyli od tego jak określimy warunki pomiaru. Warunki pomiaru określają czynniki powodujące niepowtarzalność pojedynczych pomiarów (czyli rozrzut danych). Rozpatrzmy to na przykładzie.

**Przykład 13** (Pomiar napięcia woltomierzem i zbiorem woltomierzy). Jeśli wykonamy pomiar jednym woltomierzem  $N$  razy, to fluktuacje związane z zakłóceniami tworzą błąd przypadkowy, a błąd przyrządu (błąd aparaturowy), wynikający z niedokładności jego działania, będzie błędem systematycznym. Jednak jeśli wykonamy serię pomiarów, tak, że każdy pomiar wykonany innym egzemplarzem przyrządu tego samego typu, pojawi się składowa przypadkowa związana z tym, że egzemplarze przyrządów różnią się.

Gdy wykonujemy serię pomiarów jednym przyrządem to dane producenta dotyczące niepewności traktujemy jako błąd graniczny systematyczny (o ile producent nie podał

innych informacji). Gdy wykonamy serię pomiarów, ale z wykorzystaniem wielu przyrządów, to część błędu systematycznego stanie się zmienną losową (zostanie zrandomizowana) ponieważ każdy przyrząd ma inne (choć zazwyczaj stałe w czasie) błędy. Zazwyczaj trudno jest określić jaka część błędów ma naturę systematyczną, a jak przypadkową. Ustalenie tego wymaga dodatkowych porównań wykorzystywanego przyrządu z przyrządem wzorcowym wyższej klasy.

Podział na błędy systematyczne i przypadkowe zależy więc od sposobu określenia zbioru zdarzeń elementarnych, dlatego też zespół powołany przez ISO zdecydował się na podział ze względu na metodę estymacji niepewności.

### 1.9. Modele niepewności i metody jej wyznaczania

Zgodnie z *Przewodnikiem ISO* [23] wszystkie składowe i rodzaje błędów należy opisywać jako zmienne losowe (czyli w modelu probabilistycznym). Składowe błędy które w konkretnym eksperymencie nie są obserwowane jako przypadkowe należy opisać również jako zmienne losowe przez przypisanie tym składowym rozkładu prawdopodobieństwa *a priori*, postulowanego na podstawie rozważań teoretycznych. Procedurę tę można nazwać „randomizacją błędu systematycznego”.

Parametrem charakteryzującym ilościowo wszystkie rodzaje błędów jest niepewność równa odchyleniu standardowemu mierzonej wielkości (patrz rozdz. 4). *Przewodnik ISO* [23] podaje, że „NIEPEWNOŚĆ POMIARU jest parametrem, związanym z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej”.

**Wartości prawdziwej i błędu nie znamy**, mamy tylko odczyty z przyrządu i wyniki analizy tych odczytów (np. wartość średnią). Gdybyśmy mogli wyznaczyć błąd to nie byłoby błędu, bowiem znany błąd byłby korektą i można by ustalić poprawny wynik pomiaru i znalazłbyśmy wartość prawdziwą. Możemy jedynie oszacować jakiś parametr charakteryzujący wielkość błędu i jak wyżej podkreślono, takim parametrem jest niepewność zdefiniowana jako odchylenie standardowe. W analizie danych mało dokładnych często dla uproszczenia operuje się też *błędem granicznym* opisującym maksymalną spodziewaną wartość błędu.

W praktyce wykorzystujemy następujące miary błędu, czyli rodzaje niepewności:

- 1) błąd graniczny czyli maksymalna spodziewana (w ramach posiadanej wiedzy) wartość błędu,
- 2) Niepewność standardowa równa odchyleniu standardowemu zmiennej losowej opisującej pomiar,
- 3) niepewność rozszerzona równa promieniowi przedziału ufności estymatora wartości oczekiwanej, dla ustalonego poziomu ufności<sup>18</sup>.

Terminu *błąd* używać będziemy w celu opisu tego, że nie znana jest wartość prawdziwa (ani wartość dokładna). wartości błędu nie można wyznaczyć, nie można jej zmierzyć ani obliczyć<sup>19</sup>. Możemy mówić o źródłach błędów i klasyfikować błędy ze względu na rodzaje zjawisk odpowiedzialnych za składowe błędy. Zazwyczaj zakłada się, że błąd całkowity jest sumą składowych błędów pochodzących od różnych zjawisk (patrz wzór (171) w

<sup>18</sup>Pojęcia tu użyte zdefiniowane są w rozdziale 4

<sup>19</sup>Możliwy jest model błędu pozwalający na obliczenie składowej błędu. W takim przypadku błąd staje się poprawką która pozwala na korekcję wyniku pomiaru.

rozdziale 5.5). Dla składowych błędów szacujemy odpowiednie niepewności. Niestety niepewności nie są addytywne i nie można ich zwyczajnie (czyli jak liczby) dodawać. Zasady składania niepewności wynikają ze wzoru na odchylenie standardowe sumy zmiennych losowych (wzór (81)) i zazwyczaj mają postać twierdzenia Pitagorasa czyli pierwiastka sumy kwadratów z niepewności składowych (równanie (172)). Odpowiednie wzory przedstawione będą w rozdziale 5.5.

Na podstawie wyników pomiarów wyznaczamy dwie wielkości charakteryzujące właściwości badanego obiektu (zjawiska):

- 1) estymatę wartości wielkości mierzonej<sup>20</sup>,
- 2) niepewność.

W praktyce pomiarowej mamy do czynienia z dwoma sytuacjami, które trzeba potraktować osobno:

- 1) pomiar wykonujemy jednokrotnie i mamy jedną liczbę odczytaną z przyrządu,
- 2) pomiar wykonujemy wielokrotnie i mamy serię danych pomiarowych.

Przypadek pierwszy dotyczy pomiaru jednostkowego wykonywanego przyrządem, który nie jest wyposażony w procesor wykonujący serie pomiarów a następnie wykonujący uśrednianie i obliczenia odchylenia standardowego. Jeśli przyrząd wyposażony jest w procesor, który analizuje dane, uśrednia i oblicza odchylenie standardowe to stosują się zasady opisane dla drugiego punktu.

Niepewność wyznaczamy, w każdym z powyższych przypadków następująco:

- (1) Gdy mamy pomiar jednostkowy (jeden wynik pomiaru) niepewność szacuje się w następujący sposób:
  - (a) Na podstawie danych producenta i własnej analizy układu pomiarowego wyznacza się błąd graniczny  $\Delta_m x$  (błąd instrumentalny), jako maksymalną możliwą wartość błędu.
  - (b) Na podstawie wiedzy o układzie pomiarowym i zjawiskach zachodzących w aparaturze ustala się rozkład prawdopodobieństwa *a priori* możliwych wartości błędu. Zazwyczaj zakłada się rozkład jednostajny.
  - (c) Dla wartości błędu granicznego i zadanego rozkładu *a priori* wylicza się odchylenie standardowe. Jeśli założymy rozkład jednostajny błędów to odchylenie standardowe (i tym samym niepewność standardowa) wyniesie  $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_m x$ .
- (2) Jeśli wynikiem pomiarów jest seria danych (pomiar wykonujemy wielokrotnie) to zakłada się że:
  - estymatą wartości wielkości mierzonej jest średnia z danych pomiarowych<sup>21</sup>
  - niepewność wyraża się jako niepewność standardowa i szacuje się (zawsze w sposób przybliżony) jako odchylenie standardowe średniej (patrz wzór (134)).

Błąd graniczny  $\Delta_m(x)$  jest maksymalną wartością błędu  $\Delta x$  (równanie (6)) jaki może się zdarzyć podczas pomiaru, wartość maksymalną szacujemy na podstawie wiedzy o przyrządzie i metodzie pomiarowej. Błąd graniczny można zdefiniować równaniem:

$$\Delta_m(x) = \max\{\Delta x = \tilde{x} - x_0 : \tilde{x} \text{ jest możliwym wynikiem pomiaru}\}$$

<sup>20</sup>Wielkość zmierzona nazywana jest w metrologii mezurandem

<sup>21</sup>Estymata oznacza wartość przybliżoną.

Zazwyczaj producenci aparatury określają sposób wyznaczania błędu granicznego i podają zasady jego wyznaczania. W praktyce zamiast oznaczać błąd jako  $\Delta_m x$  (czyli ze wskaźnikiem  $m$ ) używamy oznaczenia  $\Delta x$  w domyśle pamiętając, że można określić błąd graniczny a nie jego wartość. Jeśli więc w opisie przyrządu podana jest wartość błędu: „błąd wynosi  $\Delta x$ ” to oznacza, że podany jest błąd graniczny. Jeśli natomiast użyty jest termin „błąd statystyczny” to zazwyczaj oznacza, że podane jest odchylenie standardowe. Przypomnijmy, że wartości błędu nie znamy, analiza niepewności polega na szacowaniu odchylenia standardowego i błędu granicznego (wartości maksymalnej błędu).

Odchylenie standardowe wartości średniej z danych empirycznych szacuje się na podstawie dwóch źródeł informacji:

- (A) serii pomiarów (dane pomiarowe), na tej podstawie można wyznaczyć rozkład empiryczny prawdopodobieństwa (rozkładu *a posteriori*)
- (B) rozkładu prawdopodobieństwa *a priori* opisującego składowe błędów nieobserwowanych w serii pomiarowej (składowe, które na powodują rozrzuty danych) i wynikającego z modelu powstawania tych składowych błędów.

Szczegóły wyznaczania składowych niepewności zgodnie z *Przewodnikiem ISO* opisane będą w następnym rozdziale. Użyte wzory wyprowadzone będą w rozdziałach 3 i 4 poświęconym podstawom probabilistyki i statystyce matematycznej.

## 2. ELEMENTY TEORII POMIARU

Pomiar jest operacją empiryczną przyporządkowywania obiektom liczb (lub innych obiektów matematycznych takich jak wektory czy tensory), które opisują badane obiekty. Pomiar pozwala na ilościowy opis zjawisk niezbędny w fizyce. Aby pomiar spełniał swoją funkcję należy rozpatrzyć następujące aspekty pomiaru:

- 1) wynikiem pomiaru jest wartość wielkości mierzonej wyrażonej w określonej jednostce, razem z niepewnością, co oznacza, że nie można podawać wartości liczbowej opisującej wartość mierzonej wielkości bez niepewności. Niepewność razem z wartością zmierzoną stanowią wynik pomiaru
- 2) wyniki pomiarów powinny reprezentować poprawnie badane obiekty, czyli będące wynikiem pomiarów powinny opisywać relacje empiryczne pomiędzy obiektami.

Z punktu widzenia matematyki wymóg „poprawnego reprezentowania”<sup>22</sup> oznacza, że odwzorowanie pomiarowe  $\Phi$  (wzór (1)) jest homomorfizmem<sup>23</sup> struktur: struktury empirycznej w strukturze algebraicznej.

W języku matematyki pomiar opisujemy jako odwzorowanie z dziedziny obiektów w dziedzinę liczb (lub innych struktur matematycznych). Jeśli ograniczymy się do pomiarów, których wartości mierzonych wielkości są liczbowe pomiar opisujemy odwzorowaniem:

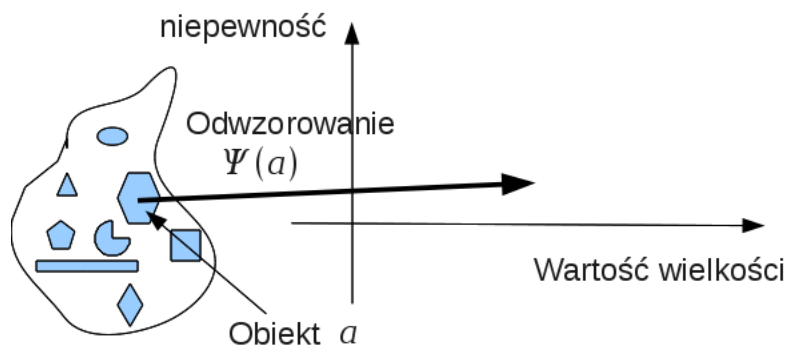
$$\Phi : V \rightarrow \mathcal{R}^n \quad (24)$$

<sup>22</sup> „Poprawność reprezentacji” jest pojęciem filozoficznym ale można to pojęcie matematycznie zdefiniować i zbudować precyzyjne kryterium poprawnej reprezentacji.

<sup>23</sup> Homomorfizmem nazywamy odwzorowanie, które zachowuje strukturę, patrz definicje w rozdziale 2.3.

gdzie  $\Phi$  jest odwzorowaniem pomiarowym opisującym empiryczną procedurę przyporządkowywania obiektom liczb<sup>24</sup>,  $V$  jest zbiorem obiektów empirycznych, oraz  $n$  jest liczbą parametrów opisujących badane obiekty.

$\mathcal{R}^n$  jest  $n$ -krotnym produktem kartezjańskim liczb rzeczywistych  $\mathcal{R}$ . Zazwyczaj wynik pomiaru jest parą: wartość wielkości, niepewność (czyli  $n = 2$ ), taki przypadek został przedstawiony na rysunku 8.



**Rysunek 8.** Schemat pomiaru jako odwzorowania  $\Psi$  ze zbioru obiektów  $V$  w płaszczyznę liczb rzeczywistych  $\mathcal{R}^2$  opisującą parę (wartość wielkości, niepewność). Wynikiem pomiaru dla obiektu  $a \in V$  jest  $\Psi(a) = (\Phi(a), u(a))$ ,  $\Phi(a)$  - wartość wielkości,  $u(a)$  - niepewność.

**Przykład 14** (Pomiar masy na wadze elektronicznej). Pomiar masy wagą elektroniczną polega na umieszczeniu ważonego ciała na szalce wagi i odczytaniu wartości masy. Waga elektroniczna działa na zasadzie wagi sprężynowej z elektronicznym odczytem wielkości odkształcenia sprężyny. W wadze takiej element sprężysty ulega odkształceniu pod wpływem siły ciężaru ciała (czyli siły przyciągania grawitacyjnego) umieszczonego na szalce. Pomiar odkształcenia elementu sprężystego polega na pomiarze zmian rezystancji czujnika tensometrycznego umieszczonego na elemencie sprężystym, zmiany rezystancji skaluje się bezpośrednio w jednostkach masy. Cały taki układ pomiarowy wykonuje funkcję, która przyporządkowuje mierzonemu ciału liczbę będącą masą tego ciała. Funkcję tą oznaczymy symbolem  $\Phi_m$  i nazwiemy ją odwzorowaniem pomiarowym masy lub krótko masą .

Liczby, które opisują obiekty rzeczywistości, powinny opisywać relacje pomiędzy obiektami oraz operacje empiryczne jakie można wykonywać na obiektach. Rozważymy to na przykładzie pomiaru długości.

**Przykład 15** (pomiar długości linijką). Długość mierzymy przez porównanie ze wzorcem jakim jest linijka. Wartość liczbowa (np. w metrach) powinna odzwierciedlać relacje jakie możemy zaobserwować empirycznie. Bezpośrednio przez porównanie można stwierdzić, które ciało jest dłuższe, ciało dłuższe powinno mieć większą długość. Podobnie ciała można składać i chcemy aby ciało złożone z dwóch ciał (odpowiednio dokładnie) miało długość równą sumie długości tych ciał.

## 2.1. Wielkości fizyczne, mezurand

Wielkość fizyczna jest to cecha obiektu (ciała, zjawiska lub substancji), która może być wyznaczona ilościowo. Wielkości fizyczne są parametrami równań opisujących zjawiska

<sup>24</sup>We wzorze (1) odwzorowanie to oznaczyliśmy  $\Phi_\kappa$  co oznacza, że  $\Phi_\kappa$  reprezentuje wielkość  $\kappa$ , tutaj pominiemy indeks  $\kappa$  zakładając, że opisujemy pomiar jakiejś wielkości fizycznej bez szczególnego podkreślenia jak to wielkość

fizyczne. Przykładem wielkości jest masa, czas, długość itp. W języku matematycznym wielkość reprezentowana jest funkcją (oznaczymy ją  $\Phi_\kappa$ ), która przyporządkowuje obiektom liczby będące miarami wielkości dla danego obiektu (patrz wzór (1)):

$$\Phi_\kappa : V \rightarrow \mathbb{R} \times W \quad (25)$$

gdzie  $\Phi_\kappa$  – funkcja pomiaru reprezentująca wielkość fizyczną  $\kappa$ ,  $V$  – zbiór obiektów lub stanów obiektów,  $\mathbb{R}$  – liczby rzeczywiste określające wartość wielkości mierzonej,  $W$  – zbiór wymiarów mierzonych wielkości reprezentujących rodzaj wielkości jednostkę (np., metr, kg, sekunda itd.). Symbol  $\times$  - oznacza produkt kartezjański (np. [7]).

Równanie (25) jest uogólnieniem równania (28), uwzględnia to, że każdy wynik pomiaru jest wielkością mianowaną (z podaną jednostką).

W fizyce i metrologii wyróżniamy wielkości podstawowe i wielkości pochodne. Wielkościami fizycznymi podstawowymi są wielkości definiujące układ jednostek SI: czas, długość, masa, natężenie prądu elektrycznego, temperatura, radian, steradian i kandela. Przykładami wielkości pochodnych są: prędkość, napięcie elektryczne, rezystancja elektryczna, ciśnienie itp.

Wielkość mierzona nazywamy w metrologii mezurandem.

**Definicja 2.** Mezurandem nazywamy wielkość fizyczną wraz z:

- procedurami pomiarowymi,
- warunkami pomiaru określonymi poprzez parametry środowiska i narzędzi pomiarowych,
- zasadami wyznaczania zadanej wielkości na podstawie pomiarów bezpośrednich.
- wzorcami (definicjami wzorców wielkości podstawowych i prawami fizyki definiującymi wielkość mierzona)

W podręcznikach fizyki podaje się zazwyczaj definicje wielkości fizycznych bez dokładnego opisu warunków pomiaru oraz wzorców niezbędnych do wykonania pomiarów. W metrologii istotne są warunki pomiaru i wzorce dlatego wprowadzono pojęcie mezurandu.

## 2.2. Pomiar jako komparacja

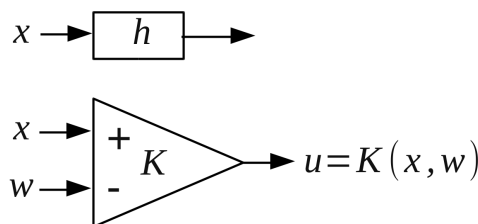
Podstawowym składnikiem każdego pomiaru jest porównanie wielkości mierzonej ze wzorcem. Układ pomiarowy składa się zazwyczaj z przetwornika wielkości wejściowej i komparatora.

**Definicja 3** (Przetwornik). Przetwornikiem jest dowolny obiekt fizyczny, który pod wpływem jednej wielkości fizycznej (sygnału wejściowego) zmienia swój stan tak, że można obserwować zmiany parametrów przetwornika, te zmiany nazywamy sygnałem wyjściowym. Przetwornik zazwyczaj opisujemy odwzorowaniem (oznaczymy je  $h$ ), które wielkości wejściowej  $x$  przyporządkowuje wartość wyjściową  $y = h(x)$ .

Symbolem przetwornika jest „pudełko” z wejściem i wyjściem (rys. 9).

**Definicja 4** (Komparator). Komparatorem jest układ fizyczny pozwalający na porównanie dwóch wartości wielkości mierzonej. Układ taki posiada dwa wejścia sygnałowe i jedno wyjście informujące o różnicy pomiędzy wartościami sygnałów wejściowych. Komparator może być opisany jako przetwornik dwuwejściowy, którego sygnał wyjściowy proporcjonalny jest do różnicy sygnałów wejściowych:  $u = K(x, w)$ , gdzie  $x$  i  $w$  sygnały

wejściowe. Zazwyczaj zakłada się że można w przybliżeniu opisać komparator funkcją liniową  $K(x, w) = k(x - w)$ , gdzie  $k$  stała nazywana czułością komparatora. Sygnał wyjściowy zazwyczaj ma inną naturę niż sygnały wyjściowe jest obserwowalny zmysłowo lub steruje układem kompensacji.



**Rysunek 9.** Schemat komparatora i przetwornika. Przetwornik opisany jest funkcją  $h$  jednoargumentową, a komparator funkcją dwuargumentową  $K(x, w)$ . Schematem blokowym przetwornika jest „pudełko” mające wejście i wyjście, schematem komparatora jest trójkątny układ taki jak schemat wzmacniacza operacyjnego.

**Definicja 5** (Formowanie). Formowanie wielkości jest operacją na wielkościach polegającą na dodawaniu i mnożeniu przez współczynnik. Operacje te wykonuje się na obiektach fizycznych zgodnie z ich naturą fizyczną (czyli fizycznie a nie czysto matematycznie). Powielanie może być opisane wzorem:

$$w = w_0 + \alpha w_1 \quad (26)$$

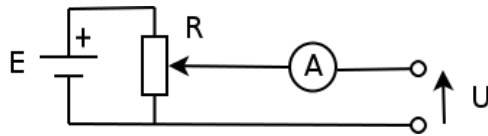
gdzie:  $w_0$  i  $w_1$  wielkości uzyskane z wykorzystaniem wzorca,  $\alpha$  współczynnik powielania.

Przykładami formowania jest składanie odważników na szalce. Składania odważników daje dodawanie mas odważników a tym samym dodawanie sił działających na szalkę. Mnożenie sił uzyskujemy przez zmianę długości ramion wagi. Dodawanie napięć uzyskuje się przez łącznie szeregowo źródeł napięcia. Mnożenie realizuje się dzielnikiem napięcia (mnożenie przez liczbę mniejszą od jedynki) lub wzmacniaczem napięcia.

**Definicja 6** (Pomiar kompensacyjny). Pomiar kompensacyjny polega na wykorzystaniu komparatora do ustalenia równości wartości wielkości mierzonej z wartością uzyskaną w wyniku formowania wzorca. Stan równości wartości wielkości porównywanych przez serię porównań wartości wielkości mierzonej  $x$  i wielkości  $w$  uzyskanej w wyniku formowania wielkości wzorcowej. Formowanie wielkości wzorcowej polega na wykonaniu operacji składania wzorców lub mnożenia przez liczbę (multiplikacja wielkości wzorcowej) i może być zapisane równaniem (26). Pomiar komparatorem polega więc na ustaleniu takiej wartości wzorcowej w aby na wyjściu komparatora uzyskać informację o równości wielkości na obu wejściach, zazwyczaj oznacza to, że na wyjściu komparatora pojawia się wartość zerowa  $u = 0$  (rys.9) zapisujemy to równaniem:

$$(u = 0) \Rightarrow (x = w) \quad (27)$$

Przykładem komparatora jest waga szalkowa pozwalająca na bezpośrednie porównanie ciężarów ciał. Przykładem pomiaru przez porównanie bezpośrednie jest pomiar długości przez porównanie długości przedmiotu z linijką. W przypadku pomiaru napięcia komparatorem jest amperomierz, równowaga komparatora uzyskana jest gdy prąd komparatora (amperomierza) jest zerowy (rys. 10).

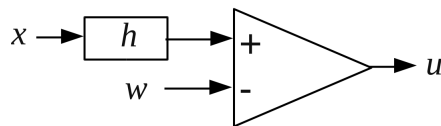


**Rysunek 10.** Pomiar komparacyjny napięcia.  $U$ -mierzone napięcie,  $E$ -wzorcowe źródło napięcia,  $R$ -dzielnik napięcia (potencjometr),  $A$ -miernik natężenia prądu - spełnia rolę komparatora

Ze względu zgodność natury wielkości mierzonej z naturą wielkości porównywanych przez komparator pomiary możemy podzielić na (patrz [9]):

- 1) Pomiar przez porównanie bezpośrednie. Polega na porównaniu bezpośrednim przy pomocy komparatora wartości mierzonej z wzorcową
- 2) Pomiar przetworzeniowo - porównawczy. Polega na porównaniu sygnału przetworzonego przez przetwornik (czujnik, sensor) ze wzorcem wielkości przetworzonej (wyjściowej przetwornika).

Schemat układu pomiarowego przetworzeniowo-porównawczego pokazuje rys. 11. Najprostszy pomiar polega na przetworzeniu wielkości wejściowej na wielkość mierzoną bezpośrednio a następnie porównanie ze wzorcem. Jeśli wynik komparacji  $u = 0$  to znaczy, że na wejściu mamy te same wartości wielkości czyli  $w = h(x)$ .



**Rysunek 11.** Pomiar komparacyjny,  $x$ - wielkość wejściowa,  $h$  - przetwornik wielkości wejściowej ( $h$  jest funkcją opisującą przetwornik),  $w$  - wielkość wzorcowa,  $u$ -wynik komparacji.

**Przykład 16** (pomiar długości). Przykładem pomiarów komparacyjnych bezpośrednich jest pomiar długości ciała linijką. Polega on na porównaniu wzrokowym (zmysłowym) długości ciała ze wzorcem. Wzorcem jest linijka, która ma skalę gotową (uformowaną). Komparatorem jest zmysł wzroku.

**Przykład 17** (Pomiar masy wagą szalkową). Waga szalkowa jest komparatorem ciężarów ciał i jest przykładem urządzenia mierzącego masę przez porównanie bezpośrednie. Wielkościami wejściowymi są siły przyciągania grawitacyjnego, wielkością wyjściową jest kąt wychylenia wagi. Formowanie wielkości wzorcowej polega na dodawaniu odważników na szalce wagi.

Identyfikacja kolorów też jest przykładem zmysłowego porównania koloru przedmiotu ze wzorcami pośrednimi jakim są zapamiętane kolory (z miarę doświadczenia życiowego wzorce gromadzimy w pamięci).

Bardzo niewiele wielkości mierzymy poprzez porównanie bezpośrednie ze wzorcem. Zazwyczaj wielkość mierzona przetworzona jest na inną wielkość przy pomocy przetwornika wielkości wejściowej nazywanego czujnikiem. W pomiarze przetworzeniowo-porównawczym porównujemy ze wzorcem wielkość przetworzoną.

**Przykład 18.** Przykłady przetworników i pomiarów przetworzeniowo-porównawczych



- 1) Waga sprężynowa składa się ze sprężyny i linijki wyskalowanej w jednostkach siły lub masy. Waga sprężynowa działa więc przyrządem przetworzeniowo-porównawczy. Sprężyna jest przetwornikiem siły na długość, natomiast długość mierzona jest przez bezpośrednie porównanie długości sprężyny z odległością wskazów (kresiek) linijki. Ze względu na wygodę wskaźy linijki wyskalowane są w jednostkach masy.
- 2) Amperomierz magnetoelektryczny składa się z przetwornika natężenia prądu elektrycznego na kąt i podziałki wyskalowanej od razu w amperach. Podczas odczytu następuje porównanie kąta odchylenia wskazówki ze skalą kątomierza.
- 3) Termometr cieczowy składa się z przetwornika temperatury na wysokość słupa cieczy oraz podziałki. Podczas pomiaru porównujemy długość słupka cieczy ze wzorcem długości dla wygody od razu wyskalowanym w jednostkach temperatury (np. stopniach Celsjusza).
- 4) Barometr puszkowy jest przetwornikiem ciśnienia powietrza na długość (wielkość odkształcenia puszki). Odkształcenie puszki zamieniane jest na ruch obrotowy wskazówki, kąt obrotu wskazówki mierzy się na podziałce wyskalowanej od razu w jednostkach ciśnienia.
- 5) Miernik natężenia dźwięku składa się z mikrofonu, przetwornika zmian ciśnienia powietrza na napięcie elektryczne i woltomierza wyskalowanego w skali logarytmicznej czyli w decybelach. Zmiany ciśnienia pochodzą od fali akustycznej której natężenie jest mierzone.

W elektronicznych przyrządach cyfrowych mierzona wielkość zamieniana jest na napięcie, które mierzy się przy pomocy zestawu komparatorów cyfrowych, które zamieniają napięcie na liczbę, liczba ta jest wyświetlana na wyświetlaczu (ekranie).

### 2.3. Teoria reprezentacji

Z matematycznego punktu widzenia pomiar definiujemy jako odwzorowanie struktur. Odwzorowanie struktur jest przekształceniem, które nie tylko obiektom empirycznym przyporządkowuje w obiekty matematyczne, ale relacjom pomiędzy obiektami przyporządkowuje w relacje matematyczne (pomiędzy symbolami matematycznymi) oraz działaniom na obiektach – działania matematyczne. Jeśli takie odwzorowanie jest homomorfizmem struktur to nazwiemy je reprezentacją (jest to uogólnienie odwzorowania opisanego wzorem (24)). Poniżej podamy ogólną definicję reprezentacji a w następnych podrozdziałach podane zostaną szczegóły dla konkretnych struktur.

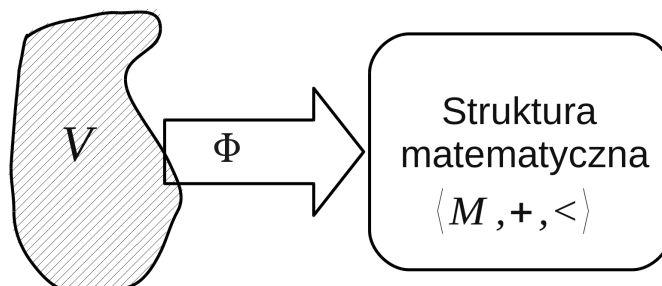
**Definicja 7** (Odwzorowanie pomiarowe). Odwzorowanie obiektów empirycznych w liczby nazwiemy odwzorowaniem pomiarowym jeśli jest reprezentacją struktury empirycznej w strukturze algebraicznej.

**Definicja 8** (Reprezentacja). Reprezentacją struktury  $\mathbb{V}$  w strukturze  $\mathbb{M}$  jest odwzorowanie  $\Phi$  przekształcające relacje i działania w strukturze  $\mathbb{V}$  empirycznej w relacje i działania w strukturze algebraicznej, które jest homomorfizmem struktur (homomorfizm zdefiniowany jest w rozdziale 2.3.1). Odwzorowanie to zapisujemy symbolicznie:

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{M} \quad (28)$$

gdzie  $\mathbb{V}$  jest strukturą empiryczną, czyli zbiorem obiektów  $V$  z działaniami i relacjami pomiędzy nimi,  $\mathbb{M}$  jest strukturą algebraiczną tego samego rodzaju co  $\mathbb{V}$ <sup>25</sup>.

$\Phi$  jest odwzorowaniem (nazwiemy je odwzorowaniem pomiarowym) ze struktury  $V$  w strukturę algebraiczną  $\mathbb{M}$  (patrz wzór (1)). Odwzorowanie to przyporządkowuje każdemu obiektowi empirycznemu  $v \in V$  wartość mierzonej wielkości  $\Phi(v)$  (np. w postaci pary wartość wielkości, niepewność).



**Rysunek 12.** Schemat pomiaru jako odwzorowania. Struktura matematyczna jest zbiorem  $M$  z działaniem  $+$  i relacją porządku  $<$

### 2.3.1. Struktura algebraiczna, relacje, działania

Podamy poniżej podstawowe definicje matematyczne w wielkim skrócie. W definicji poprawnego reprezentowania występują dwa kluczowe terminy: homomorfizm i struktura algebraiczna, poniżej przybliżymy te pojęcia, pełniejszy wykład można znaleźć w podręcznikach matematyki [7, 16, 4].

**Definicja 9** (Struktura algebraiczna<sup>26</sup>). Struktura algebraiczna jest zbiorem, w którym są zdefiniowane działania i relacje. Jeśli zbiór oznaczymy  $M$ , działania  $\circ_i$  (dla  $i = 1, \dots, n_d$ ,  $n_d$ -liczba działań), a relacje  $\rho_j$  ( $j = 1, \dots, n_\rho$ ,  $n_\rho$ -liczba relacji) to strukturę zapiszemy jako:

$$\mathcal{M} = \langle M, \circ_1, \dots, \circ_{n_d}, \rho_1, \dots, \rho_{n_\rho} \rangle \quad (29)$$

W teorii pomiarów zazwyczaj zakłada się, że mamy jedno działanie i jeden porządek, wtedy struktura empiryczna ma postać:

$$\langle M, \circ, \prec \rangle \quad (30)$$

gdzie:  $M$  - zbiór obiektów empirycznych,  $\circ$  - operacja składania obiektów,  $\prec$  - relacja porządku w obiektach empirycznych.

**Przykład 19** (Struktura liczb rzeczywistych). Liczby rzeczywiste  $\mathbb{R}$  z dodawaniem  $+$  i porządkiem  $<$  („naturalnym porządkiem”) tworzy strukturę liczb rzeczywistych i zapiszemy ją jako  $\langle \mathbb{R}, +, < \rangle$  gdzie:  $+$  - dodawanie liczb rzeczywistych,  $<$  relacja ostrego porządku.

<sup>25</sup>Struktury są tego samego rodzaju jeśli relacje i działania mają tę samą ilość wejść i wyjść. Np. dodawania ma dwa wejścia i jedno wyjście

<sup>26</sup>Rozważana będzie struktura z porządkami, często używany jest termin struktura porządkowo algebraiczna, lub system algebraiczny

**Definicja 10** (Produkt kartezjański). Produkt kartezjański  $V_1 \times V_2$  dwóch zbiorów  $V_1$  i  $V_2$  jest to zbiór par  $(x, y)$ :

$$V_1 \times V_2 = \{(x, y) : x \in V_1 \wedge y \in V_2\} \quad (31)$$

$\wedge$  – znak koniunkcji, czyli „i”, („lub” oznaczamy  $\vee$ ).

$V_1$  i  $V_2$  są dowolnym zbiorami.

**Definicja 11** (Relacja binarna). **Relacją w  $V$**  jest dowolny podzbiór produktu kartezjańskiego  $V \times V$ , czyli powiemy, że  $R$  jest relacją, jeśli  $R \subseteq V \times V$ .

Relację zapisujemy:  $(x, y) \in R$  lub  $xRy$

**Przykład 20** (relacja równości  $=$ ). Równość  $x = y$  można zapisać jako  $(x, y) \in =$  ( $x$  i  $y$  są w relacji równości  $=$ ).

**Definicja 12** (Właściwości relacji). Relacja  $R$  w  $V$  jest:

- 1) przechodnia, jeśli z  $xRy$  i  $yRz$  wynika  $xRz$
- 2) zwrotna, jeśli  $xRx$  dla każdego  $x \in V$
- 3) symetryczna, jeśli  $xRy \Rightarrow yRx$
- 4) przeciwsymetryczna, jeśli zachodzi  $xRy$  to nie może zajść  $yRx$
- 5) antysymetryczna, jeśli  $xRy$  i  $yRx \Rightarrow x = y$
- 6) spójna, jeśli każde dwa elementy są w relacji tj., dla każdego  $x, y \in V$  zachodzi  $xRy$  lub  $yRx$
- 7) acykliczna jeśli dla każdego ciągu uporządkowanego elementów  $a_1Ra_2, \dots, a_{n-1}Ra_n$  z  $V$  nie zachodzi  $a_1 = a_n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$ -liczby naturalne).

dla każdego  $x, y, z \in V$

**Przykład 21** (Porządek liniowy). Relacja  $R$  jest porządkiem liniowym w  $V$  jeśli jest przechodnia, antysymetryczna, zwrotna i spójna. Przykładem jest porządek nieostry  $\leq$ . Jest antysymetryczny bowiem  $x \leq y$  i  $y \leq x$  to  $x = y$ , oraz zwrotny bowiem  $x \leq x$ . Przechodniość i spójność wynikają z konstrukcji liczb rzeczywistych z liczb wymiernych (dowód wymaga wiedzy z podstaw matematyki). Porządek ostry  $<$  w liczbach rzeczywistych jest przeciwsymetryczny: jeśli  $x < y$  to  $\neg(y < x)$  ( $\neg$  oznacza negację). Porządek nieostry  $\leq$  definiuje się mając porządek ostry:  $x \leq y \Leftrightarrow (x < y \wedge x = y)$ .

**Definicja 13** (Podstawowe rodzaje porządków i relacji). Relacja  $R$  w  $V$  jest

- 1) **porządkiem liniowym** jeśli jest przechodnia, antysymetryczna, zwrotna i spójna.
- 2) **relacją równoważności** jeśli jest przechodnia, zwrotna i symetryczna.
- 3) **relacją porządku ostrego** jeśli jest przechodnia, przeciwsymetryczna i zupełna.
- 4) **relacją poprzedzania** jeśli jest przechodnia i przeciwsymetryczna.

Można pokazać, że każda relacja przechodnia jest acykliczna (ale nie na odwrót).

### 2.3.2. Homomorfizm struktur algebraicznych

W praktyce pomiarowej mamy do czynienia ze strukturami empirycznymi, w których zdefiniowana jest jedna relacja dwuargumentowa oraz jedno działanie, dlatego definicję homomorfizmu zapiszemy dla takich struktur.

Na strukturę empiryczną składa się zbiór obiektów empirycznych oraz działania jakie na nich możemy wykonać i relacje które można empirycznie zrealizować. W przypadku pomiarów wielkości ekstensywnych<sup>27</sup> mamy dwie operacje pomiarowe:

<sup>27</sup>Wielkości ekstensywne są addytywne a intensywne nie są addytywne.

- 1) operacja składania obiektów  $\circ$
- 2) operacja komparacji, która zadaje relację porządku  $\prec$  (relacja ta nazywana jest w teorii pomiaru relacją poprzedzania)

Strukturę empiryczną można symbolicznie zapisać jako:

$$\mathbb{V} = \langle V, \circ, \prec \rangle \quad (32)$$

gdzie  $V$  jest zbiorem obiektów empirycznych.

Operacja składania  $\circ$  jest operacją, w wyniku której, z dwóch obiektów tworzymy jeden nowy obiekt (złożony z dwóch) należący do zbioru obiektów empirycznych  $V$ . Relacja porządku  $\prec$  obiektów empirycznych<sup>28</sup> określa jaki obiekt jest większy ze względu na mierzoną wielkość.

Jeśli w systemie obiektów empirycznych mamy zdefiniowany porządek i operację składania to możemy powiedzieć, że mamy do czynienia z pomiarem w skali ilorazowej. Przez skalę rozumiemy system empiryczny z odwzorowaniem w strukturę algebraiczną<sup>29</sup>. Rozważane są w literaturze skale porządkowe, gdy mamy jedynie w strukturze empirycznej porządek oraz skale interwałowe gdy nie można ustalić bezwzględnie zera (patrz [9, 15, 14]).

**Przykład 22** (Pomiar ciężaru wagą szalkową równoramienną). Pomiar ciężaru polega na porównaniu masy obiektu z masą zbioru odważników, które . Składanie obiektów  $\circ$  polega na położeniu na jednej szalce kilku ciał. Obiekt  $a \circ b$  ( $a \circ b \in V$ ) jest złożeniem dwóch ciał  $a$  i  $b$ . Jeśli na szalkę wagi położymy ciała  $a$  i  $b$  to możemy zważyć obiekt  $a \circ b$ . Ustalanie relacji poprzedzania  $\prec$  następuje przez wykorzystanie narzędzia pomiarowym jakim jest waga szalkowa równoramienna, która spełnia funkcję komparatora. Komparator pozwala na określenie, który obiekt ma większy ciężar, jeśli dla dwóch ciał mamy  $a \prec b$  oznacza, że obiekt  $b$  jest cięższy od obiektu  $a$ , czyli obiekt  $b$  przeważył.

Z powodu błędów pomiarowych porównanie wielkości obiektów nie daje zawsze rozstrzygnięcia. Możliwe są trzy wyniki komparacji ciała  $a$  z ciałem  $b$ :

- 1) przeważa szalka z ciałem  $a$ , czyli ciało  $a$  jest cięższe od ciała  $b$  co zapisujemy  $b \prec a$ ,
- 2) szalki są w „równowadze”, czyli nie wiemy, które ciało jest cięższe, nie zachodzi równość z powodów błędów komparacji. Wynik pomiaru opisujemy jako nieporównywalność, co zapisujemy  $a \sim b$ <sup>30</sup>.
- 3) przeważa szalka z ciałem  $b$ , czyli ciało  $b$  jest cięższe od ciała  $a$  co zapisujemy  $a \prec b$ ,

W ogólnym przypadku relacja nieporównywalności nie jest relacją równoważności (relacja równoważności musi być przechodnia a relacja nieporównywalności w ogólnym przypadku nie jest przechodnia).

#### Definicja 14. Homomorfizm struktur

Homomorfizm jest odwzorowaniem zachowującym strukturę, czyli odwzorowaniem, które porządkowi w jednym zbiorze przyporządkowuje w porządek w innym zbiorze i działanie odwzorowuje w działanie.

Jeśli rozważymy dwie struktury  $\mathbf{V} = \langle V, \prec, \circ \rangle$  i  $\mathbf{M} = \langle M, \prec, + \rangle$  to homomorfizm  $\Phi$  tych struktur oznacza, że dla każdego  $a, b \in V$  i  $\Phi(a), \Phi(b) \in M$  zachodzi:

<sup>28</sup>W teorii pomiarów zazwyczaj zamiast o empirycznej relacji porządku mówi się relacji poprzedzania mającej właściwość ogólniejsze od relacji porządku liczbowego  $<$

<sup>29</sup>Dokładnie skalą pomiarową jest klasa równoważnych odwzorowań

<sup>30</sup>Warunek równowagi wykorzystywany jest w pomiarze kompensacyjnym opisanym w rozdziale 2.2

- 1)  $a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) < \Phi(b)$
- 2)  $\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b)$

gdzie  $<$  jest relacją poprzedzania w zbiorze  $\mathbf{M}$ ,  $+$  jest działaniem w  $\mathbf{M}$ .

W następnym rozdziale przedstawione będą dwa przypadki, pomiar idealny gdy nie ma błędów pomiarowych i przypadek reprezentacji przedziałowej gdy występują jedynie błędy systematyczne.

### 2.3.3. Pomiar idealny, reprezentacja liczbowa

W przypadku pomiaru idealnego, gdy nie ma błędów pomiarowych, właściwości obiektów charakteryzowane są jedną liczbą (dokładna wartość wielkości) i pomiar opisany jest funkcją o wartościach liczbowych:

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (33)$$

gdzie  $V$  jest zbiorem obiektów empirycznych,  $\mathbb{R}$  jest zbiorem liczb rzeczywistych, a  $\Phi$  jest funkcją opisującą pomiar konkretnej wielkości (odwzorowanie pomiarowe).

Należy podkreślić, że tylko w przypadku pomiaru idealnego jedna liczba poprawnie reprezentuje właściwości obiektów i można powiedzieć, że wynikiem pomiaru jest jedna liczba. W praktyce nigdy tak nie jest, pomiar idealny jest jedynie modelem niezbędnym do analizowania skal pomiarowych i niektórych właściwości pomiaru (patrz [9, 15, 14]).

**Definicja 15.**  $\Phi$  jest **reprezentacją** struktury  $\langle V, \prec, \circ \rangle$  w strukturze  $\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$ , jeśli spełnione są dwa warunki:

- 1) addytywność  $\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b)$
- 2) zachowanie porządku:  $a \prec b \Rightarrow \Phi(a) < \Phi(b)$

gdzie  $a, b \in V$  ( $a$  i  $b$  są obiektami empirycznymi),  $\circ$  jest operacją składania obiektów (z dwóch obiektów składamy jeden „większy”),  $\prec$  jest relacją poprzedzania (ustalania przy pomocy komparacji co jest większe).

Z warunków tych widać, że odwzorowanie  $\Phi$  przyporządkowuje relacji poprzedzania  $\prec$  relację porządku  $<$  liczb rzeczywistych, a operacji składania  $\circ$  przyporządkowuje operację dodawania liczb rzeczywistych.

#### Przykład 23. Pomiar masy

Rozważmy pomiar masy, formalnie pomiar taki opiszemy odwzorowaniem  $m : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Relacją poprzedzania zadana jest przy pomocy wagi. Warunek pierwszy  $\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b)$  oznacza masa dwóch obiektów równa jest sumie mas tych obiektów. Dwa obiekty  $a$  i  $b$  po złożeniu dają obiekt  $a \circ b$ . Masę dwóch obiektów zapisujemy jako  $m(a \circ b)$ , wtedy  $m(a \circ b) = m(a) + m(b)$ . Relacja poprzedzania zadana jest przez wagę: zapis  $a \prec b$  oznacza, że ciało  $b$  przeważa na wadze ciało  $a$ . Oczywiście chcemy aby to oznaczało, że ciało  $b$  jest cięższe od ciała  $a$ , co zapisujemy  $m(a) < m(b)$ . Zwróćmy uwagę na to, że relacja  $\prec$  zadana jest na ciałach a rekcja  $<$  na wartościach mas.

### 2.3.4. Reprezentacja przedziałowa, błąd systematyczny

Jeśli można pominąć zjawiska losowe, to wynik pomiaru reprezentujemy przedziałem. Przedziały oznaczać będziemy literami z kreską  $\bar{a} = [a_1, a_2]$ . Zbiór przedziałów  $I$  tworzy strukturę z dodawaniem i porządkiem przedziałowym:  $\mathbb{I} = \langle I, <, \oplus \rangle$ .

Porządek przedziałowy  $<$  i dodawanie  $\oplus$  w zbiorze przedziałów  $I$  definiujemy następująco:

$<$  – porządek przedziałowy:

$$\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow a_2 < b_1,$$

lub inaczej:  $\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow \forall x \in \bar{a} \wedge \forall y \in \bar{b} : x < y$ .

$\oplus$  dodawanie przedziałów  $\bar{c} = \bar{a} \oplus \bar{b}$ :

$$[c_1, c_2] = [a_1, a_2] \oplus [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (34)$$

gdzie:  $\bar{c} = [c_1, c_2]$ ,  $\bar{a} = [a_1, a_2]$ ,  $\bar{b} = [b_1, b_2]$ ,  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in I$  lub ogólniej:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \{z = x + y : x \in \bar{a} \text{ i } y \in \bar{b}\} \quad (35)$$

Analogicznie można zdefiniować odejmowanie przedziałów  $\bar{c} = \bar{a} \ominus \bar{b}$ :

$$\bar{a} \ominus \bar{b} = \{z = x - y : x \in \bar{a} \text{ i } y \in \bar{b}\} \quad (36)$$

Jeśli wyniki pomiarów właściwości struktury empirycznej  $\langle V, \prec, \circ \rangle$  opiszemy przedziałami to odwzorowanie pomiarowe (28) ma postać:

$$\langle V, \prec, \circ \rangle \xrightarrow{\Psi} \langle I, <, \oplus \rangle \quad (37)$$

Odwzorowanie  $\Psi$  jest reprezentacją przedziałową struktury empirycznej  $\langle V, \prec, \circ \rangle$ , jeśli spełnione są następujące warunki:

1.  $\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b)$

2.  $a \prec b \Rightarrow \Phi(a) < \Phi(b)$

gdzie  $a, b \in V$  są obiektami empirycznymi,  $\Phi(a) \in I$  i  $\Phi(b) \in I$ .

Wartości funkcji  $\Phi(a)$  i  $\Phi(b)$  są przedziałami.

### 2.3.5. Środek i promień sumy przedziałów, propagacja błędu maksymalnego

Przedział  $\bar{a}$  można opisać środkiem  $\text{Mid}(\bar{a})$  i promieniem  $\text{Rad}(\bar{a})$

$$\begin{aligned} \text{Mid}(\bar{a}) &= \text{Mid}([a_1, a_2]) = \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \text{Rad}(\bar{a}) &= \text{Rad}([a_1, a_2]) = \frac{a_2 - a_1}{2} \end{aligned} \quad (38)$$

Środek i promień oznaczmy odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{Mid}(\bar{a}) &= a_S \\ \text{Rad}(\bar{a}) &= \Delta a \end{aligned} \quad (39)$$

Każdy przedział możemy więc zapisać jako:

$$\bar{a} = a_S \pm \Delta a = [a_S - \Delta a, a_S + \Delta a] \quad (40)$$

Zasady dodawania przedziałów mają więc postać:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \bar{a} \oplus \bar{b} = \\ &= [a_S - \Delta a, a_S + \Delta a] \oplus [b_S - \Delta b, b_S + \Delta b] = \\ &= [(a_S + b_S) - (\Delta a + \Delta b), (a_S + b_S) + (\Delta a + \Delta b)] = \\ &= (a_S + b_S) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{aligned}$$

Powyższe równania można zapisać w postaci w notacji (39):

$$\text{Mid}(\bar{a} \oplus \bar{b}) = \text{Mid}(\bar{a}) + \text{Mid}(\bar{b}) \quad (41)$$

$$\text{Rad}(\bar{a} \oplus \bar{b}) = \text{Rad}(\bar{a}) + \text{Rad}(\bar{b}) \quad (42)$$

Równanie (42) zapiszemy krótko następująco:

środek sumy przedziałów równa się sumie środków przedziałów

$$c_S = a_S + b_S \quad (43)$$

promień sumy przedziałów jest sumą promieni przedziałów

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b \quad (44)$$

Dodawanie promieni (44) można nazwać **prawem propagacji błędu maksymalnego** i wynika ono z właściwości modelu przedziałowego. Jednak w metrologii przyjmuje się, że zasady propagacji niepewności oparte są na regułach probabilistycznych.

### 3. PODSTAWY TEORII PRAWDOPODOBIENSTWA

Teorię prawdopodobieństwa stosuje się do reprezentacji zjawisk, których nie daje się opisać równaniami deterministycznymi i nie wiemy, która z możliwości się zrealizuje. Układy takie nazywa się często chaotycznymi a z punktu widzenia empirycznego przejawia się to niepowtarzalnością wyników obserwacji w tych samych warunkach. Model probabilistyczny jest jedną z możliwości opisu zjawisk w których obserwujemy zachowania chaotyczne. W drugiej połowie XX w. powstały dwie teorie o których należałoby wspomnieć: teoria chaosu deterministycznego [17] i teoria zbiorów rozmytych [10]. Zastosowanie teoria zbiorów rozmytych do opisu pomiaru przedstawione jest w pracy [21].

#### 3.1. Pojęcia podstawowe

Podstawowymi pojęciami teorii prawdopodobieństwa są: zdarzenie, zbiór zdarzeń elementarnych, zmienna losowa, prawdopodobieństwo. W tym rozdziale przedstawione będą najważniejsze definicje i krótkie wyjaśnienie, więcej informacji można znaleźć w literaturze [13, 12, 5].

Zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem możliwości jakie mogą zrealizować się z eksperymentem. Klasycznym przykładem jest rzut kością<sup>31</sup>, sześć możliwości upadku kości (opisany zazwyczaj kropkami) tworzy zbiór zdarzeń elementarnych.

Ponieważ w fizyce interesują nas właściwości badanych obiektów więc do opisu zdarzeń stosujemy wartości liczbowe charakteryzujące obserwowane zjawiska. Funkcję, która zdarzeniom przyporządkowuje liczby, nazywamy *zmienną losową*.

**Przykład 24** (Losowanie kul z urny). .

W pudełku (urnie) znajduje się  $N$  kul o różnych masach. Zbiór kul jest zbiorem zdarzeń elementarnych. Eksperyment polega na losowaniu jednej kuli. Wynikiem eksperymentu jest jedna kula, która znalazła się poza pudełkiem, jednak wynik eksperymentu wygodnie jest opisać jako: wylosowano kulę, której masę wyznacza się ważąc kulę po wylosowaniu.

<sup>31</sup>Teoria prawdopodobieństwa została zapoczątkowana x XVIIw przez Fermata i Pascala do opisu gier

Każdej kuli możemy przypisać masę, funkcja która przyporządkowuje kulom masy nazywa się w probabilistyce zmienną losową. Nazwa „funkcja losowa” oznacza, że przed losowaniem nie znamy masy żadnej z kul, a w wyniku eksperymentu losowego masę poznamy dopiero po wylosowaniu kuli z pudełka.

Losowość eksperymentu opisujemy miarą losowości nazywaną prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo jest opisane jest dla zdarzeń, natomiast w praktyce interesuje nas prawdopodobieństwo uzyskania konkretnego zbioru wartości zmiennej losowej, i to prawdopodobieństwo nazywa się rozkładem prawdopodobieństwa.

**Przykład 25.** Rozkład mas

Powróćmy do przykładu nr.24. Załóżmy że w urnie jest 100 kul i każda może być wylosowana z jednakowym prawdopodobieństwem  $P = \frac{1}{100}$ . Ponadto zakładamy, że w urnie jest  $n_1 = 20$  kul o masie  $m_1 = 20g$ ,  $n_2 = 50$  kul o masie  $m_2 = 30g$  i  $n_3 = 30$  kul o masie  $m_3 = 80g$ . Rozkład prawdopodobieństwa mas nie jest jednostajny bowiem liczności różnych mas są różne. Prawdopodobieństwa dla kolejnych mas wynoszą:

$$P(m_1) = \frac{n_1}{N} = 0,2, \quad P(m_2) = \frac{n_2}{N} = 0,5, \quad P(m_3) = \frac{n_3}{N} = 0,3 \quad (45)$$

Poniżej przedstawiony jest podobny przykład.

**Przykład 26.** Pudełko czekoladek

Rozważmy pudełko z różnymi czekoladkami o różnych masach. Zdarzenie losowe polega na losowym wyborze jednej lub kilku czekoladek. Załóżmy że interesuje nas masa wylosowanych czekoladek, czyli wynikiem obserwacji jest masa wylosowanych czekoladek. Jeśli losujemy z pudełka pięć czekoladek to rozważamy zdarzenie, które jest zbiorem pięciu czekoladek czyli zbiorem, które jest sumą pięciu zbiorów jednoelementowych składających się każdy z jednej czekoladki. Zbiór pięcioelementowy jest zdarzeniem złożonym, każdy zbiór jednoelementowy jest zdarzeniem elementarnym. Funkcja, która każdej czekoladce przyporządkowuje masę jest odwzorowaniem opisującym pomiar masy losowo wybranej czekoladki i jest zmienną losową. Natomiast wartości mas czekoladek są wartościami zmiennej losowej. Zbiór wartości mas jest zbiorem liczb rzeczywistych i może być zbiorem dyskretnym, jeśli czekoladki mają określone wartości mas (mogących się powtarzać), ale też może to być zbiór ciągły.

**3.2. Zmienna losowa, zbiór zdarzeń elementarnych**

Poniżej podane zostaną definicje najważniejszych pojęć probabilistyki.

**Definicja 16** (Zbiór zdarzeń elementarnych). Zbiór zdarzeń elementarnych jest dowolnym zbiorem, który interpretujemy jako zbiór możliwych zdarzeń, z których składają się dowolne zdarzenia jakie mogą się wydarzyć. Zakładamy, że wszystkie możliwe zdarzenia są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych. Z punktu widzenia matematycznego o tym zbiorze zakładamy nie zakładamy nic dodatkowego. Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy będziemy  $\Omega$ .

Podkreślmy, że założeniem jest to, że każde zdarzenie (oznaczymy je  $A$ ) jakie zostało zaobserwowane jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych czyli  $A \subset \Omega$ . Oznacza to,



że każde zdarzenie może być przedstawione jako suma mnogościowa<sup>32</sup> zdarzeń elementarnych, lub inaczej, że każde zdarzenia składa się ze zdarzeń elementarnych, można to zapisać wzorem:

$$A = \bigcup_{i \in I} \omega_i \quad (46)$$

gdzie  $\omega_i$  jest  $i$ -tym elementem zbioru zdarzeń elementarnych,  $\omega_i \in \Omega$ ,  $I$  jest zbiorem wskaźników takich, że  $\omega_i \in A$ . Symbol  $\bigcup$  oznacza sumę zbiorów (sumę mnogościową).

Pojęcie zdarzenia elementarnego oznacza, że wszystkie zdarzenia nieelementarne dają się złożyć ze zdarzeń elementarnych.

W praktyce trudno jest numerować elementy zbioru zdarzeń elementarnych i wygodniej jest posługiwać się wartościami wielkości charakteryzującymi zdarzenia. Zdarzenia opisujemy podając wielkość fizyczną charakteryzującą to zdarzenie. Każda wielkość opisana jest funkcją, która obiektom (zdarzeniom) przyporządkowuje wartość liczbową.

### Definicja 17. Zmienna losowa

Zmienna losowa jest funkcją, która zdarzeniom przyporządkowuje liczby:

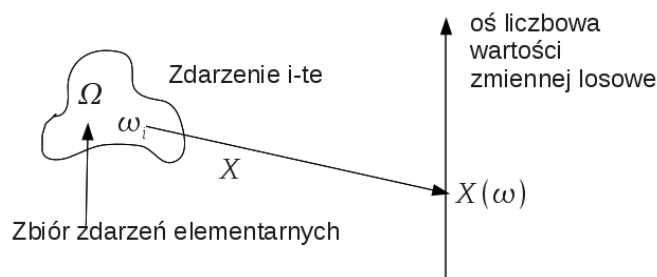
$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (47)$$

$\Omega$  – zbiór zdarzeń elementarnych,

$\mathbb{R}$  – liczby rzeczywiste,

$x = X(\omega)$  – wartość zmiennej losowej dla zdarzenia  $\omega \in \Omega$  ( $X(\omega)$  nazywane jest realizacją zmiennej losowej  $X$ ).

Zmienne losowe będziemy oznaczać literami wielkimi np.  $X$ , wartości zmiennych – losowych literami małymi  $x$ , wartość  $x$  jest realizacją zmiennej losowej  $X$  dla pewnego zdarzenia  $\omega$ , czyli:  $x = X(\omega)$ .



**Rysunek 13.** Zmienna losowa jako odwzorowanie ze zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$  w zbiór wartości liczbowych

Zmienna losowa jest odwzorowanie, które zdarzeniom przyporządkowuje wartości liczbowe, nie jest to jednak zwyczajna funkcja bowiem przed wykonaniem eksperymentu nie wiemy, które wartości zrealizują się. Z punktu widzenia modelu probabilistycznego eksperyment pomiarowy traktujemy jako losowanie pewnego stanu układu ze wszystkich możliwych stanów badanego układu, czyli ze zbioru zdarzeń elementarnych. Po wykonaniu pomiaru układ przechodzi w stan  $\omega \in \Omega$ , stan ten jest pewnym zdarzeniem i dla tego zdarzenia uzyskujemy wartość liczbową (wynik pomiaru) będącą wartością zmiennej losowej  $x = X(\omega)$ .

<sup>32</sup>Suma zbiorów nazywana jest sumą mnogościową w celu odróżnienia od sumy algebraicznej liczb.

Zmienna losowa jest odpowiednikiem odwzorowania pomiarowego (28), ale wynik pomiaru w modelu probabilistycznym nie jest zdeterminowany i wartości zmiennej losowej (czyli wartości pomiarowe) pojawiają się w sposób losowy, co opisujemy rozkładem prawdopodobieństwa wyników pomiaru.

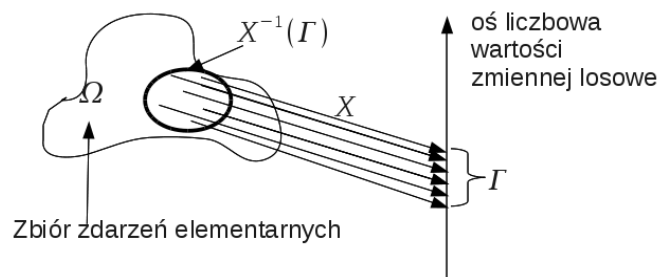
**Przykład 27** (Losowanie czekoladek). Rozważmy jak w przykładzie 26 pudełko z czekoladkami. Zmienną losową jest funkcja przyporządkowująca czekoladkom wartość masy. Przykładem zdarzenia są wszystkie czekoladki o masie zawierające się w przedziale  $[m_1, m_2]$ . Można rozważyć inną zmienną losową, np. wartością zmiennej losowej może być kolor papierka w jaką zawinięta jest czekoladka, wtedy wyróżnimy zbiór czekoladek zapakowanych w niebieski papierek.

Zmienna losowa służy do opisu zdarzeń. Zdarzenie to fakt, to coś co się wydarzyło, ale musimy je opisać i nazwać. Zdarzenia opisujemy wartościami liczbowymi, je charakteryzującymi. Jeśli zdarzeniu  $\omega$  przyporządkujemy liczbę  $x$  to nazwiemy ją wartością zmiennej losowej i zapiszemy  $X(\omega)$ . W praktyce do opisu zdarzeń wykorzystujemy wartości zmiennej losowej.

Zazwyczaj zdarzenia opisujemy podając warunek jaki spełniają wartości wielkości fizycznych charakteryzujących opisywane obiekty. Ogólnie zbiór zdarzeń elementarnych spełniający warunek, że wartość zmiennej losowej  $X$  zawarte są w zbiorze  $\Gamma$  zapiszemy jako  $A_\Gamma$ :

$$A_\Gamma = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \Gamma\} \quad (48)$$

Równanie to oznacza:  $A_\Gamma$  jest zbiorem takich elementów  $\omega \in \Omega$ , dla których zbiór wartości zmiennej losowej zawarty jest w zbiorze  $\Gamma$ .



**Rysunek 14.** Zbiór zdarzeń spełniający warunek  $X(\omega) \in \Gamma$

Zbiór  $\Gamma$  jest warunkiem definiującym zdarzenie  $A_\Gamma$  przez podanie właściwości zdarzenia (zbioru zdarzeń elementarnych).

### 3.2.1. Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  opisuje jak często może zajść zdarzenie  $A$ . Prawdopodobieństwo opisuje populację, czyli zespół obiektów (zespół statystyczny), ale nie opisuje pojedynczych obiektów lub zdarzeń. Zakładamy, że wszystkie obserwowalne zdarzenia są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$ , czyli  $A \subset \Omega$ . Jeśli przez  $2^\Omega$  oznaczymy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru  $\Omega$  to zdanie  $A \subset \Omega$  zapiszemy jako  $A \in 2^\Omega$ . Zakładamy, że wszystkie zdarzenia opisywalne w modelu probabilistycznym są elementami zbioru  $2^\Omega$ , czyli wszystkie dopuszczalne zdarzenia tworzą podzbiór zbioru  $A \in 2^\Omega$ .

W praktyce niezbędne są działania na zbiorach takie jak suma zbiorów i iloczyn zbiorów i ważne jest aby zbiór uzyskany w wyniku operacji mnogościowych na innych zbiorach był również zdarzeniem. Oznaczmy przez  $\mathbf{F}(\Omega)$  zbiór takich podzbiorów zbioru  $\Omega$ , który zawiera wszystkie zbiory wraz z wynikami wszystkich możliwych operacji mnogościowych na tych zbiorach<sup>33</sup>. Taki zbiór nazywa się  $\sigma$ -ciałem zbioru  $\Omega$ . Zbiór  $\mathbf{F}(\Omega)$  ma tę własność, że jeżeli  $A, B \in \mathbf{F}(\Omega)$  to  $A \cup B \in \mathbf{F}(\Omega)$  i  $A \cap B \in \mathbf{F}(\Omega)$  (równania te muszą być spełnione również dla dowolnej przeliczalnej sumy i przeliczalnej liczby iloczynów zbiorów).

Prawdopodobieństwo jest miarą zdefiniowaną na podzbiórach zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$ . Ponieważ musimy wykonywać operacje sumy i iloczynu na zbiorach zdarzeń więc w definicji prawdopodobieństwa założymy, że te podzbiory tworzą  $\sigma$ -ciało.

### Definicja 18. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo  $P$  jest miarą na  $\sigma$ -ciele  $\mathbf{F}(\Omega) \subset 2^\Omega$ :

$$P : \mathbf{F}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \quad (49)$$

spełniająca następujące warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3.  $P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N P(A_i)$ ,

gdzie:  $A_i$  – rodzina zbiorów parami rozłączna, tj.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla każdej pary różnych zbiorów ( $i \neq j$ ),

$\emptyset$  – zbiór pusty,

$\Omega$  – zbiór zdarzeń elementarnych.

Jak wynika z formy zapisu, prawdopodobieństwo jest funkcją, która każdemu podzbiórowi zdarzeń elementarnych przyporządkowuje wartość liczbową z przedziału  $[0, 1]$ .

Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest przeliczalny (złożony z przeliczalnej liczby elementów) to zbiór  $2^\Omega$  wszystkich podzbiorów zbioru  $\Omega$  jest zawsze  $\sigma$ -ciałem<sup>34</sup>.

Wzór (49) oznacza, że każdemu zdarzeniu  $A$ , rozumianemu jako podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$ , przyporządkowujemy prawdopodobieństwo będące liczbą z przedziału  $[0, 1]$ .

### 3.2.2. Zmienna losowa dyskretna

**Definicja 19.** Zmienna losowa jest **dyskretna** jeśli zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest przeliczalny, czyli jeśli zdarzenia  $\omega_k$  można ponumerować:

$\omega_k, k = 1, 2, \dots$ , dla  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$ -zbiór liczb naturalnych (liczba zdarzeń  $\omega_k$  może być nieskończona). Zbiór zdarzeń elementarnych można przedstawić jako sumę zdarzeń elementarnych  $\Omega = \bigcup_{k=1}^K \omega_k$ .

Dla zmiennej losowej dyskretnej  $X$  zarówno zbiór jej realizacji  $x_k = X(\omega_k)$  jak i zbiór prawdopodobieństw  $P(\omega_k)$  są dyskretne. Przez  $X(\omega_k)$  rozumiemy wartość wyniku eksperymentu losowego. Przykładem są wyniki pomiarów (wynik pomiaru jest wartością zmiennej losowej).

<sup>33</sup>Operacje mnogościowe to dodawanie i mnożenie (czyli część wspólna) zbiorów.

<sup>34</sup>Jeśli cały zbiór  $2^\Omega$  nie jest  $\sigma$ -ciałem to wybieramy taki podzbiór  $\mathbf{F}(\Omega) \subset 2^\Omega$ , który jest  $\sigma$ -ciałem

**Definicja 20.** Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej nazywamy zbiór par  $(p_k, x_k)$ , gdzie  $k = 1, \dots, N$  prawdopodobieństwo  $p_k = P(\omega_k)$ ,  $x_k = X(\omega_k)$ . W skrócie, zbiór prawdopodobieństw  $p_k$  opisuje rozkład prawdopodobieństwa.

Ponieważ zakładamy, że zdarzenia elementarne są rozłączne, prawdopodobieństwo zdarzenia  $A_\Gamma$ , opisanego warunkiem (48), jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń składających się na zdarzenia  $A$ :

$$P(A_\Gamma) = \sum_{\omega_k: X(\omega_k) \in \Gamma} P(\omega_k) \quad (50)$$

Wzór (50) oznacza, że prawdopodobieństwo  $P(A_\Gamma)$  równe jest sumie prawdopodobieństw takich zdarzeń elementarnych  $\omega_k$  dla których wartość zmiennej losowej  $X(\omega_k)$  znajduje się w zbiorze  $\Gamma$ .

Zdarzenie  $A_\Gamma$  opisane jest warunkiem  $X(\omega) \in \Gamma$  (wzór (48)). Suma w powyższym równaniu przebiega po takich  $\omega_k$  dla których  $X(\omega_k) \in \Gamma$ . Zapis  $X(\omega_k) \in \Gamma$  oznacza zbiór zdarzeń  $\omega_k$  takich, dla których wartość  $X(\omega_k)$  zmiennej losowej jest zawarta w zbiorze  $\Gamma$ . Zatem aby policzyć prawdopodobieństwo zbioru zdarzeń należy zsumować prawdopodobieństwa jego elementów.

**Przykład 28** (Rzut kością sześcienną). Rzucamy raz kostką. Zdarzenia można ponumerować liczbami naturalnymi, wartość zmiennej losowej można zdefiniować jako wartość numeru  $x_k = k$ , zdarzenia elementarne są napisami na ściankach kostki:  $\omega_k = „k”$  („k” – napis, symbol, liczba oczek, czyli  $\omega_1 = [\cdot], \omega_2 = [:\cdot], \omega_3 = \left[ \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$ , itd.).

Zdefiniujemy zdarzenie  $A_\Gamma$  jako uzyskanie w wyniku rzutu kostką numeru większego od 4. Zdarzenie to zapiszemy:

$$A_\Gamma = \{\omega \in \Omega: X(\omega) > 4\}$$

$A_\Gamma$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych takich, że  $k > 4$ , czyli  $k = 5$  lub  $k = 6$ . Warunek określający zdarzenie  $A_\Gamma$  ma postać: wartość zmiennej losowej zawarta jest w zbiorze  $\{5, 6\}$ , czyli zbiór  $\Gamma$  ze wzoru (48) równy jest  $\{5, 6\}$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  wynosi:

$$\begin{aligned} P(A_\Gamma) &= P(\{\omega_5, \omega_6\}) = P(x_k > 4) = \\ &= \sum_{x_k > 4} P(x_k) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

gdzie  $x_k = X(\omega_k)$ .

### 3.3. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych

**Definicja 21.** Dwa zdarzenia  $A$  i  $B$  są **niezależne** jeśli  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Definicja 22.** Dwie zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są **niezależne**, jeśli prawdopodobieństwo łączne jest iloczynem prawdopodobieństw:

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= P(X = x_n, Y = y_m) = \\ &= P(X = x_n)P(Y = y_m) = p_n p_m \end{aligned} \quad (51)$$

Niezależność oznacza, że nie ma korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi, czyli zjawisko losowe opisane zmienną losową  $X$  nie oddziałuje ze zjawiskiem opisanym zmienną losową  $Y$ . Jeśli zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne to kowariancja  $Cov(X, Y) = 0$  (patrz podrozdział 3.8.1 i zadanie 4).

Jeśli pomiędzy zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  istnieje związek przyczynowy (np. w wyniku oddziaływania siłami fizycznymi, polami itp.) to obserwujemy korelację pomiędzy tymi zmiennymi. Odwrotne twierdzenie nie zachodzi, czyli jeśli obserwujemy korelację, to nie wiemy czy mamy do czynienia ze związkiem przyczynowym. Przykładem może być odkrycie (lata sześćdziesiąte XXw.) korelacji pomiędzy piciem kawy a nowotworami krtani w społeczeństwie w USA. Jednak nie oznacza to, że kawa powoduje nowotwór krtani. Związek jest pośredni: często zdarza się, że osoby pijące kawę palą papierosy lub przebywały w zadymionym pomieszczeniu (w latach sześćdziesiątych nie było zakazu palenia w miejscach publicznych). Po tym odkryciu przeprowadzono badanie dla trzech zmiennych, co wyjaśniło korelację.

**Przykład 29.** Dwie kości sześciennie

Rozważmy rzut dwoma kostkami sześciennymi. Jeśli zachowanie się jednej kostki jest niezależne od zachowania się drugiej kostki to możemy napisać że prawdopodobieństwo wyrzucenia dowolnej pary  $(i, k)$  wynosi:  $P(i, k) = P(i)P(k) = \frac{1}{36}$ , gdzie  $i, k = 1, \dots, 6$ .

### 3.4. Przypadek jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych

Zakładamy, że zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest skończony (ma postać  $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ ,  $N$ -liczność zbioru  $\Omega$ ) i wszystkie zdarzenia elementarne  $\omega_i \in \Omega$  (dla  $i = 1, \dots, N$ ) są jednakowo prawdopodobne, czyli  $P(\omega_i) = P(\omega_j)$  dla każdego  $i, j \leq N$ , wtedy prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  wynosi:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (52)$$

gdzie  $\#A$  – liczność (inaczej liczebność) zbioru<sup>35</sup> zdarzeń  $A$ ,  $\#\Omega$  – liczność zbioru zdarzeń elementarnych.

Liczność zbioru  $A$  można zapisać na kilka sposobów:

$$\#A = \#\{\omega_i \in \Omega : \omega_i \in A\} = \quad (53)$$

$$= \#\{i \leq N : \omega_i \in A\} = \quad (54)$$

$$= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_A(\omega_i) \quad (55)$$

gdzie  $\mathbf{1}_A(\omega)$  jest funkcją charakterystyczną<sup>36</sup> zbioru (inaczej funkcją wskaźnikową):

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \omega \in A, \\ 0, & \text{gdy } \omega \notin A. \end{cases} \quad (56)$$

<sup>35</sup>Liczność jest to liczba elementów zbioru, często oznacza się  $\bar{A}$ .

<sup>36</sup>W probabilistyce funkcja charakterystyczna rozkładu prawdopodobieństwa zdefiniowana jest inaczej [5, 12].

### 3.5. Dystrybuanta

Dystrybuanta, nazywana też kumulatywnym rozkładem prawdopodobieństwa[19], zdefiniowana jest jako prawdopodobieństwo zdarzenia  $X(\omega) \leq x$ , czyli prawdopodobieństwo tego, że wartości zmiennej losowej są mniejsze lub równe wartości  $x$ .

**Definicja 23.** Dystrybuantą  $F(x)$  zmiennej losowej  $X$  jest to funkcja  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  przyporządkowująca wartościom zmiennej losowej wartość prawdopodobieństwa zgodnie ze wzorem:

$$F(x) = P(X \leq x) = P((-\infty, x]) \quad (57)$$

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej możemy napisać:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad (58)$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich elementach  $x_i$  mniejszych od  $x$ .

### 3.6. Zmienna losowa ciągła, gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

Zmienna losowa jest **ciągła**, jeśli zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest ciągły (nie jest przeliczalny)<sup>37</sup>. W przypadku ciągłej zmiennej losowej i gdy dystrybuanta jest ciągła to można zdefiniować funkcję gęstość prawdopodobieństwa, opisującą rozkład prawdopodobieństwa dla każdej wartości zmiennej losowej.

**Definicja 24.** Jeśli dystrybuanta jest ciągła to gęstość prawdopodobieństwa  $f$  wiąże się z prawdopodobieństwem  $P$  wystąpienia zdarzenia  $A$  następującym wzorem:

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x) dx \quad (59)$$

Jeśli zbiór  $A$  jest przedziałem  $A = [a, b]$  to prawdopodobieństwo  $P(A)$  ma postać:

$$P(A) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (60)$$

Całka jest polem pod krzywą wykresy funkcji  $f(x)$  i może być traktowana jak uogólnienie sumy:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i \quad (61)$$

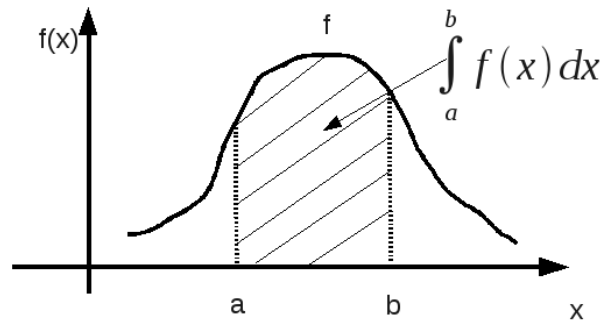
Większość wielkości fizycznych takich jak masa, długość lub czas są wielkościami ciągłymi i zmienne losowe je opisujące są zmiennymi losowymi ciągłymi.

W przypadku zmiennej losowej ciągłej, jeśli istnieje gęstość prawdopodobieństwa  $f$  to dystrybuanta jest ciągła i wyraża się wzorem:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad (62)$$

---

<sup>37</sup>Zazwyczaj oznacza to, że zbiór wartości zmiennej jest zbiorem liczb rzeczywistych.



**Rysunek 15.** Całka w granicach  $[a, b]$  równa jest polom pod krzywą będącą wykresem funkcji  $f(x)$ .

gdzie  $x'$  oznaczamy zmienną całkowania.

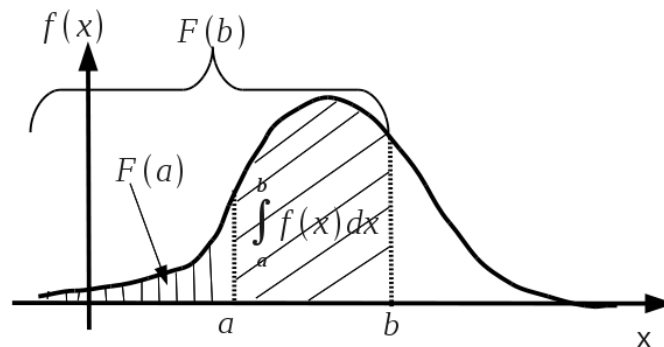
Dystrybuanta  $F$  może być rozumiana jako funkcja pierwotna od gęstości prawdopodobieństwa  $f$ , jeśli dystrybuanta jest ciągła to możemy napisać:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (63)$$

Ponadto wzór (60) opisujący prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa  $X$  znajduje się w przedziale  $(a, b]$  ma postać:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (64)$$

Równanie powyższe opisuje zapisane jest dla przedziału jednostronnie otwartego  $a < X \leq b$  bowiem w definicji zmiennej losowej mamy nierówność nieostrą:  $P(X \leq x)$ . Dla zmiennej losowej ciągłej sytuację przedstawia rysunek 16.



**Rysunek 16.** Prawdopodobieństwa tego że wartość zmiennej losowej równa się całce może być zapisane jako różnica wartości dystrybuant  $F(b) - F(a)$  ponieważ ta różnica jest równa różnicy pól.

### 3.7. Wartość oczekiwana

Rozkłady prawdopodobieństwa można scharakteryzować parametrami opisującymi właściwościami, które można wykorzystać do opisu obiektów, którym przyporządkowaliśmy rozkłady prawdopodobieństwa. Najczęściej wykorzystuje się wartość oczekiwaną opisującą średnią ważoną z obserwowanych zjawisk oraz odchylenie standardowe opisujące rozrzut wyników obserwacji (wyników pomiarów) wokół wartości oczekiwanej (lub wartości średniej w badaniach statystycznych).

### 3.7.1. Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej

Wartość oczekiwana  $E(X)$  jest funkcją, która zmiennej losowej  $X$  (opisanej rozkładem prawdopodobieństwa) przyporządkowuje liczbę. Inaczej można powiedzieć, że wartość oczekiwana jest parametrem rozkładu często nazywana jest średnią z rozkładu<sup>38</sup>.

**Definicja 25.** Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej wartość oczekiwana równa jest z definicji:

$$E(X) = \sum_{k=1}^K x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k \quad (65)$$

gdzie:

$x_k = X(\omega_k)$  – wartość zmiennej losowej dla zdarzenia losowego  $\omega_k \in \Omega$ .

$p_k = P(X = x_k)$  – prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa  $X$  przybierze wartość  $x_k$ , czyli jest to rozkład zmiennej  $X$ .

Zapis  $X = x_k$  oznacza zbiór zdarzeń  $\omega \in \Omega$  takich, że  $X(\omega) = x_k$ . Dla zmiennej losowej dyskretnej zbiór zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\} = \{\omega_k\}_{k=1}^K = \{\omega_k : k = 1, \dots, K\}$$

$K = \#\Omega$  - liczność zbioru zdarzeń elementarnych  $\Omega$ ,

**Wartość oczekiwana jest parametrem modelu probabilistycznego opisanego poprzez rozkład prawdopodobieństwa  $p_k$  i jest równa średniej ważonej z wagami równymi prawdopodobieństwom  $p_k$ .**

Wartość oczekiwana nazywa się też wartością przeciętną, podkreślmy jeszcze raz, że definicja 3.7.1 uwzględnia to, że wkład do sumy (65) proporcjonalny jest do prawdopodobieństwa tego zdarzenia.

### 3.7.2. Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej, zmienna losowa dyskretna

Niech  $X$  oznacza zmienną losową, funkcja  $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wyznacza nową zmienną losową  $Y = g(X)$ , będącą funkcją zmiennej losowej  $X$ .

Wartość oczekiwaną  $E(Y)$  zmiennej losowej  $Y = g(X)$  zapiszemy w przypadku dyskretnej zmiennej losowej korzystając z definicji (65):

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=1}^K g(x_k) p_k \quad (66)$$

gdzie:  $p_n = P(\omega_n)$ ,  $\omega_k$  – zdarzenie elementarne,  $\omega_k \in \Omega$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $x_k = X(\omega_k)$ .

### 3.7.3. Właściwości wartości oczekiwanej

**Wartość oczekiwana  $E(X)$  jest operatorem liniowym**, tzn. spełnia dwa poniższe warunki:

$$(1) E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

---

<sup>38</sup>W podręcznikach fizyki statystycznej często pisze się skrótowo „średnia”.



$$(2) E(\alpha X) = \alpha E(X)$$

gdzie  $X$  i  $Y$  są dwoma zmiennymi losowymi.

Warunek (1) nazywamy addytywnością, a (2) - niezmienniczość ze względu na skalowanie (czyli mnożenie przez liczbę).

Z własności 3.7.3 wynika, że dodanie do zmiennej losowej pewnej stałej  $a$  powoduje dodanie takiej samej stałej do wartości oczekiwanej:

$$E(X + a) = E(X) + a \quad (67)$$

### 3.7.4. Przykłady obliczania wartości oczekiwanej

#### Przykład 30. Rzut monetą.

Moneta ma dwa możliwe zdarzenia:  $O$  - orzeł a  $R$  - reszka. Zakładamy, że prawdopodobieństwa są równe czyli:  $p_O = 0.5$  i  $p_R = 0.5$ . Załóżmy, że pewna gra polega na tym, że za orła dostajemy 10 zł a za reszkę płacimy 5 zł. Opiszemy to zmienna losową o dwóch wartościach:  $x_O = 10\text{zł}$  i  $x_R = -5\text{zł}$ . Wartość oczekiwana wygranej (z złotych) w rzutach monetą wynosi:

$$E(X) = p_O x_O + p_R x_R = 0.5 \cdot 10\text{zł} + 0.5 \cdot (-5)\text{zł} = 2.5\text{zł}$$

Czyli jeśli gramy *długo* w grę polegającą na tym, że za wyrzucenie orła zarabiamy 10zł a na wyrzuceniu reszki tracimy 5zł, to średnio na jednym rzucie zarobimy 2,5zł.

**Przykład 31** (Rzut kością sześcienną nieregularną). Załóżmy, że kość jest niedokładnie wykonana i prawdopodobieństwa są różne, wartości  $x_i$  zmiennej losowej  $X$  opisują wartości wygranych. Opis zmiennej losowej i obliczenia ilustruje tabela:

$i$	$p_i = P(x_i)$	$x_i$	$p_i x_i$
1	0.4	1	0.4
2	0.15	10	1.5
3	0.25	5	1.25
4	0.03	25	0.75
5	0.15	8	1.2
6	0.02	95	1.9
$\sum p_i = 1.0$		$\sum (p_i \cdot x_i) = 7$	

Wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = 7$$

#### Przykład 32. Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Rzucamy kością i każdemu rzutowi przyporządkowujemy wartość wynikającą z zakładów w grze opisanych funkcją  $g$ :

$g(x_n) = n^2 - 6$ , gdzie  $n$  numer zdarzenia= „liczba oczek”,

$x_n = n$  wartość zmiennej losowej (równa liczbie oczek na boku kości),  
 $K$  - liczba zdarzeń elementarnych, dla kości  $K = 6$ .

Szukamy wartości oczekiwanej  $E(g(X))$ :

$i$	$p_i$	$x_i$	$g(x_n)$	$p_i \cdot g(x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	1	-5	$-\frac{5}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	2	-2	$-\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	3	3	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	4	10	$\frac{10}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	5	19	$\frac{19}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	6	30	$\frac{30}{6}$
$\sum_{i=1}^K p_i = 1$		$\sum_{i=1}^K (p_i \cdot g(x_i)) = \frac{55}{6}$		

czyli wartość oczekiwana  $E(g(X)) = \frac{55}{6}$ .

### 3.7.5. Wartość oczekiwana zmiennej losowej ciągłej

**Definicja 26.** Jeśli istnieje funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  zmiennej losowej  $X$  ciągłej to wartość oczekiwana opisana jest całką:

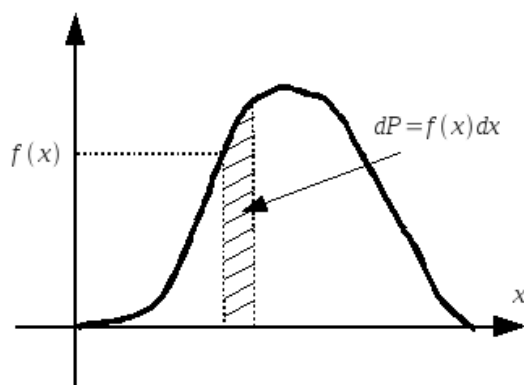
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (68)$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa określona jest definicją 24, jeśli rozpatrzmy nieskończenie mały przedział  $[x, x + dx]$  w całce (60) to możemy napisać:

$$P(x < X < x + dx) = \int_x^{x+dx} f(x) dx = f(x) dx \quad (69)$$

co symbolicznie można zapisać

$$dP = f(x) dx \quad (70)$$



**Rysunek 17.** Rozkład gęstości prawdopodobieństwa i prawdopodobieństwo nieskończenie małego przedziału  $[x, x + dx]$

Należy pamiętać, że zgodnie z definicją prawdopodobieństwa 18 spełniony jest zawsze **warunek unormowania**:

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (71)$$

Całka z gęstości prawdopodobieństwa równa jest jeden.

### 3.7.6. Wartość oczekiwana od funkcji zmiennej losowej, zmienna losowa ciągła

Jeśli istnieje gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$  zmiennej losowej  $X$ , to dla każdej funkcji całkownej  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  można zdefiniować wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $g(X)$ :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (72)$$

**Przykład 33.** Wartość oczekiwana energii kinetycznej

Obliczyć wartość oczekiwaną  $E(E_K) = \overline{E_K}$  energii kinetycznej  $E_K = \frac{mv^2}{2}$ , jeżeli dany jest rozkład prawdopodobieństwa prędkości  $f(v)$ :

$$\overline{E_K} = E\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2} f(v)dv \quad (73)$$

Założymy w tym przykładzie, że prędkość ma rozkład równomierny:  $f(v) = C$  dla  $v \in [0, v_M]$ . Z warunku unormowania  $C = \frac{1}{v_M}$ , wtedy:

$$\begin{aligned} \overline{E_K} &= E\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_0^{v_M} \frac{mv^2}{2} C dv = C \frac{m}{2} \int_0^{v_M} v^2 dv = \\ &= C \frac{m}{2} \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^{v_M} = C \frac{m}{2} \frac{v_M^3}{3} = C \frac{mv_M^3}{6} = \frac{mv_M^2}{6} \end{aligned} \quad (74)$$

### 3.8. Odchylenie standardowe – miara rozrzutu.

**Definicja 27.** Odchylenie standardowe  $\sigma(X)$  jest parametrem rozkładu prawdopodobieństwa zdefiniowanym następująco:

$$\sigma(X) = \sqrt{E((X - E(X))^2)} \quad (75)$$

Odchylenie standardowe jest miarą rozrzutu danych empirycznych wokół wartości oczekiwanej.

Dodatkowo definiuje się wariancję jako kwadrat odchylenia standardowego:

$$V(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2) \quad (76)$$

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej definicję (76) można zapisać następująco:

$$\sigma(X) = V(X) = \sum_{k=1}^K p_k (x_k - E(X))^2 \quad (77)$$

gdzie:  $x_k = X(\omega_k)$  – wartości zmiennej losowej,  $K = \#\Omega$  – liczność zbioru zdarzeń elementarnych.

Własności odchylenia standardowego, estymator odchylenia standardowego i odchylenie standardowe średniej z próby opisane są w następnych rozdziałach.

**Twierdzenie 2** (Rozkład wariancji na składowe). Wariancja wiąże z wartością oczekiwaną zmiennej  $X^2$  następującym równaniem:

$$V(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (78)$$

Dowód polega na wykonaniu podstawieniu:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2$$

czyli

$$V(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (79)$$

gdzie zastosowano zapis  $(E(X))^2 = E^2(X)$

Twierdzenie 2 jest własnością wariancji, nie jest to definicja wariancji.

### 3.8.1. Odchylenie standardowe sumy zmiennych losowych

definiujemy zmienną losową  $Z$ , która jest sumą dwóch zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  czyli

$$Z = X + Y$$

Ponieważ wartość oczekiwana jest liniowa to  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ . Wartość wariancji zależy od korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$ :

$$V(X + Y) = \sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2Cov(X, Y) \quad (80)$$

gdzie  $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$  jest kowariancją i opisuje korelację pomiędzy zmiennymi losowymi.

Jeśli zmienne losowe są nieskorelowane to  $Cov(X, Y) = 0$ <sup>39</sup> i mamy:

$$V(X + Y) = \sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \quad (81)$$

Dla zmiennych losowych dyskretnych kowariancja ma postać:

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) \quad (82)$$

gdzie  $p_{i,j}$  jest rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej łącznej  $(X, Y)$ :

$$p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (83)$$

Jeśli zmienne te są niezależne to  $p_{i,j} = p_{X,i}p_{Y,j}$ , gdzie  $p_{X,i}$  i  $p_{Y,i}$  są rozkładami zmiennej odpowiednio  $X$  i  $Y$ . Po wstawieniu tej zależności do (82) uzyskamy  $Cov(X, Y) = 0$  (patrz zadanie 4).

Ale należy pamiętać, że możliwa jest sytuacja, w której zmienne losowe nie są niezależne a kowariancja jest zerowa, czyli z niezależności wynika brak korelacji ale nie na odwrót.

<sup>39</sup>Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są nieskorelowane jeśli  $Cov(X, Y) = 0$

### 3.8.2. Odchylenie standardowe sumy zmiennej losowej i stałej

Rozważmy zmienną losową  $Z = X + a$ , gdzie  $a$  jest pewną stałą (liczbą). Dodanie stałej liczby do zmiennej losowej zmienia wartość oczekiwaną o tę liczbę (3.7.3), ponieważ dodanie stałej przesuwa cały rozkład (patrz własność opisaną w rozdziale 3.7. Natomiast przesunięcie rozkładu nie zmienia jego kształtu więc nie wpływa na wartość odchylenia standardowego:

$$\sigma(X + a) = \sigma(X) \quad (84)$$

Równanie to stosujemy do obliczenia niepewności zmiennej  $X$ . Ponieważ błąd różni się od wartości zmierzonej o wartość prawdziwą  $x_0$  (czyli o wartość stałą  $x_0$ ): (213):  $\Delta x = x - x_0$  ( $x_0$ - wartość prawdziwa) więc odchylenie standardowe wielkości mierzonej równa się odchyleniu standardowemu błędowi:  $\sigma(x) = \sigma(\Delta x)$ .

### 3.8.3. Uzasadnienie wzoru na wariancję

Wariancja jest miarą rozrzutu danych pomiarowych wokół wartości oczekiwanej  $E(X)$ . Taka miara powinna opisywać średnią odległość wszystkich możliwych wyników pomiarów od wartości oczekiwanej. Jest wiele takich możliwości i poniżej podamy uzasadnienie dlaczego wzór  $E((X - E(X))^2)$  jest definicją spełniającą cechy dobrej miary rozrzutu.

Poniżej opiszemy uzasadnienie wzoru na wariancję w przy założeniu, że obserwowane zjawisko opisywane jest zmienną losową dyskretną. Uogólnienie na zmienne losowe ciągłe jest intuicyjnie łatwe i polega na zamianie sum na całki. Miarę rozrzutu danych pomiarowych opisujemy jako średnią odległość, przy czym należy ustalić wzór na odległość, zasady składania odległości oraz sposób uśredniania:

- 1) odległość  $d_i$  wartości  $x_i$  od wartości oczekiwanej  $E(X)$  równa jest  $d_i = |x_i - E(X)|$
- 2) Wartość średnia równa jest sumie składowych podzielona przez liczbę składowych, uśrednianie opiera się więc na obliczaniu sumy i powinno się więc uśredniać wielkości, które są addytywne <sup>40</sup>.

Rozważmy jako przykład przemieszczenia po linii prostej w jednym wymiarze, można to zrealizować wykonując kolejne kroki (o dowolnych zwrotach). Całkowita droga jest sumą składowych:  $\sum_i d_i$  i średnia droga jest średnią wartości dróg  $d_i$ , gdzie każdy krok miał długość  $d_i$ .

- 3) W celu opisu odległości w przestrzeni zdarzeń probabilistycznych należy zbudować geometrię przestrzeni zdarzeń, czyli przedstawić zdarzenia w przestrzeni reprezentującej zdarzenia elementarne jako niezależne kierunki w wielowymiarowej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Dla przykładu rozważmy rzut kością sześcienną: każde ustawienie kości jest niezależne od pozostałego. Sześciu dozwolonych stanów kości nie można ustawić liniowo na osi – każdy stan kości powinien być niezależnym kierunkiem w przestrzeni sześciowymiarowej.

Jeśli założyć prostopadłość wszystkich kierunków opisujących niezależne zdarzenia elementarne to odległość wynikająca z uzyskania poszczególnych stanów (potraktowanych jak niezależne kroki) należy wyznaczyć korzystając z twierdzenia Pitago-

---

<sup>40</sup>Wymóg addytywności oznacza, że dodawaniu wartości wielkości odpowiada operacja rzeczywista na obiektach

rasa dla wielowymiarowej przestrzeni:

$$d^2 = \sum_{i=1}^N d_i^2 \quad (85)$$

Wzór ten pokazuje, że addytywne są kwadraty odległości (inaczej mówiąc trzeba składać kwadraty dróg) i uśredniać powinno się kwadraty odległości od wartości oczekiwanej.

- 4) średnia z wszystkich możliwych odległości powinna być średnią ważoną z wagą probabilistyczną:

$$(d^2)_{\text{sr}} = \sum_{i=1}^N p_i d_i^2 \quad (86)$$

gdzie  $p_i$  jest prawdopodobieństwem wystąpienia wartości  $x_i$  czyli jest też prawdopodobieństwem wystąpienia odległości  $d_i = |x_i - E(X)|$ .

Zgodnie z definicją wartości oczekiwanej wzór (86) może być zapisany w postaci:

$$(d^2)_{\text{sr}} = E(d_i^2) = \sum_{k=1}^K p_k (x_k - E(X))^2 \quad (87)$$

Powyższe równanie identyczne jest ze wzorem (77) czyli jest poszukiwanym wzorem definiującym wariancję  $V(X)$  w przypadku zmiennej losowej dyskretnej. Wariancja jest więc średnią ważoną kwadratów odległości  $(x_k - E(X))^2$  z wagami równymi prawdopodobieństwom  $p_k$ , przy czym  $x_k = X(\omega_k)$ .

W przypadku ogólnym wzór ten zapiszemy jako  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ , czyli jak w definicji (76).

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej wariancja jest średnią ważoną kwadratów odległości  $(x_k - E(X))^2$  czyli:

$$V(X) = \sum_{k=1}^K p_k (x_k - E(X))^2 \quad (88)$$

gdzie  $x_k = X(\omega_k)$ .

Na rysunku 18 pokazano odchylenie  $X - E(X)$  i wagę  $p_k$  proporcjonalną do pola  $f(x)dx$  zaznaczonego na wykresie dla zmiennej losowej ciągłej.

### 3.9. Mediana, kwantyle

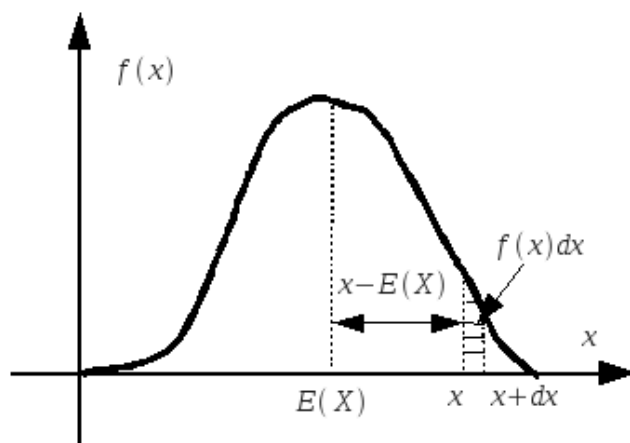
Mediana jest wartością środkową rozkładu, definiujemy ją następująco:

**Definicja 28.** Mediana zmiennej losowej  $X$  jest to liczba  $M$ , która spełnia warunki:

$$P(X \leq M) \geq \frac{1}{2} \text{ i } P(X \geq M) \geq \frac{1}{2} \quad (89)$$

Jeśli dystrybuenta  $F(x)$  jest ciągła, to mediana  $M$  spełnia warunek:

$$F(M) = \frac{1}{2} \quad (90)$$



**Rysunek 18.** Odchylenie  $X - E(X)$  i waga tego odchylenia  $f(x)dx$  proporcjonalna jest do prawdopodobieństwa tego, że zmienna losowa  $X$  ma wartość w przedziale  $[x, x + dx]$ .

**Definicja 29.** Kwantyl  $q_p$  rzędu  $p$  jest to liczba spełniająca warunki:

$$P(X \leq q_p) \geq p \text{ i } P(X \geq q_p) \geq 1 - p \quad (91)$$

Gdy dystrybuanta jest ciągła, to kwantyl jest funkcją odwrotną do dystrybuanty, kwantyl  $q_p$  rzędu  $p$  wynosi:

$$q_p = F^{-1}(p) \quad (92)$$

co jest równoważne równaniu  $P(X \leq q_p) = p$

Mediana ma tą własność, że dzieli na pół zbiór obserwacji: połowa obserwowanych wartości jest mniejsza od mediany a połowa większa, mediana jest kwantylem rzędu 0,5.

### 3.10. Najczęściej wykorzystywane rozkłady prawdopodobieństwa

Opiszemy krótko rozkłady prawdopodobieństwa wykorzystywane w opisie zjawisk fizycznych i w analizie danych doświadczalnych.

#### 3.10.1. Rozkład dwupunktowy

**Definicja 30.** Rozkład dwupunktowy zdefiniowany jest dla zmiennej losowej określonej na dwuelementowym zbiorze  $\Omega = (a_1, a_2)$ . Założymy, że zmienna ta może przybierać dwie dowolne wartości:  $X(a_1) = x_1$  oraz  $X(a_2) = x_2$ .

Rozkład prawdopodobieństwa dany jest równaniami:  $P(a_1) = p_1$  oraz  $P(a_2) = p_2$ . Ponieważ  $P(a_1) + P(a_2) = 1$  więc możemy napisać:  $P(a_2) = 1 - p_1 = 1 - p$ , gdzie wprowadziliśmy oznaczenie  $p_1 = p$ .

Wartość oczekiwana wynosi  $E(X) = \sum_{k=1}^2 p_k x_k = a_1 p + a_2 (1 - p)$ , wariancja:  $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{k=1}^2 p_k (x_k - E(X))^2 = p(1 - p)^2 (a_1 - a_2)^2 + (1 - p)p^2 (a_2 - a_1)^2 = p(1 - p)(a_1 - a_2)^2$ .

Szczególnym przypadkiem rozkładu dwupunktowego jest rozkład zero-jedynkowy. W tym rozkładzie zmienna losowa może mieć dwie wartości jedynka i zero:  $a_1 = 1$  i  $a_1 = 0$ .

Wartość oczekiwana wynosi:  $E(X) = \sum_{k=1}^2 p_k x_k = 1p + 0(1-p) = p$  a odchylenie standardowe  $\sigma(x) = \sqrt{p(1-p)}$

### 3.10.2. Rozkład dwumianowy

Rozważmy eksperyment, w którym możliwe są dwa zdarzenia  $A$  i  $B$ , przy czym zdarzenie  $B$  jest przeciwne do zdarzenia  $A$  bowiem  $A \cup B = \Omega$ . Zdarzenie  $A$  często nazywane jest sukcesem (sukcesem w realizacji próby losowej), a zdarzenie  $B$  porażką. Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  wynosi  $P(A) = p$  i nazywane jest prawdopodobieństwem sukcesu. Natomiast prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$  (prawdopodobieństwo porażki) wynosi  $P(B) = 1 - p$ .

Załóżmy, że powtarzamy  $N$  razy eksperyment, w wyniku którego realizuje się stan  $A$  (zdarzenie  $A$ ) lub stan  $A$  się nie realizuje (czyli pojawia się stan  $B = \Omega \setminus A$ ). Prawdopodobieństwo  $k$  sukcesów, opisane jest to rozkładem:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (93)$$

gdzie  $X$  jest zmienną losową opisującą liczbę sukcesów w eksperymencie powtarzającym  $N$  razy.

Rozkład dwumianowy jest rozkładem dyskretnym o wartości oczekiwanej  $E(k) = Np$  i odchyleniu standardowym  $\sigma(k) = \sqrt{Np(1-p)}$ .

Rozkład dwumianowy wprowadzony został przez statystyka George Udny Yule w roku 1911. Rozkład dwumianowy w Polsce nazywany jest też rozkładem Bernoulliego, ale w publikacjach angielskojęzycznych rozkładem Bernoulliego nazywany jest rozkład zero-jedynkowy (patrz rozdział 3.10.1. Rozkład ten ma ważne zastosowanie w statystyce bowiem każda wartość „słupka” histogramu ma rozkład dwumianowy niezależne od tego jaka zmienna losowa była obserwowana.

#### Przykład 34. Rozkład prawdopodobieństwa „słupków” histogramu

Rozważmy zjawisko opisane dyskretną zmienną losową o wartościach  $x_k$  i rozkładem prawdopodobieństwa  $p_k$ , gdzie  $p_k$  jest prawdopodobieństwem tego, że w pojedynczym eksperymencie uzyskamy wartość zmiennej losowej czyli  $p_k = P(X = x_k)$  (patrz rozdział 3.2.2). Jeśli eksperyment losowy powtórzymy  $N$  razy to wartość zmiennej  $x_k$  może wystąpić  $n_k$  razy. Wartość  $n_k$  jest zmienną losową i opisuje ile razy w próbie o licznosci  $N$  pojawiła się wartość zmiennej losowej równa  $x_k$ . Przy kolejnym powtórzeniu serii  $N$  obserwacji możemy otrzymać inne wartości  $n_k$ , Wykres zależności  $n_k$  od  $k$  nazywamy histogramem (patrz rozdział 4.1). Prawdopodobieństwo tego, że w próbie  $N$  eksperymentów  $n_k$  razy wystąpi wartość  $x_k$  opisana jest rozkładem dwumianowym o prawdopodobieństwie sukcesu  $p = p_k$  i wynosi:

$$P(n_k) = \binom{N}{n_k} (p_k)^{n_k} (1-p)^{N-n_k} \quad (94)$$

Wzór ten jest prawdziwy dla każdego  $k$  czyli dla każdego słupka histogramu wyznaczonego dla wyniku obserwacji  $x_k$  o wysokości  $n_k$ .



Zmienna losowa  $n_k$  ma odchylenie standardowe  $\sigma(n_k) = \sqrt{Np_k(1-p_k)}$ . Jeśli podstawimy jako  $p_k$  wartość empiryczną prawdopodobieństwa  $p_k = \frac{n_k}{N}$  to otrzymamy  $\sigma(n_k) = \sqrt{n_k(1 - \frac{n_k}{N})}$ . Jeśli założymy dodatkowo, że  $n_k \ll N$ , czyli, że „słupki” histogramu są względnie małe to otrzymamy często używany przybliżony wzór:

$$\sigma(n_k) \approx \sqrt{n_k} \quad (95)$$

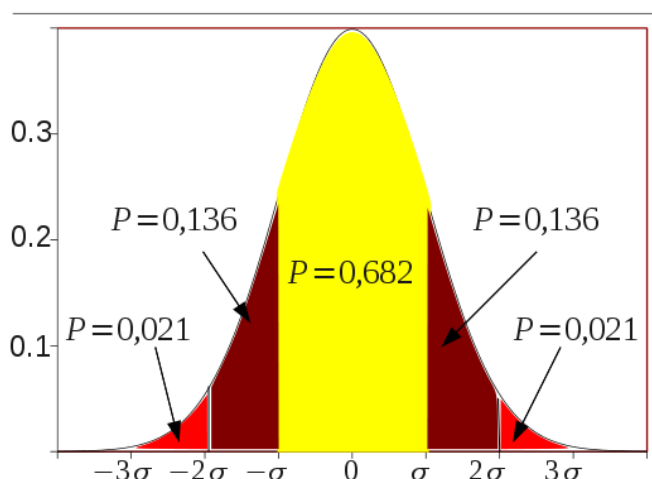
Wynik ten nie zależy od badanego rozkładu i opisuje niepewność empirycznie obserwowanej liczby pojawienia się pewnej wartości zmiennej losowej w dowolnym pomiarze. W przypadku histogramu zmiennej losowej ciągłej całe rozumowanie jest prawdziwe bowiem wtedy  $p_k$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru znajduje się w  $k$ -tym przedziale (koszyku). Niepewność pojawienia się  $n_k$  obserwacji tego, że mierzona zmienna znajdzie się w  $k$ -tym przedziale wynosi w przybliżeniu  $\sqrt{n_k}$ . Warto zauważyć, że jest to wartość maksymalna i dla dużych wartości  $n_k$  niepewność jest mniejsza od  $\sqrt{n_k}$ .

### 3.10.3. Rozkład normalny

Jeżeli założymy, że na niedokładność pomiaru wpływa bardzo wiele czynników i wartości wyników pomiarów tworzą zbiór ciągły (wynik pomiaru jest liczbą rzeczywistą) to możemy założyć, że wynik pomiaru jest zmienną losową o rozkładzie normalnym (inaczej nazywany rozkładem Gaussa). W fizyce statystycznej zazwyczaj zakłada się, że wielkości fizyczne takie jak prędkość cząsteczek opisywane są rozkładem normalnym. W analizie pomiarów często zakłada się, że błędy pomiarowe mają rozkład normalny.

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa  $f(x)$  dla rozkładu normalnego zależy tylko od dwóch parametrów wartości oczekiwanej  $E(X) = m$  i odchylenia standardowego  $\sigma(X) = \sigma$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (96)$$



**Rysunek 19.** Rozkład normalny, zaznaczone są prawdopodobieństwa  $P(|X - \mu| > d)$  dla  $d = \sigma$ ,  $d = 2\sigma$  i  $d = 3\sigma$

W badaniach empirycznych często korzysta się z tego, że rozkład normalny jest jednoznacznie wyznaczony przez dwa parametry. Decyzja statystyczne podejmowane są zazwyczaj przy założeniu rozkładu normalnego i mogą być więc sformułowane wykorzystując tylko dwa parametry.

Prawdopodobieństwo  $P(|X - \mu| > d)$  tego, że wartość zmiennej losowej znajduje się w odległości od  $\mu$  większej niż  $d$  szybko maleje z  $d$  ( $d$  jest promieniem przedziału o środku w  $\mu$ ). Można więc powiedzieć, że większość wyników pomiarów znajduje się w pobliżu wartości oczekiwanej  $\mu$ . Krzywa na rysunku obrazuje, że większość otrzymanych wyników będzie bliska wartości oczekiwanej  $\mu$ . Promień przedziału  $d$  może być wyrażony jako wielokrotność odchylenia standardowego (patrz rozdział 4.4):

$$P(|X - \mu| > k_p \sigma(X)) = P(\mu - k_p \sigma(X) \leq X < \mu + k_p \sigma(X)) \quad (97)$$

### 3.10.4. Rozkład jednostajny

W przypadku gdy uważamy, że zdarzenia z pewnego przedziału mogą zachodzić z takim samym prawdopodobieństwem to stosujemy rozkład jednostajny nazywany również równomiernym lub prostokątnym. Rozkład jednostajny w przedziale  $[a, b]$  opisany jest funkcją:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ C & \text{dla } a < x < b \\ 0 & \text{dla } x > b \end{cases} \quad (98)$$

Stałą  $C$  dobieramy tak, aby spełniony był warunek unormowania zdefiniowany wzorem (71):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

czyli:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b C dx = C(b - a) = 1$

tak więc  $C = \frac{1}{(b-a)}$

Wartość oczekiwana wynosi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{1}{2}(b + a). \text{ Odchylenie standardowe:}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b - a}{2} \quad (99)$$

Wygodnie jest zapisać przedział  $[a, b]$  w postaci środka  $x_0 = \frac{b+a}{2}$  o promieniu przedziału  $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ , wtedy  $[a, b] = [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ . Przy takich oznaczeniach wartość oczekiwana  $E(X) = x_0$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta x$ .

Rozkład jednostajny ma zastosowanie tam, gdzie można założyć, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Jeśli rozważymy przyrząd pomiarowy o rozdzielczości, lub błędzie granicznym  $\Delta x$  to można założyć, że błąd pomiarowy wynikający z ograniczonej rozdzielczości ma rozkład jednostajny w przedziale  $[-\Delta x, \Delta x]$ . Niepewność standardowa (równa odchyleniu standardowemu) wyniesie wtedy  $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta x$  (patrz wzór (157)).

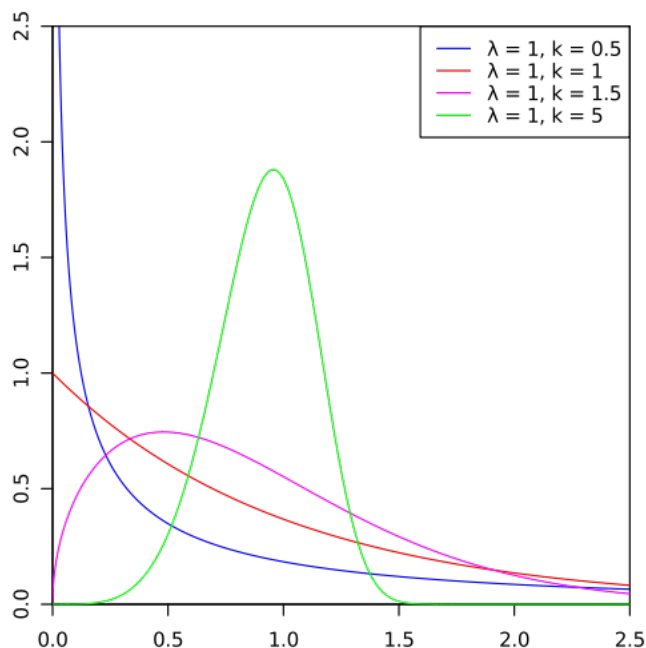
### 3.10.5. Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla jest modyfikacją rozkładu normalnego. Znajduje zastosowanie w przypadkach, gdy wartości zmiennej losowej (wartości pomiarów) są dodatnie i są powody

sądzić, że rozkład prawdopodobieństwa nie jest symetryczny. Dystrybuanta rozkładu Weibulla dana jest wzorem:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \text{ dla } x > 0 \quad (100)$$

gdzie  $\lambda$  i  $k$  są parametrami rozkładu.



**Rysunek 20.** Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Weibulla dla różnych wartości parametrów  $k$  i  $\lambda = 1$ . (źródło - wikipedia.pl)

Wartość oczekiwana rozkładu Weibulla wynosi:

$$E(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (101)$$

natomiast wariancja (kwadrat odchylenia standardowego):

$$V(X) = \sigma^2(X) = \lambda^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2 \right] \quad (102)$$

gdzie  $\Gamma(x)$  jest funkcją gamma:  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . Dla liczb naturalnych  $\Gamma(n) = n!$

Rozkład Weibulla stosowany do opisu następujących zjawisk:

- 1) czas przeżycia (czas przeżycia osób, które osiągnęły pewien wiek). Zazwyczaj jest tak, że parametr opisujący przeżycie zależy od wieku osoby, w takim przypadku nie można użyć rozkładu normalnego do opisu tego zjawiska,
- 2) niezawodności urządzeń technicznych,
- 3) przewidywania pogody.

## 4. ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

W wyniku eksperymentu uzyskujemy liczby, które są wartościami zmiennej losowej dla konkretnego zdarzenia losowego. Jeśli eksperyment powtórzymy wielokrotnie zapewniając niezmienną się warunki (warunki otoczenia, zakłócenia, zmienne niezależne, przyrządy) to otrzymamy serię danych pomiarowych, które w statystyce nazywane są próbą

losową. Metody statystyczne analizy danych mają na celu wyznaczenie postaci rozkładu statystycznego opisującego obserwowane zjawisko oraz parametrów rozkładu statystycznego, takich jak wartość oczekiwana i odchylenie standardowe. Parametry, które należy wyznaczyć na podstawie danych pomiarowych nazywa się również parametrami modelu zjawiska [9].

Parametry wyznaczone na podstawie danych empirycznych nazywamy estymatorami. Poniżej zajmiemy się najważniejszymi i najczęściej używanymi parametrami jakimi jest wartość oczekiwana i odchylenie standardowe. Ale rozważania zaczniemy od empirycznego wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa.

Przyjmujemy następujące definicje.

### **Definicja 31.** Statystyka

Niech ciąg liczb  $x_n$ , dla  $n = 1, \dots, N$  będzie próbą losową pewnego rozkładu, czyli serią pomiarową. Statystyką jest dowolna funkcja danych pomiarowych  $\Theta(x_1, \dots, x_N)$ .

### **Definicja 32.** Estymator

Estymatorem jest przybliżona wartość parametru rozkładu wyznaczona z danych empirycznych (próby losowej)

## **4.1. Estymacja prawdopodobieństwa z danych doświadczalnych, histogram**

Zakładamy, że eksperyment jest doświadczeniem losowym i polega na  $N$  krotnej obserwacji zmiennej losowej  $X$  opisanej rozkładem prawdopodobieństwa, które w przypadku zmiennej losowej dyskretnej opisane jest prawdopodobieństwami  $p_k$  a ciągłej funkcją gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ .

Estymator rozkładu prawdopodobieństwa i konstrukcję histogramu opiszemy osobno w przypadku zmiennej dyskretnej i zmiennej ciągłej.

### **4.1.1. Konstrukcja histogramu w przypadku obserwacji zmiennej losowej dyskretnej**

W przypadku zmiennej dyskretnej zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  ma postać  $K$ -elementowego zbioru, który możemy zapisać w postaci  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ . Zbiór  $\Omega$  jest zbiorem możliwych wyników obserwacji.

Eksperyment polega na  $N$  krotnym powtórzeniu tej samej obserwacji (lub pomiaru). Każda obserwacja jest doświadczeniem losowym i matematycznie polega na losowaniu ze zbioru możliwości  $\Omega$  jednego elementu, eksperyment jest więc  $N$  krotnym losowaniem ze zbioru  $\Omega$  (przy czym w losowaniu nie ubywa elementów ze zbioru  $\Omega$ ). Jeśli w naszym eksperymencie element  $\omega_k$  zaobserwujemy  $n_k$  razy (dla  $k = 1, \dots, K$ ) to ciąg liczb  $n_k$  jest histogramem.

**Przykład 35** (Rzut kością sześcienną). Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczmy  $\{\omega_1, \dots, \omega_6\}$  (jak w przykładzie 28), gdzie  $\omega_k$  oznacza, że wypadło ustawienie  $k$  oczek. Jednokrotny eksperyment polega na jednokrotnym rzucie kością. Na podstawie jednego rzutu nic nie możemy powiedzieć o empirycznym rozkładzie prawdopodobieństwa. Powtarzamy rzut kością  $N$  razy i na podstawie serii obserwacji ustalamy ile razy wypadło  $k$  oczek na kości, liczbę tą oznaczamy  $n_k$  i jest ona naszym poszukiwanym histogramem.

**Tablica 3.** Wyniki 60 rzutów kością

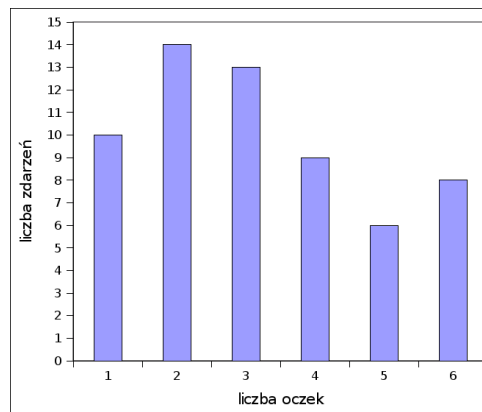
2	5	1	6	5	3	1	6	1	3
3	6	6	3	5	4	3	2	2	1
2	6	6	2	4	2	3	2	3	2
4	1	3	3	4	2	2	1	2	5
1	3	4	2	6	1	4	3	1	5
2	2	1	3	3	5	4	6	4	4

Zadanie jakie, każdy powinien wykonać polega na rzeczywistym wykonaniu takiego eksperymentu. W tabeli 3 zamieszczone są przykładowe wyniki.

Liczby wystąpień poszczególnych oczek, czyli histogram dla tego eksperymentu przedstawione są w tabeli 4 oraz na wykresie:

**Tablica 4.** Histogram (częstość wystąpień w funkcji liczby oczek) 60 rzutów kością dla danych z tabeli 3

liczba oczek $k$	1	2	3	4	5	6
liczba wystąpień $n_k$	10	14	13	9	6	8



**Rysunek 21.** Histogram dla danych z tabeli 4

Empiryczna wartość prawdopodobieństwa (estymator prawdopodobieństwa)<sup>41</sup>  $\tilde{p}_k$  wyznaczona na podstawie serii danych wynosi:

$$\tilde{p}_k = \tilde{P}(\omega_k) = \frac{n_k}{N} \quad (103)$$

$n_k$  – liczba wystąpień zdarzenia  $\omega_k$ ,  $\tilde{P}(\omega)$  – estymator prawdopodobieństwa zdarzenia  $\omega_k$ .

#### 4.1.2. Konstrukcja histogramu w przypadku obserwacji zmiennej losowej ciągłej

Zakładamy, że obserwowana wielkość jest zmienną losową ciągłą o jakimś nie znanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

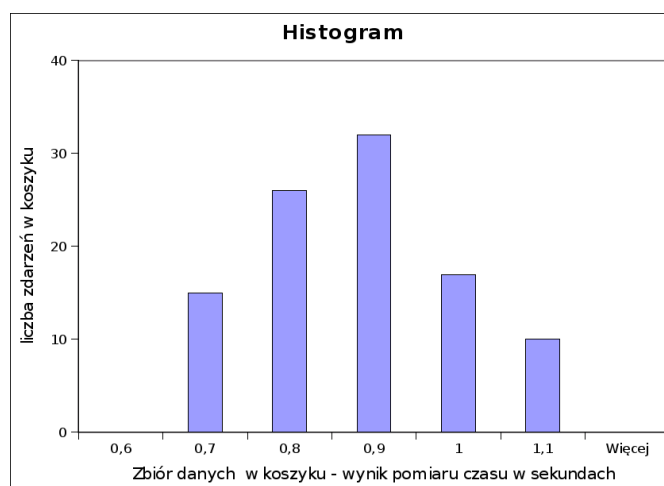
<sup>41</sup>Estymatorem pewniej wielkości jest przybliżeniem tej wielkości uzyskanej bądź z danych empirycznych (zawsze obarczonej błędem) lub przybliżonych obliczeń, estymator można nazwać przybliżeniem lub oszacowaniem

Eksperyment polega na  $N$ -krotnym powtórzeniu pomiaru pewnej wielkości fizycznej, każdy wynik pomiaru  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), traktujemy jak realizację tej samej zmiennej losowej. Serię pomiarów  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), porządkujemy od najmniejszej do największej wartości liczbowej i uzyskujemy ciąg  $x_1, x_2, \dots, x_N$  danych. i dzielimy obszar wartości wyników obserwacji na  $K$  przedziałów o stałej szerokość  $d = \frac{1}{K}(x_N - x_1)$ , gdzie  $x_N$  jest maksymalną wartością i  $x_1$  jest wartością minimalną serii pomiarowej. Ustalamy liczbę  $n_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) elementów serii pomiarowej w każdym z przedziałów. Każdy  $k$ -ty przedział  $\bar{a}_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) można zapisać w postaci:  $\bar{a}_k = [x_1 + (k - 1)\Delta x, x_1 + k\Delta x]$ , wyliczamy więc liczbę  $n_k$  elementów  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) ze zbioru danych  $x_1, \dots, x_N$ , które znajdują się w przedziale  $\bar{a}_k$ . Histogram jest wykresem zależności  $n_k$  od  $k$ , jest to rozkład częstości występowania zjawiska. Zależność  $n_k$  od  $k$  jest dyskretna dlatego wykres powinien być słupkowy a nie typu XY dla funkcji ciągłych.

**Prawdopodobieństwem empirycznym** zdarzenia  $x_k$  (czyli estymatorem rozkładu prawdopodobieństwa) jest względna częstość tego zdarzenia:

$$\tilde{p}_k = P(x_k) = \frac{n(x_k)}{N}, \quad (104)$$

Prawdopodobieństwo empiryczne  $\tilde{p}_k$  zależy od wielkości próby  $N$  (liczby pomiarów), dlatego można zapisać  $\tilde{p}_k(N)$



**Rysunek 22.** Przykład histogramu, rozkład czasu rzutu gumką z wysokości 2m. Przedziały czasowe są co 0,1s.

### Twierdzenie 3. Podstawowe twierdzenie statystyki matematycznej (Twierdzenie Gliwienki-Cantellego.)

Gdy powtórzmy eksperyment próby losowej nieskończenie wiele razy, to w granicy zbliżymy się dowolnie blisko<sup>42</sup> do prawdopodobieństwa  $P(A)$ :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{N} \quad (105)$$

Dla zmiennej losowej dyskretnej o zbiorze wartości zmiennej losowej  $\{x_k\}_{k=1}^K$ :

$$p_k = P(x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x_k)}{N} \quad (106)$$

<sup>42</sup>Dostatecznie blisko, tj. z prawdopodobieństwem równym jeden.

gdzie  $n(x_k)$  jest liczbą zdarzeń takich, że  $X = x_k$  w próbie losowej o licznosci  $N$ .

Wykorzystując oznaczenia ze wzoru (104) równanie (106) ma postać:

$$p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_k \quad (107)$$

gdzie prawdopodobieństwo empiryczne  $\tilde{p}_k$  zależy od wielkości próby  $N$  (liczby pomiarów).

#### 4.2. Estymatory wartości oczekiwanej

Jest wiele estymatorów wartości oczekiwanej, podamy trzy przykłady:

1) wartość średnia z próby losowej (zapisano różne oznaczenia):

$$\bar{x} = \bar{X} = x_{Av} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \quad (108)$$

gdzie:  $\tilde{x}_i$  wynik  $i$ -tego eksperymentu ( $i$ -tej próby).

**Wartość średnia** z próby losowej jest **estymatorem wartości oczekiwanej**. Średnia nie jest jedynym estymatorem wartości oczekiwanej, ale jest najlepszym jeśli badamy zmienną losową o rozkładzie normalnym.

2) środek danych (dobry estymator dla rozkładów symetrycznych i jednostajnych)

$$\text{Mid}(x) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{max} + \tilde{x}_{min}) \quad (109)$$

$\tilde{x}_{min}$  – wartość minimalna z danych empirycznych (próby losowej):  $\tilde{x}_{min} = \min(\{\tilde{x}_i\})$

$\tilde{x}_{max}$  – wartość maksymalna z danych empirycznych (próby losowej):  $\tilde{x}_{max} = \max(\{\tilde{x}_i\})$

3) Średnia ważona:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^N w_i} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{x}_i \quad (110)$$

gdzie:  $w_i$  – wagi,  $i = 1, \dots, N$ .

$$\alpha_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

mianownik  $\sum_{i=1}^N w_i$  jest czynnikiem normującym tak, aby  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$

W analizie pomiarów średnią ważoną wykorzystuje się do wyliczania średniej z danych otrzymanych z różnymi niepewnościami. Jeśli niepewność standardowa wyniku pomiaru  $\tilde{x}_i$  wynosi  $\sigma_i$  to wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu niepewności:  $w_i = \sigma_i^{-2}$  i mamy:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\tilde{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (111)$$

### 4.2.1. Zasady doboru próby w badaniach statystycznych

Przez próbę statystyczną rozumie się wynik wielokrotnie powtórzonego eksperymentu pomiarowego. Próba jest losowa, jeśli można założyć, że każdy eksperyment pomiarowy przeprowadzany jest w jednakowych warunkach i każdy pomiar opisany jest zmienną losową o takim samym rozkładzie.

Rozpatrzmy przykład rzucania kością do gry. Możliwe są dwa sposoby przeprowadzenia eksperymentu:

- a)  $N$  razy rzucamy jedną kością
- b) rzucamy raz  $N$  jednakowymi kośćmi

Takie dwa eksperymenty są równoważne, jeśli kości są jednakowe, a każdy rzut kością przeprowadzony jest w tych samych warunkach i kości nie zmieniają swoich właściwości podczas rzucania.

W badaniach biologicznych i społecznych nie można założyć, że obiekty badania są powtarzalne, należy przyjąć obiektem badań jest cała populacja złożona z wielu jednostek (np. osób z badanego społeczeństwa). Estymatory wartości oczekiwanej opisują całą populację a nie pojedyncze jednostki. Obserwacja polega na losowym wybraniu jednostki ze zbioru populacji i pomiarze badanej właściwości wylosowanej jednostki. Załóżmy, że badana cecha  $i$ -tej jednostki, wybranej w sposób losowy z populacji, wynosi  $\tilde{x}_i$ , średnia opisana wzorem (151) może być w tym przypadku zastosowana do wyznaczenia estymatora wartości oczekiwanej charakteryzującej całą badaną populację, zapiszemy ten wzór ponownie:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \quad (112)$$

gdzie:  $\tilde{x}_i$  wartość badanej cechy  $i$ -tej jednostki wylosowanej z badanej populacji.

We wzorze (112) sumuje się po wskaźniku  $i$ , który numeruje wylosowane z populacji badane jednostki.

**Przykład 36** (Badanie średniej oceny szkolnej). Załóżmy, że badamy populację studentów i interesują nas oceny z matematyki. W tym celu losujemy uczniów i notujemy odpowiednie oceny,  $\tilde{x}_i$  oznacza ocenę z matematyki  $i$ -tego ucznia. Średnia opisuje populację wszystkich badanych uczniów. Problemem, który się pojawia w takich badaniach to, czy taka średnia jest statystyką która jest adekwatna, czyli czy opisuje właściwości badanej populacji.

### 4.2.2. Własności wartości średniej z próby. Średnia z próby a rozkład empiryczny.

**Twierdzenie 4** (Prawo wielkich liczb dla średniej). Załóżmy, że powtarzamy  $N$ -krotnie obserwację zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie ciągłym  $f(x)$ , lub rozkładzie dyskretnym  $p(x_k)$  i otrzymujemy próbę losową  $\tilde{x}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). W granicy dla nieskończenie dużej próby losowej w warunkach powtarzalności wartość oczekiwana równa<sup>43</sup> jest średniej z próby  $\bar{x}$  (w sensie normy probabilistycznej):

$$E(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \quad (113)$$

---

<sup>43</sup>ściślej: zmierza z prawdopodobieństwem 1 do wartości średniej



W celu uzasadnienia tego twierdzenia (nie jest to pełny dowód) rozważymy zmienną losową dyskretną o zbiorze wartości  $\{x_k\}_{k=1,K}$ , gdzie  $K$  jest licznością zbioru zdarzeń elementarnych<sup>44</sup>. Wartości uzyskane w eksperymencie są ciągiem liczb, które należą do zbioru zdarzeń elementarnych, przy czym poszczególne wartości mogą się powtarzać. Eksperyment losowy polega więc na losowaniu ze zbioru wartości  $\{x_k\}_{k=1,K}$ . Załóżmy, że w wyniku obserwacji uzyskujemy ciąg  $N$  danych  $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^N$ . Liczby  $\tilde{x}_i$  są elementami zbioru  $\{x_k\}_{k=1,K}$ , ale zbiór wyników pomiarów może zawierać powtórzenia elementów  $x_k$ . Oznaczmy przez  $n_k$  liczbę powtórzeń elementu  $x_k$  w serii pomiarowej  $\{\tilde{x}_i\}_{i=1,N}$ , wtedy sumę wyników pomiaru

$$\sum_i^N \tilde{x}_i \quad (114)$$

można zapisać w postaci

$$\sum_k^K x_k n_k \quad (115)$$

gdzie  $n_k$  jest liczbą powtórzeń wyniku  $x_k$  w serii pomiarowej  $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^N$

Suma we wzorze (114) przebiega po zbiorze wyników pomiaru, natomiast we wzorze (115) przebiega po zbiorze zdarzeń elementarnych.

Sumę występującą we wzorze (113) można więc zapisać w postaci:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^K x_k \frac{n_k}{N} = \sum_{k=1}^K x_k \tilde{p}_k \quad (116)$$

gdzie:  $N$  – całkowita liczba obserwacji.

Jeśli  $n_k$  jest liczbą wystąpień wartości  $x_k$  w pobranej próbie (całym eksperymencie), to suma wszystkich  $n_k$  jest całkowitą liczbą wykonanych obserwacji:

$$\sum_{k=1}^K n_k = N \quad (117)$$

W pierwszej sumie we wzorze (116) sumujemy po poszczególnych obserwacjach ( $N$  – obserwacji) a w drugiej sumujemy po zbiorze zdarzeń elementarnych ( $a_1, \dots, a_K$ ) (od  $k = 1$  do  $k = K$ ). Zauważmy, że jeśli wartość  $a_l$  nie występuje w próbie (w serii danych) to  $n_l = 0$ .

W granicy dużych  $N$  estymator prawdopodobieństwa  $\tilde{p}_k$  we wzorze (116) zmierza do prawdopodobieństwa  $p_k$  (wynika to z podstawowego twierdzenia statystyki, twierdzenia nr. 3 na stronie 62, wzór (107)):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_k = p_k \quad (118)$$

Tak więc:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K x_k \tilde{p}_k = \sum_{k=1}^K x_k \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_k = \sum_{k=1}^K x_k p_k \quad (119)$$

i w granicy otrzymujemy w powyższym wzorze wartość oczekiwaną.

Równanie (116) można zapisać w postaci następującego twierdzenia.

---

<sup>44</sup>ściślej  $K$  jest licznością zbioru wartości zmiennej losowej dla wszystkich zdarzeń elementarnych.

**Twierdzenie 5.** wartość średnia z próby losowej może być zapisana jako średnia ważona z prawdopodobieństwem empirycznym  $\tilde{p}_k$ :

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^K x_k \tilde{p}_k \quad (120)$$

gdzie:  $\tilde{p}_k$  jest **estymatorem prawdopodobieństwa** (prawdopodobieństwem empirycznym) zdarzenia  $X(\omega_k) = x_k$

$$\tilde{p}_k = \frac{n_k}{N} \quad (121)$$

We wzorze (120) sumowanie jest po zbiorze zdarzeń elementarnych

**Dowód:**

Dowód polega na powtórzeniu rozumowania prowadzącego do równania (116).

$$x_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K n_k x_k = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{N} x_k = \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k x_k \quad (122)$$

gdzie:  $\sum_{k=1}^K$  jest sumą po zdarzeniach elementarnych (wskaźnik  $k$  numeruje zdarzenia elementarne),

$\sum_{i=1}^N$  jest sumą po realizacjach (wskaźnik  $i$  numeruje realizacje empiryczne).

### 4.2.3. Przykłady obliczania średnich.

Założmy, że w wyniku pomiaru otrzymaliśmy serię  $N$  liczb  $\{\tilde{x}_i\}$ , gdzie  $i = 1, \dots, N$ . Ponadto zakładamy, że zbiór możliwych do uzyskania wartości zmiennej losowej jest ograniczony (wartości zmierzone są zbiorem o skończonej liczbie elementów, czyli zbiór zdarzeń elementarnych jest przeliczalny). Oznaczmy elementy tego zbioru  $a_k$ , gdzie  $k = 1, \dots, K$ , oraz  $K$  jest liczebnością zbioru wartości obserwowanej zmiennej ( $\#\Omega = K$ ). Oznacza to, że każda z obserwowanych wartości  $x_i$  jest elementem zbioru  $(a_1, \dots, a_K)$  (np.  $x_1 = a_5, x_2 = a_1$ , czyli w pierwszym eksperymencie uzyskaliśmy  $a_5$  a w drugim  $a_1$ ). Wartość średnia z danych pomiarowych wynosi:

$$\bar{x} = (\tilde{x})_{Av} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K a_k n_k \quad (123)$$

W pierwszej sumie we wzorze (123) sumujemy po poszczególnych obserwacjach ( $N$ -obserwacji) a w drugiej sumujemy po zbiorze zdarzeń elementarnych  $(a_1, \dots, a_K)$  (od  $k = 1$  do  $k = K$ ) zauważmy, że jeśli wielkość  $a_l$  nie występuje w próbie to  $n_l = 0$ .

Wielkość  $\tilde{p}_k = \frac{n_k}{N}$  jest estymatorem rozkładu prawdopodobieństwa (twierdzenie 4.2.2 i wzór (121)). Wzór (123) można więc zapisać w postaci:  $\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^K a_k \tilde{p}_k$ .

**Przykład 37.** Rozpad promieniotwórczy

Założymy, że wynikiem eksperymentu jest liczba rozpadów promieniotwórczych w określonym czasie  $T$ . Obserwację powtarzamy  $N$  razy. Oznaczmy każdą obserwację numerem  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Wynikiem  $i$ -tej obserwacji jest liczba rozpadów, którą oznaczmy  $k_i$  ( $k_i$  jest liczbą rozpadów w  $i$ -tej obserwacji). Jeśli maksymalna liczba rozpadów zaobserwowanych w całym eksperymencie wynosi  $K$  to znaczy, że możliwe wartości  $k_i$

są liczbami ze zbioru  $0, 1, 2, \dots, K$ . Zbiór  $N$  obserwacji zapiszemy więc jako ciąg liczb  $(k_1, \dots, k_N)$ . Niech  $n_k$  oznacza liczbę przypadków, w których wystąpiło  $k$  rozpadów, czyli liczba wartości  $i$ , dla których  $k_i = k$ . Inaczej powiemy  $n_k$  jest liczbą powtórzeń liczby  $k$  w zbiorze wyników obserwacji  $\{k_1, \dots, k_N\}$ . Wartość średnia liczby rozpadów równa jest:

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^K k n_k \quad (124)$$

gdzie:  $N$  – całkowita liczba obserwacji, wzór (117).

Dla przykładu rozpatrzmy ciąg  $N = 25$  obserwacji  $k_i$ :

0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,2,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0.

Widać, że zaobserwowano  $n_0 = 19$  zer,  $n_1 = 5$  jedynek i  $n_2 = 1$  dwójek (czyli  $K = 2$ ).

Średnia liczba  $\bar{k}$  zaobserwowanych rozpadów wynosi:

$$\bar{k} = \frac{1}{25}(20 * 0 + 5 * 1 + 1 * 2) = \frac{7}{25}.$$

**Przykład 38.** Rzut monetą.

Rozważmy jak w przykładzie 30 rzuty monetą – możliwe są dwa stany: orzeł (oznaczymy go 0) i reszka (1). Wynikiem obserwacji jest ciąg  $N$  zer i jedynek: 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... Aby policzyć średnią, wystarczy znać liczbę zer  $n_O$  (liczba orłów) i jedynek  $n_R$  (liczba reszek). Jeśli gramy monetą na pieniądze i za orła dostajemy  $x_O = a$ , a za reszkę płacimy  $b$  (otrzymujemy kwotę ujemną  $x_R = -b$ ), to uzyskana suma w 10 grach wynosi  $s = n_O a - n_R b$ , wartość średnia jaką zarobimy w przeliczeniu na jedną grę (przy grze z  $N$  rzutami) wynosi:

$$\frac{s}{N} = \frac{n_R}{N} x_R + \frac{n_O}{N} x_O = \tilde{p}_R x_R + \tilde{p}_O (-x_O).$$

Jeśli jak w przykładzie 30 wstawimy  $x_O = 10\text{zł}$  i  $x_R = -5\text{zł}$ , średni zarobek na jedną grę wynosi:  $(6 \cdot 10\text{zł} - 4 \cdot 5\text{zł}) \frac{1}{10} = 4\text{zł}$ . Wartość oczekiwana różni się i wyniosła 2, 5zł.

Zauważmy, że  $\tilde{p}_R$  i  $\tilde{p}_O$  są estymatorami prawdopodobieństwa. Wzór ten jest szczególnym przypadkiem wzoru (120) z rozdziału 4.2.2.

#### 4.2.4. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe średniej z próby losowej

Celem pomiaru jest zbadanie zjawiska (obiektu) opisanego zmienną losową  $X$  o rozkładzie  $f_X$ . Jeśli pomiary przeprowadzamy  $N$  razy, to każdy  $n$ -ty akt pomiaru opisujemy inną zmienną losową, którą oznaczymy  $X_n$ . Zakładamy, że te zmienne losowe dotyczą zawsze tego samego obiektu i pomiary przeprowadzane są w tych samych warunkach, mają więc ten sam rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_{X_n} = f_X \quad (125)$$

dla każdego  $n = 1, \dots, N$ .

W wyniku serii pomiarów uzyskujemy serię danych  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^N$ . Każdy  $n$ -ty wynik pomiaru  $\tilde{x}_n$  jest realizacją zmiennej losowej  $X_n$ . Z tego, że rozkłady zmiennych  $X_n$  są jednakowe wynika, że:

$$E(X_n) = E(X) \text{ i } \sigma(X_n) = \sigma(X) \quad (126)$$

Z tego, że  $X$  i  $X_n$  mają jednakowe rozkłady nie wynika, że są to te same zmienne losowe (czyli  $X \neq X_n$ ), jest tak ponieważ  $X$  jest ściśle skorelowane ze sobą natomiast  $X_n$  i  $X_m$  (opisujące kolejne pomiary) nie muszą być skorelowane. Czyli jeśli w  $n$ -tym

eksperymentcie otrzymamy wartość  $\tilde{x}_n$  to w  $m$ -tym, eksperymencie opisanym zmienną losową  $X_m$ , uzyskamy wartość  $\tilde{x}_m$ , która nie musi być taka sama jak  $\tilde{x}_n$ . Utożsamienie  $X_n$  i  $X_m$  oznaczałoby:  $\tilde{x}_n = \tilde{x}_m$  (bo wtedy  $n = m$ ). Jeśli założymy, że kolejne próby są nieskorelowane to:

$$E((X_n - E(X))(X_m - E(X))) = 0 \text{ dla } m \neq n \quad (127)$$

Jeśli zmienne losowe  $X_n$  i  $X_m$  są niezależne to zgodnie z równaniem (52) mamy:

$$P(X_n = \tilde{x}_n, X_m = \tilde{x}_m) = P(X_n = \tilde{x}_n)P(X_m = \tilde{x}_m) \quad (128)$$

Z równania (128) wynika brak korelacji czyli równanie (127) (patrz zadanie 4 ze strony 105).

Wartość średnia wyników  $N$  pomiarów  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$  nie jest dokładnie równa wartości oczekiwanej i po powtórzeniu  $N$  pomiarów uzyskamy inną wartość średnią, gdyż inne będą wartości  $x_1, \dots, x_N$ . Średnią z próby należy więc opisać za pomocą zmiennej losowej  $X_{Av}$ :

$$X_{Av} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad (129)$$

gdzie  $X_n$  jest zmienna losową opisującą  $n$ -ty pomiar ( $n$ -tą obserwację).

**Twierdzenie 6.** Średnia  $X_{Av}$  ma następujące właściwości:

- 1) Wartość oczekiwana średniej z próby równa jest wartości oczekiwanej charakteryzującej obserwowane zjawisko:

$$E(X_{Av}) = E(X) \quad (130)$$

- 2) Odchylenie standardowe średniej z próby licznosci  $N$  jest  $\sqrt{N}$  razy mniejsze o odchylenia standardowego obserwowanego zjawiska:

$$\sigma(X_{Av}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(X) \quad (131)$$

Uśrednianie powoduje zmniejszenie odchylenia standardowego, czyli zmniejszenie niepewności wynikającej ze zjawisk losowych. Oznacza to, że im liczniejsza próba tym średnia jest lepszym przybliżeniem wartości oczekiwanej.

- 3) Odchylenie standardowe  $\sigma(\bar{x})$  średniej ważonej danej równaniem (111) wynosi:

$$\frac{1}{\sigma^2(\bar{x})} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (132)$$

Dowód tej zależności można znaleźć w rozdziale 7 książki Brandta [3].

W dowodzie równania (131) wykorzystuje się niezależność zmiennych losowych  $X_n$

opisujących kolejne próby (kolejne pomiary):

$$\begin{aligned}
 & E((X_{Av} - E(X))^2) = \\
 & = E\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n - E(X)\right)^2\right) = \\
 & = E\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N E(X)\right)^2\right) = \\
 & = \frac{1}{N^2}E\left(\left(\sum_{n=1}^N (X_n - E(X))\right)^2\right)
 \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że dla dowolnej stałej  $a$  zachodzi  $\sum_{n=1}^N a = Na$  oraz dla dwóch ciągów  $a_n$  i  $b_n$  mamy:  $\sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N b_n = \sum_{n=1}^N (a_n + b_n)$ , ponadto:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^2 & = \left(\sum_{n=1}^N a_n\right)\left(\sum_{m=1}^N a_m\right) = \\
 & = \sum_{n=1}^N (a_n)^2 + \sum_{n \neq m}^N a_n a_m
 \end{aligned}$$

wobec tego możemy dalej napisać:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(X_{Av}) & = E\left((X_{Av} - E(X))^2\right) = \\
 & = \frac{1}{N^2}E\left(\left(\sum_{n=1}^N (X_n - E(X))\right)\left(\sum_{m=1}^N (X_m - E(X))\right)\right) = \\
 & = \frac{1}{N^2}E\left(\sum_{n=1}^N (X_n - E(X))^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n \neq m}^N (X_n - E(X))(X_m - E(X))\right) = \\
 & = \frac{1}{N^2}E\left(\sum_{n=1}^N (X_n - E(X))^2\right) = \\
 & = \frac{1}{N^2}NE\left((X_n - E(X))^2\right) = \frac{1}{N}\sigma(X)
 \end{aligned}$$

co dowodzi równania (131). W przekształceniach wykorzystaliśmy (126) i (127).

#### 4.2.5. Estymator wariancji i odchylenia standardowego

Wariancja (i odchylenie standardowe) zmiennej losowej opisują rozrzut i zdefiniowana równaniem (75). Jeśli w wyniku pomiaru uzyskamy zbiór danych empirycznych  $\tilde{x} = \{\tilde{x}_j\}_{j=1}^N$  (danych pomiarowe) to możemy wyznaczyć estymator  $s(\tilde{x})$  odchylenia standardowego i estymator wariancji  $D(X)$ . Można pokazać, że estymator nieobciążony ma

postać:

$$D(X) = s^2(\tilde{x}) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 \quad (133)$$

$\tilde{x}_j$  - są próbą losową (pomiarami), a  $N$  jest liczebnością próby losowej.

Z praw wielkich liczb wynika, że:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 = V(X)$$

Ponadto można udowodnić, że:

$$E(s^2(\tilde{x})) = \sigma^2(X)$$

co oznacza, że estymator odchylenia standardowego jest nieobciążony. Gdyby we wzorze (133) użyć w mianowniku  $N$  zamiast  $N-1$  to równanie powyższe by nie zachodziło i estymator byłby obciążony.

Estymator odchylenia standardowego średniej z próby uzyskamy wstawiając do wzoru (131) do wzoru (133):

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)N} \sum_{j=1}^N (\tilde{x}_j - \bar{x})^2} \quad (134)$$

#### 4.2.6. Estymator odchylenia standardowego w przypadku zmiennej losowej dyskretnej

Załóżmy, że jak w punkcie 4.2.2, dokonujemy  $N$  krotnego powtórzenia eksperymentu obserwacji zmiennej losowej dyskretnej  $X$  o zbiorze możliwych wartości  $a_1, a_2, \dots, a_K$ , gdzie  $K$  jest liczebnością zbioru zdarzeń elementarnych (jeśli zmienna losowa jest funkcją różnowartościową). Wynikiem takiego eksperymentu jest seria  $N$  liczb:  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Każda z liczb uzyskanych w eksperymencie jest jedną z liczb ze zbioru  $(a_1, a_2, \dots, a_K)$ . Niech  $n_k$  oznacza rozkład empiryczny, czyli  $n_k$  oznacza liczbę powtórzeń wyniku  $a_k$  w próbie losowej  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

Wartość średnia z próby (z danych pomiarowych) równa jest:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^K a_k n_k \quad (135)$$

gdzie:  $N$  - całkowita liczba obserwacji (wzór (117)),

$x_i$  jest  $i$ -tym wynikiem pomiaru.

Estymator odchylenia standardowego  $s(x)$  opisany jest równaniem:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (136)$$

Jeśli zmienna losowa jest dyskretna i zbiór zdarzeń elementarnych ma postać  $(a_1, a_2, \dots, a_K)$ , to estymator odchylenia standardowego można zapisać w postaci:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^K (a_k - \bar{x})^2 n_k} \quad (137)$$

gdzie  $n_k$  liczba wystąpień elementu  $a_k$  w zbiorze danych pomiarowych.

**Przykład 39** (Rozpad promieniotwórczy). Rozważmy rozpad promieniotwórczy omawiany w rozdziale 4.2.2 (przykład 37). Wartości zdarzeń elementarnych są jednocześnie numerami:  $a_k = k$ , więc:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^K (k - \bar{x})^2 n_k} \quad (138)$$

### 4.3. Rozstęp

W przypadku pomiarów w skali porządkowej miarą rozrzutu jest rozstęp, definiuje się go jako:

$$D(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{max} - \tilde{x}_{min}) \quad (139)$$

gdzie:  $\tilde{x}_i$   $i$ -ty wynik eksperymentu,

$\tilde{x}_{min}$  – wartość minimalna z danych empirycznych (próby losowej):  $\tilde{x}_{min} = \min(\{\tilde{x}_i\})$

$\tilde{x}_{max}$  – wartość maksymalna z danych empirycznych (próby losowej):  $\tilde{x}_{max} = \max(\{\tilde{x}_i\})$

### 4.4. Estymacja przedziałowa, przedział ufności

Założmy jak poprzednio, że w wyniku pomiaru otrzymaliśmy serię  $N$  danych  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Zadaniem naszym jest estymacja wartości oczekiwanej  $E(X)$ . Ponieważ wartość średnia  $\bar{x}$  (wzór (151)) uzyskana z danych empirycznych przybliży wartość oczekiwaną więc celowe jest określi przedział, w którym estymowana wartość oczekiwana znajduje się z określonym prawdopodobieństwem  $p$  nazywanym poziomem ufności.

**Definicja 33.** Przedział  $I_p = [a, b]$  jest przedziałem ufności, jeśli zmienna losowa  $X$  znajduje się w tym przedziale z prawdopodobieństwem  $p$ :

$$P(a < X < b) = p \quad (140)$$

Równanie (140) w skrócie zapisuje się:  $P(I_p) = p$ .

Definicja ta bardzo ogólna. W przypadku estymacji przedziałowej interesuje nas przedział wokół wartości średniej wokół pewnej liczby  $x$ :

$$P(\bar{x} - z_p < x < \bar{x} + z_p) = p \quad (141)$$

Promień przedziału  $z_p$  można wyrazić jako wielokrotność odchylenia standardowego  $\sigma$ :

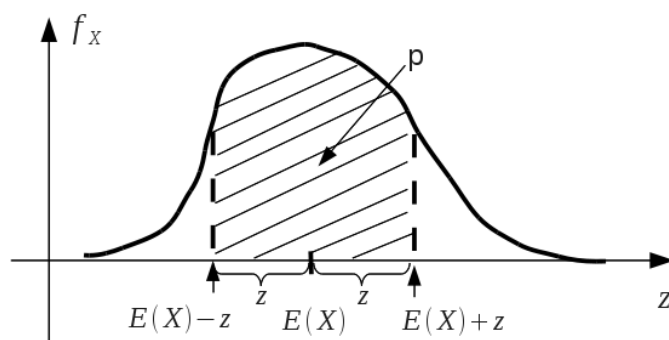
$$z = k_p \sigma(X)$$

czyli:  $P(\bar{x} - k_p \sigma(X) < X < \bar{x} + k_p \sigma(X)) = p$

$k_p$  współczynnik zależny od rozkładu prawdopodobieństwa. Dla rozkładu normalnego mamy  $K_{0,95} \approx 2$ .

Jeśli interesuje nas estymacja wartości oczekiwanej to musimy zapytać o prawdopodobieństwo tego, że wartość oczekiwana  $E(X)$  znajduje się w przedziale o promieniu  $z_p$  wokół wartości średniej  $\bar{x}$ :

$$P(\bar{x} - z_p < E(X) < \bar{x} + z_p) = p \quad (142)$$



**Rysunek 23.** Przedział ufności dla poziomu  $p$ , krzywa jest gęstością prawdopodobieństwa  $f_X$  zmiennej losowej  $X$ , pole zakreskowane równe jest  $p$ ,  $z$  jest promieniem przedziału ufności

Zazwyczaj można założyć, że średnia ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym  $\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma(X)}$ , wobec czego promień przedziału ufności ma postać  $z_p = k_p s\bar{x}$ , gdzie zastąpiliśmy odchylenie standardowe  $\sigma(\bar{X})$  wartości średniej estymatorem (152).

Niepewność rozszerzona opisana definicją 35 i zapisana wzorem (156) równa jest promieniowi przedziału ufności  $U_p(\bar{X}) = z_p = k_p s\bar{x}$

## 5. WYRAŻANIE NIEPEWNOŚCI, ZASADY WYZNACZANIA WARTOŚCI MEZURANDU I NIEPEWNOŚCI

W tym rozdziale przedstawiona zostaną ogólne zasady wyznaczania niepewności pomiaru. Szczegółowe wzory wymagają wiedzy ze statystyki matematycznej i teorii prawdopodobieństwa, co jest przedmiotem rozdziałów 4 i 3. Zaleca się przeczytać ten rozdział jako wstępne zapoznanie się z koncepcją niepewności, ale w celu zrozumienia użytych tu terminów należy zapoznać się z rozdziałami 3 i 4 i powrócić do tego rozdziału po przestudiowaniu metod statystycznych.

Niepewność pomiaru wyznacza się przy założeniu probabilistycznego modelu pomiaru, podstawowe założenia opisane zostały w rozdziale 1.8, poniżej przypomnimy najważniejsze tezy tego modelu.

### 5.1. Probabilistyczny model pomiaru

Probabilistyczny model pomiaru polega na założeniu, że pomiar opisujemy zmienną losową (patrz rozdział 1.8) co oznaczają, że wynik pomiaru jest wartością zmiennej losowej. Wynik konkretnego pomiaru  $x$  jest wartością zmiennej losowej  $X$  opisującej pomiar, dla zdarzenia  $\omega$  reprezentującego konkretny pomiar:

$$x = X(\omega) \tag{143}$$

Równanie to należy rozumieć następująco:

- zmienna losowa  $X$  opisuje cały zbiór pomiarów jakie mogą być wykonane konkretnym urządzeniem dla konkretnego obiektu w warunkach, które nie zmieniają się przy kolejnych pomiarach



- każdy pojedynczy pomiar daje inny wynik  $x$  który jest realizacją zmiennej losowej dla tego pomiaru, czyli  $x$  jest wartością zmiennej losowej  $X$  dla zdarzenia  $\omega$
- zdarzenia  $\omega$  jest konkretnym aktem pomiaru<sup>45</sup>.

**Przykład 40.** Pomiar rezystancji czujnika temperatury

Założmy, że chcemy zmierzyć rezystancje (opór elektryczny) rezystora platynowego i na tej podstawie wyliczyć temperaturę. Założmy też, że mamy bardzo dobry omomierz pozwalający na pomiar z rozdzielczością jednego milioma (1 mΩ). Zestawiamy układ pomiarowy złożony z omomierza, rezystora platynowego i przewodów łączących rezystor platynowy z omomierzem. Układ ten dla ustalonej temperatury reprezentowany jest przez zmienną losową (oznaczymy ją  $X$ ). Założenie to oznacza, że każdy pomiar wykonywany jest w tych samych warunkach gwarantujących powtarzalność.

Każdy pomiar jednostkowy rezystancji (nadamy mu numer  $i$ ) daje jakiś wynik liczbowy, oznaczymy go  $x_i$ , wskaźnik  $i$  oznacza, że jest to  $i$ -ty pomiar ( $i = 1, \dots, N$ ,  $N$ -liczba pomiarów). Każdy  $i$ -ty akt pomiaru oznaczymy symbolem  $\omega_i$ , wynik  $i$ -tego pomiaru jest więc wartością zmiennej losowej dla  $i$ -tego pomiaru:  $x_i = X(\omega_i)$ .

zmienia się przy powtarzaniu pomiaru co zapiszemy wzorem (8):

$$X = x_0 + \Delta X \tag{144}$$

gdzie  $X$  - zmienna losowa reprezentująca<sup>46</sup> proces pomiaru,  $x_0$  - szukana wartość prawdziwa wielkości mierzonej,  $\Delta X$  - zmienna losowa reprezentująca błędy pomiarowe.

### 5.2. Estymacja wartości mierzonej

Wynikiem bezpośrednim pomiaru jest seria danych  $\{x_i\}$ , gdzie  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  liczba danych pomiarowych. Jeśli pomiar został przeprowadzony w warunkach powtarzalności (w niezmiennych się warunkach) to zazwyczaj najlepszym przybliżeniem  $\tilde{x}$  wartości oczekiwanej jest średnia arytmetyczna z danych pomiarowych, które traktujemy jak próbę losową z pewnego (nieznanego) rozkładu statystycznego mierzonej wielkości:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^N x_i \tag{145}$$

Jeśli każdy z wyników  $x_i$  uzyskany został w innych warunkach i wiemy, że odchylenie standardowe każdego z wyników jest inne i wynosi  $\sigma_i$  to należy wyznaczyć średnią ważoną z wagą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odchylenia standardowego:

$$\tilde{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{146}$$

W obu przypadkach należy wyznaczyć niepewność, przy czym wzory zależą od uśredniania, czyli odchylenie standardowe średniej arytmetycznej różni się od odchylenia standardowego średniej ważonej (patrz dalsze rozdziały).

<sup>45</sup>Przez „akt” określamy jednostkowe zdarzenie.

<sup>46</sup>Termin „reprezentacja” oznacza opis matematyczny.

### 5.3. Niepewność

Zgodnie z *Przewodnikiem* [23] „Wyrażanie niepewności pomiaru” niepewność pomiaru wielkości  $x$  jest miarą rozrzutu wyników pomiarów. Wyróżnia się niepewność standardową i niepewność rozszerzoną. Niepewność standardową (oznaczać będziemy ją  $u(x)$ <sup>47</sup>) równa jest wartości  $s(x)$  estymatora odchylenia standardowego i jest traktowana jako podstawowa forma wyrażania niepewności.

**Definicja 34.** Niepewność standardowa  $u(x)$  wielkości  $x$  równa jest estymatorowi odchylenia standardowego:

$$u(x) = s(x) \quad (147)$$

gdzie:  $s(x)$  estymator odchylenia standardowe wyznaczony z danych doświadczalnych i wiedzy o systemie pomiarowym (metody obliczania estymatora odchylenia standardowego opisane są w następujących rozdziałach).

Niepewność standardowa zdefiniowana jest jako parametr rozkładu prawdopodobieństwa opisującego badany obiekt, jest więc określany metodami statystyk parametrycznych. Jeśli zastosujemy metody statystyk przedziałowych [12, 19] to można zdefiniować niepewność rozszerzoną, definicję jej podamy w rozdziale 5.4.4.

Zgodnie z *Przewodnikiem* wszystkie rodzaje błędów opisujemy modelem probabilistycznym i podstawowym sposobem opisem wielkości błędu jest odchylenie standardowe. Według *Przewodnika* odchylenie standardowe (ściśle estymator odchylenia standardowego wartości średniej) należy wyznaczyć dla wszystkich rodzajów błędów, zarówno dla błędów przypadkowych jak i systematycznych.

*Przewodnik* [23] wyróżnia dwa rodzaje źródeł danych dla wyznaczenia estymatora odchylenia standardowego:

- (A) seria pomiarowa, wtedy estymatorem odchylenia standardowego wartości średniej jest wzór (152),
- (B) założenia *a priori* dotyczące rozkładu statystycznego innych rodzajów błędów (nieprzypadkowych), wtedy estymatorem odchylenia standardowe jest odpowiedni wzór dla założonego rozkładu.

Istotą metody (B) jest określenie rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie wiedzy teoretycznej i przekonania dotyczącego źródeł niepewności. Rozkład taki nazwać można rozkładem *a priori* (*Przewodnik* [23] używa terminu rozkład *subiektywny*).

Podstawy probabilistyki, definicje wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego i jego estymatorów tych wielkości z danych empirycznych opisane jest w rozdziale 3

Przez rozkład *a priori* rozumie się rozkład prawdopodobieństwa wynikający z analizy teoretycznej układu pomiarowego. Analiza tak zawiera opis źródeł błędów, ich naturę i rozkład prawdopodobieństwa opisujący składowe błędy.

Niezależnie od metody wyznaczania niepewności należy zauważyć, że odchylenie standardowe zmiennej losowej  $X$  reprezentującej wynik pomiaru we wzorze (144) równe jest odchyleniu standardowemu błędowi opisanemu zmienną losową  $\Delta X$ :

$$\sigma X = \sigma(x_0 + \Delta X) = \sigma(\Delta X) \quad (148)$$

Równanie to wynika z właściwości odchylenia standardowego opisanego w rozdziale 3.8.2.

---

<sup>47</sup>Niepewność standardową oznacz się małym  $u$ , natomiast rozszerzoną literą wielką.

## 5.4. Metody wyznaczania niepewności

Na podstawie opisanych powyżej metod (A) i (B) szacowania niepewności otrzymuje się dwie składowe niepewności. Dalsze postępowanie polega na wyznaczaniu niepewności całkowitej nazywanej niepewnością złożoną.

Algorytm wyznaczenia wartości mierzonej wielkości i niepewności polega więc na następujących krokach:

- 1) wyznaczenie wartości średniej z serii pomiarowej, wartość średnia uznana jest za estymator wielkości mierzonej
- 2) wyznaczanie składowej typu **A** niepewności standardowej jako odchylenia standardowego z danych pomiarowych, tak wyznaczoną składową niepewności oznaczmy  $u_A(x)$ ,
- 3) ustalenie na podstawie analizy systemu pomiarowego (teorii i wiedzy wynikającej z poprzednich pomiarów) rozkładu prawdopodobieństwa (nazywanego rozkładem *a priori*) błędów, które nie zostały uwzględnione analizie serii danych pomiarowych metodą **A**,
- 4) wyznaczenie odchylenia standardowego  $u_B(x)$  dla rozkładu *a priori* ustalonego w punkcie poprzednim.
- 5) złożenie obu uzyskanych niepewności w celu uzyskania niepewności złożonej  $u(x)$ . W przypadku gdy założymy niezależność obu składowych niepewności stosuje się wzór:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (149)$$

Źródłem informacji będącej podstawą szacowania niepewności typu **B** są:

- 1) dane pomiarowe pochodzące z poprzednich eksperymentów i porównań z innymi przyrządami o lepszej dokładności,
- 2) ogólna teoria zjawisk związanych z pomiarem dotycząca metody pomiaru o źródeł błędów i zakłóceń,
- 3) specyfikacje aparatury dostarczone przez producentów,
- 4) wyniki wzorcowania i certyfikacji,
- 5) niepewności opisane w literaturze dotyczącej przeprowadzanych pomiarów.

Podstawą szacowania składowej (B) niepewności jest wiedza i doświadczenie. Na podstawie tej wiedzy przyporządkowuje się rozkład statystyczny *a priori* różnym składowym błędów wyróżnionych w modelu układu pomiarowego (składowe opisane w podrozdziale 5.5). Dla każdej składowej wyznacza się odpowiednie parametry rozkładu i wylicza odchylenie standardowe. Głównym źródłem informacji o niepewnościach jest opis przyrządu (instrukcja, napisy na przyrządzie) dostarczony przez producenta.

*Przewodnik* podkreśla, że nie należy popełniać błędu polegającego na tym, że w metodzie **B** uwzględnia się składowe opisane metodą **A**, czyli podlegające przypadkowym fluktuacjom w analizowanym pomiarze (w serii pomiarów dających dane do statystycznej analizy).

Autorzy *Przewodnika* wyrażają przekonanie, że podział na metodę **A** i **B** nie odpowiada podziałowi na składową systematyczną i przypadkową (7) ponieważ dotyczy metody szacowania niepewności, a nie istoty zjawiska będącego źródłem błędów. Ponadto zjawiska przypadkowe jak i systematyczne mogą być uwzględnione w obu metodach szacowania niepewności.

Wyznaczając niepewność metodą **B** szacujemy wiele różnych efektów, o których zakłada się, że nie zostały uwzględnione w metodzie **A**. Błędy które uznamy za systematyczne powinny być opisane zgodnie z *Przewodnikiem* przez zmienną losową o rozkładzie jednostajnym. Ogólnie wyznaczanie niepewności metodą **B** polega na oszacowaniu wielkości odchylenia standardowego przy następujących założeniach:

- błędy, które chcemy uwzględnić mają rozkład prawdopodobieństwa *a priori* wynikający z teorii, wcześniejszych badań, danych producenta lub literatury.
- dane są pewne parametry charakteryzujące błędy, takie jak: dane producenta o błędach granicznych, rozdzielczość, itd.

„Przewodnik” podkreśla, że przy podawaniu wyniku niepewności należy opisać sposób szacowania oraz składowe, które zostały uwzględnione.

#### 5.4.1. Niepewność względna

Dla każdego typu niepewności (czyli niepewność standardowa, niepewność rozszerzona, błąd graniczny) określa się niepewność względną. Niepewność względna  $\gamma$  opisuje wartość niepewności  $u(x)$  względem wyniku pomiaru  $\tilde{x}$ , dla niepewności względnej standardowej mamy:

$$\gamma = \frac{u(x)}{\tilde{x}} \quad (150)$$

Dla niepewności rozszerzonej wzór ten ma postać  $\gamma_U = \frac{U(x)}{\tilde{x}}$  i dla błędu granicznego:

$$\gamma_m = \frac{\Delta_{m,x}}{\tilde{x}}$$

#### 5.4.2. Klasa dokładności

Niepewności względne (błędy graniczne względne) szacowane są mało dokładnie, niepewność wyznaczenia niepewności względnej może wynosić nawet ponad 50/wartości niepewności względnej. Dlatego jest sens zdefiniować ciąg znormalizowanych niepewności względnych, które różnią się mniej niż o 50%. Taki ciąg dopuszczalnych wartości niepewności względnych tworzy dopuszczalne klasy: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5 (klasa wyrażona jest w procentach). Nie dopuszcza się klasy 10% (zbyt mała dokładność), przyrządy dokładniejsze od 0,05% opisuje się podając opis wszystkich składowych błędów z podaniem trendów czasowych i terminów ważności certyfikatów (są to zawsze przyrządy z odpowiednimi dokumentami potwierdzającymi dokładność przez upoważnione laboratoria).

#### 5.4.3. Metoda statystyczna oceny niepewności standardowej (metoda **A**)

Zgodnie z zasadami opublikowanymi w *Przewodniku* niepewność powinna być określona jako **niepewność standardowa** równa odchyleniu standardowemu wyznaczonemu metodami statystycznymi. Poniżej podamy wzory bez uzasadnienia, uzasadnienie wynikające z teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej można znaleźć w rozdziałach 3 i 4.

Wynikiem pomiaru jest seria pomiarowa  $\{x_i\}_{i=1}^N$ , która składa się z  $N$  danych pomiarowych uzyskanych jednym przyrządem w warunkach powtarzalności dla tego samego

obiekту. Estymator i niepewność wyznacza się metodami statystycznymi omówionymi w dalszych rozdziałach.

Estymatorem wartości zmierzonej jest średnia z próby  $\bar{x}$  (oznacza się ją również jako<sup>48</sup>  $x_{sr}$  lub  $x_{Av}$ ):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (151)$$

Estymatorem **niepewności standardowej**  $u_A(x)$  jest estymator odchylenia standardowego średniej z próby  $s(\bar{x})$  (patrz wzór (133)):

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (152)$$

#### 5.4.4. Niepewność rozszerzona

Definiuje się też **niepewność rozszerzoną**  $U_p(x)$ , którą jest równa promieniowi przedziału ufności  $I_p$ , w którym znajduje się wartość mierzonej wielkości z prawdopodobieństwem  $p$  nazywanym poziomem ufności (rozdział 4.4).

**Definicja 35.** Niepewność rozszerzona  $U_p(x)$  definiowana jest jako:

$$U_p(x) = Rad(I_p) \text{ gdzie } P(x \in I_p) = p \quad (153)$$

gdzie  $Rad(I)$  jest promieniem przedziału  $I$  (połowa szerokości przedziału).

Zakłada się, że przedział  $I_p$  jest przedziałem wokół wartości oczekiwanej  $E(X)$ :

$$I_p = [E(X) - U_p(x), E(X) + U_p(x)] \quad (154)$$

Estymator **niepewności rozszerzonej** ma postać:

$$U_p(x) = k_p s(\bar{x}) \quad (155)$$

$s(\bar{x})$  – estymator odchylenia standardowego średniej  $\bar{x}$  (wzór (152)),  $k_p$  – współczynnik rozszerzenia zależny od poziomu ufności  $p$  (141), oraz od rozkładu prawdopodobieństwa mierzonej wielkości.

Dla  $p = 0,95$  przyjmujemy:  $K_{0,95} \approx 2$  (przy założeniu, że rozkład błędów opisany jest rozkładem normalnym).

**Niepewność rozszerzona**  $U_p(x)$  równa jest więc:

$$U_p(x) = k_p s(\bar{x}) = k_p \sqrt{\frac{1}{(N-1)N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (156)$$

Niepewność rozszerzona obliczona ze wzoru (156) opisuje jedynie składową niepewności reprezentującą rozrzut wyników pomiaru. Całkowitą niepewność (niepewność złożoną) uwzględniającą niepewności typu A i B opisuje wzór (163), podany dalej.

---

<sup>48</sup>Av - od angielskiego average.

### 5.4.5. Niestatystyczne metody szacowania niepewności (metody typu B)

Jeśli pomiar jest wykonany raz lub gdy nie obserwujemy przypadkowego rozrzutu pomiarów (kolejne wyniki pomiarów dają taką samą wartość), to estymatorem wielkości mierzonej wynik pojedynczego pomiaru, oznaczmy ją  $\tilde{x}$ . Niepewność szacujemy na podstawie analizy właściwości przyrządu pomiarowego (informacji i niepewności danej przez producenta) i analizy wszystkich innych źródeł błędów. Zakładamy zazwyczaj, że o dokładności pomiaru decydują błędy systematyczne. Inaczej mówiąc jeśli w wyniku pomiarów otrzymamy serię danych, która jest ciągiem stałym (wszystkie pomiary są jednakowe) to wnioskujemy, że występują jedynie błędy systematyczne<sup>49</sup>

Niepewność w tym przypadku szacuje się na podstawie analizy działania przyrządu i znajomości metod pomiarowych.

Zazwyczaj szacowaniu podlega maksymalna wartość błędu (czyli błąd graniczny)<sup>50</sup> jaką możemy przewidzieć dla funkcjonowania danego przyrządu. Jeśli maksymalna wartość błędu wynosi  $\Delta_mx$  to odpowiadająca jej wartość **niepewności standardowej** wynosi:

$$\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_mx \quad (157)$$

Wzór ten wynika z tego, że założyliśmy, że błędy mają rozkład jednostajny o promieniu  $\Delta_m$  (własności rozkładu jednostajnego opisane są w rozdziale 3.10.4). Przedział  $[\tilde{x} - \Delta_mx, \tilde{x} + \Delta_mx]$  interpretujemy jako przedział wokół wyniku pomiaru  $\tilde{x}$  o promieniu  $\Delta_mx$ , w którym na pewno znajduje się wartość prawdziwa (poprawna)  $x_0$ , co zapisano wzorem (158).

Zazwyczaj będziemy pomijać indeks  $m$  i przedział będziemy oznaczać:  $[\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x]$ . Przedział ten zapisuje się często jako<sup>51</sup>  $\tilde{x} \pm \Delta x$ . Jeśli w wyniku pomiaru oraz analizy danych i niepewności uzyskamy, że estymata wartości zmierzonej wynosi  $\tilde{x}$ , a niepewność  $\Delta x$ , to wynik zapisuje się  $x_0 = \tilde{x} \pm \Delta x$ . Tak zapisany wynik pomiaru jest pewnym skrótem myślowym i matematycznie należałoby zapisać, że  $x_0$  znajduje się w przedziale o środku  $\tilde{x}$  i promieniu  $\Delta x$  (rysunek 24:

$$x_0 \in [\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x] \quad (158)$$

gdzie  $\tilde{x}$  – estymata wartości mierzonej,  $\Delta x$  – niepewność (promień przedziału).

Ponieważ zgodnie zaleceniami *Przewodnika* należy podawać niepewność standardową, a nie błąd graniczny, więc przy zapisie  $x_0 = \tilde{x} \pm \Delta x$  zawsze należy zaznaczyć, że szacowania dotyczą błędów granicznych.

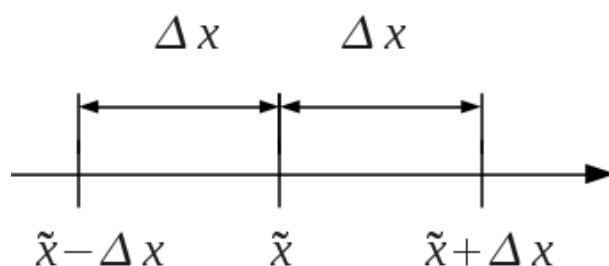
Źródłem szacowania niepewności metodą **B** mogą być:

- Dane producenta (patrz rozdział 5.4.6).
- Fluktuacje obserwowane jako chwilowe zmiany lub nierównomierności badanego obiektu. Fluktuacje możemy charakteryzować maksymalną wartością obserwowanych fluktuacji.
- Błędy dostarczenia mierzonej wielkości do przyrządu pomiarowego.

<sup>49</sup>Przyjmuje się definicję: błędem **systematycznym** nazywamy składową błędów w równaniu (7), która nie zmienia się przy kolejnych pomiarach.

<sup>50</sup>Błąd granicznym jest często podstawą oceny niepewności związanej z aparaturą pomiarową.

<sup>51</sup>Z matematycznego punktu widzenia zapis  $x = x_0 \pm \Delta x$  oznacza, że  $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$



**Rysunek 24.** Przedział opisujący  $x_0 = \tilde{x} \pm \Delta x$ , czyli  $x_0 \in [\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x]$

- Wpływ przyrządu na badany obiekt.

Przykładem fluktuacji są gwałtowne zmiany napięcia spowodowane chwilowymi zakłóceniami lub brakiem odpowiedniego kontaktu przewodów (patrz przykład 44).

Błędy doprowadzenia wielkości mierzonej:

- 1) Mierzmy średnicę suwmiarką elementu elastycznego, następuję odkształcenie.
- 2) Na przewodach odkładają się napięcia.
- 3) temperatura obiektu różni się od temperatury termometru.

**Przykład 41.** Pomiar długości.

Mierzmy długość pręta  $L$  miarką z podziałką milimetrową i uzyskaliśmy wynik  $L = 25mm$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że błąd graniczny równy jest rozdzielczości i wówczas niepewność standardowa pomiaru długości  $u(L)$  wynosi  $\frac{1mm}{\sqrt{3}} \approx 0,6mm$ . Wynik pomiaru można zapisać na dwa sposoby:  $25,0(0,6)mm$  (tutaj odchylenie standardowe zapisane jest w nawiasie), lub  $25mm \pm 0,6mm$  z zaznaczeniem, że podano niepewność standardową, a także  $25,0mm \pm 1mm$  zaznaczając, że podano wartość graniczną błędu.

W przypadku pomiaru długości pręta miarką milimetrową mogą być powody (np. błąd pojawia się na początku i końcu miarki), że przyjmimy wartość błędu granicznego 2mm, wtedy niepewność standardowa wyniesie  $\frac{2mm}{\sqrt{3}} \approx 1,2mm$ .

#### 5.4.6. Wyznaczanie niepewności na podstawie danych producenta

Producent podaje niepewności przyrządu dla poszczególnych zakresów i zazwyczaj wyszczególniając różne składowe. Jeśli przyrząd nie jest drogim systemem pomiarowym o wysokiej precyzji to podawane są zazwyczaj błędy graniczne dla poszczególnych zakresów i rodzajów mierzonych wielkości (np. dla pomiarów prądów stałych i osobno dla zmiennych). Przyrządy analogowe różnią się zasadniczo zasadą działania od przyrządów cyfrowych wobec tego inaczej wyznacza się niepewność dla tych grup przyrządów. Składową związaną z przyrządem pomiarowym obliczoną na podstawie danych producenta nazywa się niepewnością instrumentalną lub aparaturową.

##### Przyrządy analogowe

Dla przyrządów analogowych podana jest **klasa niepewności**  $\gamma_K$ , niepewność jako, zazwyczaj jako błąd graniczny, wyznaczamy ze wzoru:

$$\Delta x = \gamma_K \cdot x_z \quad (159)$$

gdzie  $x_z$  jest zakresem pomiarowym przyrządu wykorzystywanym w danym pomiarze.

Klasa określana jest w procentach i opisuje niepewność względem zakresu pomiarowego.

### Przyrządy cyfrowe

Dla przyrządów cyfrowych określa się dwie składowe niepewności, addytywną  $\Delta x_a$  i multiplikatywną  $\Delta x_i$ :

$$\Delta x = \Delta x_a + \Delta x_i \quad (160)$$

gdzie  $x$  – wynik pomiaru.

Składową addytywną zazwyczaj podaje się jako wielokrotność  $k$  rozdzielczości  $\Delta_q$  (numbers of digits)

$$\Delta x_a = k \cdot \Delta_q \quad (161)$$

Składowa multiplikatywna  $\Delta x_i$  proporcjonalna jest do wartości zmierzonej  $x$ :

$$\Delta x_i = \gamma \cdot x \quad (162)$$

gdzie:  $\gamma$  błąd graniczny względny.

### Przykład 42. Pomiar multimetrem.

Dla multimetru cyfrowego M-380 dla zakresu 2V podany jest w instrukcji wzór obliczenia niepewności (klasy):

$$\pm 0.8\% \text{ rdg} \pm 3 \text{ dgt}$$

gdzie *rdg* jest odczytem (reading), czyli wartością zmierzoną (odczytaną z przyrządu)  $x$ , *dgt* – rozdzielczość (digits).

Jeśli w wyniku pomiaru uzyskaliśmy odczyt  $U = 1,231V$  na zakresie 2V, to błąd graniczny wyniesie

$$\Delta U = 0,8 \cdot \frac{1}{100} \cdot 1,231 V + 3 \cdot 0,001 V = (9,9 + 3) \cdot 10^{-3} V = 13mV \text{ (w obliczeniach zrobiono zaokrąglenia do góry).}$$

Niepewność standardowa wyniesie więc:  $u(U) = \frac{13}{\sqrt{3}} = 7,5mV \approx 8mV$ . W tym przykładzie rozdzielczość woltomierza wynosi  $\Delta_q = 1mV$ .

### 5.4.7. Niepewność złożona (całkowita) w przypadku pomiaru bezpośredniego

Załóżmy, że w wyniku serii  $N$  pomiarów wielkości  $x$  przyrządem cyfrowym lub analogowym uzyskaliśmy odczyty:  $x_1, \dots, x_N$ . Dane podane przez producenta przyrządu określają niepewność aparaturową opisaną wzorem (159) (dla przyrządu analogowego) lub (160) (dla przyrządu cyfrowego).

W celu wyznaczenia estymatora wartości zmierzonej i niepewności należy obliczyć:

- 1) wartość średnią  $\bar{x}$  z danych (wzór (151)),
- 2) estymator odchylenia standardowego wartości średniej  $s(\bar{x})$  (niepewność standardowa) ze wzoru (152),
- 3) składową instrumentalną błędu granicznego  $\Delta x$  ze wzoru (160) lub (159),
- 4) składowe niepewności związane z zakłóceniami lub błędem modelu badanego obiektu, opisen niepewności  $s_z$ ,
- 5) niepewność złożoną (niepewność całkowitą) standardową  $u(x)$  ze wzoru:

$$u(x) = s_{tot}(\bar{x}) \quad (163)$$



gdzie  $s_{tot}$  jest odchyleniem standardowym sumy wszystkich błędów:

$$s_{tot}^2 = \sqrt{s^2(\bar{x}) + s_z^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} \quad (164)$$

$s(\bar{x})$  – estymator odchylenia standardowego wartości średniej (miarą rozrzutu średniej z danych pomiarowych).

Składową instrumentalną (aparaturową) szacujemy metodą B opisując ją rozkładem równomiernym w przedziale  $[-\Delta x, \Delta x]$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta x$  jest odchyleniem standardowym takiego rozkładu równomiernego.

Wzór (156) wynika z równania (81) opisującego odchylenie standardowe sumy niezależnych zmiennych losowych.

Niepewność  $s_z$  opisująca zakłócenia szacuje się na podstawie posiadanych danych o układzie pomiarowym. Jeśli posiadamy aparaturę do pomiaru szumów i zakłóceń, to należy posłużyć się wynikami odpowiednich pomiarów. Jeśli dysponujemy jedynie obserwacjami, w których można oszacować maksymalne wartości fluktuacji  $\Delta_z x$  to niepewność odpisującą fluktuacje wyznacza się ze wzoru (1.9) czyli:  $s_z = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_z x$  (patrz przykład 44).

Jeśli zachodzi potrzeba obliczenie niepewność rozszerzonej  $U_p(x)$  dla poziomu ufności  $p$  to wyznacza się ją z przybliżonego wzoru:

$$U_p(x) = k_p u(x) \quad (165)$$

gdzie  $k_p$  jest współczynnikiem rozszerzenia, dla  $p=0,95$  można w przybliżeniu przyjąć  $k_p \approx 2$  (dla założenia, że średnie opisane są rozkładem normalnym).

#### 5.4.8. Niepewność sumy dwóch wielkości - propagacja niepewności

Niech mierzona wartość  $z$  będzie sumą dwóch wielkości  $x$  i  $y$  zmierzonych niezależnie:

$$z = x + y \quad (166)$$

Tego typu równanie opisuje dowolne prawo składania wielkości fizycznych i powinno być zapisane dla wielkości prawdziwych. Równanie to nazwiemy równaniem pomiaru wielkości  $z$ . Równanie powyższe jest szczególnym przypadkiem równania pomiaru (174).

Ponieważ każda zmierzonych wielkości obarczona jest błędem pomiaru, więc zgodnie z (6) możemy napisać:

$$x_0 = \tilde{x} - \Delta x \quad \text{i} \quad y_0 = \tilde{y} - \Delta y \quad (167)$$

gdzie  $\tilde{x}$  – estymata wielkości  $x$ ,  $\tilde{y}$  – estymata wielkości  $y$ ,  $x_0$  i  $y_0$  oznaczają wartości prawdziwe wielkości  $x$  i  $y$ . Równanie pomiaru (166) należy zapisać dla wielkości prawdziwych więc  $z_0 = x_0 + y_0$ . To tego wstawiamy (167) i mamy  $z_0 = \tilde{x} - \Delta x + \tilde{y} - \Delta y$ , po przekształceniach:  $z_0 = \tilde{x} + \tilde{y} - (\Delta x + \Delta y)$ , ponieważ  $z_0 = \tilde{z} - \Delta z$  więc zakładając, że estymator wielkości  $z$  jest sumą estymatorów:  $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$  otrzymujemy błąd wielkości  $x + y$ :

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \quad (168)$$

Równanie 168 wyraża zasadę addytywności błędów. Ponadto założymy, że składowe błędów pochodzących od poszczególnych składowych są niezależne wobec czego kwadrat odchylenia standardowego sumy zmiennych losowych równa sumie kwadratów odchyień

standardowych (wzór (81) w rozdziale 4). Niepewności wielkości  $z$  jest równa odchyleniu standardowemu mamy więc:

$$u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)} \quad (169)$$

Gdzie  $u(x) = \sigma(x)$  i  $u(y) = \sigma(y)$  są niepewnościami wielkości  $x$  i  $y$ . Na podstawie analizy źródeł błędów szacujemy maksymalne wartości błędów (błędy graniczne)  $\Delta_m x$  i  $\Delta_m y$ .

W celu wyznaczenia niepewności standardowej zakładamy, że błędy  $\Delta x$  i  $\Delta y$  można opisać rozkładem jednostajnym prawdopodobieństwa określonym na przedziałach wyznaczonym przez błędy graniczne  $\Delta_m x$  i  $\Delta_m y$ . Odchylenie standardowe  $\sigma$  zmiennej  $x$  wynosi  $\sigma(x) = \sigma(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_m x$ , i analogicznie  $\sigma(y) = \sigma(\Delta y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_m y$

Niepewność standardowa sumy  $z = x + y$  zgodnie z zaleceniami *Przewodnika*[23] wynosi:

$$u(z) = \sqrt{\frac{1}{3}\Delta_m x^2 + \frac{1}{3}\Delta_m y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Delta_m x^2 + \Delta_m y^2} \quad (170)$$

Taka zasada składania niepewności wynika z własności odchylenia standardowego w modelu probabilistycznym (patrz równanie (81) opisujące odchylenie standardowe sumy zmiennych losowych). Jeśli błędy  $\Delta x$  i  $\Delta y$  uznamy za zmienne losowe, a wartości maksymalne  $\Delta_m x$  i  $\Delta_m y$  za szacowania niepewności to można zastosować wzór (81). Równanie (170) opisuje niepewność złożoną, którą wyznaczamy w oparciu o probabilistyczną zasadę składania odchyleń standardowych (81).

## 5.5. Źródła błędów i składowe niepewności

Możliwe są następujące źródła błędów, które powinno się uwzględnić obliczając składowe niepewności:

- 1) Niepełna definicja mezurandu (błąd modelu mierzonego zjawiska).
- 2) Niedokładna realizacja definicji mezurandu (niespełnienie warunków, przy których ma być wykonany pomiar).
- 3) Doprowadzenie wielkości mierzonej do przyrządu.
- 4) Niereprezentatywne próbkowanie (kolejne pomiary wykonane zostały w warunkach nie zapewniających powtarzalności badanego zjawiska, za małą liczbą pomiarów, zbyt wolne próbkowanie).
- 5) Nieadekwatna wiedza o warunkach, w których ma być przeprowadzony pomiar.
- 6) Błąd odczytu przyrządów analogowych, nieumiejętność obsługi aparatury,
- 7) Skończona rozdzielczość przyrządów.
- 8) Niedokładna wartość wzorców i wielkości, względem których wykonujemy pomiar.
- 9) Działanie przyrządu pomiarowego, histereza, nieliniowości, błąd przetwarzania.
- 10) Niedokładna wartość stałych, oraz innych parametrów niezbędnych do wyznaczenia wartości wielkości mierzonej,
- 11) Przybliżenia zastosowanej metody pomiarowej: przybliżone metody wyliczania wielkości mierzonej ze wzorów, przybliżone algorytmy wykorzystywane w przyrządzie pomiarowym.
- 12) Wpływ przyrządów na badany obiekt.
- 13) Zmienność w czasie mierzonej wielkości z powodu niekontrolowanych zjawisk zewnętrznych i wewnętrznych.
- 14) Błędy interpretacji.

15) Oddziaływanie środowiska (warunki eksperymentu), zakłócenia sygnałów.

Zazwyczaj zakłada się, że składowe błędów są addytywne, wobec czego można napisać, że całkowity błąd jest równy sumie wielu składowych:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n_e} \Delta_i x \quad (171)$$

gdzie:  $n_e$  jest liczbą składowych błędów, które potrafimy uwzględnić,  $\Delta_i x$  jest  $i$ -tym błędem związanym z wpływem  $i$ -tego składnika na wynik pomiaru.

Każdej ze składowych błędów  $\Delta_i x$  należy przyporządkować odchylenie standardowe  $\sigma_i$  opisujące niepewności związane z tą składową. Wtedy całkowita niepewność standardowa wynosi:

$$u(x) = \sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_e} \sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_e} u_i^2(x)} \quad (172)$$

gdzie  $\sigma_i$  jest odchyleniem standardowym  $i$ -tej składowej błędów ( $i$ -tego czynnika). Jeśli o  $i$ -ty składnik potrafimy scharakteryzować błędem granicznym  $\Delta_{m,i}$  to odpowiednia składowa niepewność standardowej wyniesie  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{m,i}$ . Jeśli natomiast wykonaliśmy serię pomiarów czynników wpływających na błędy pomiarowe to szacujemy odpowiednie składowe niepewności opisane są zależnością (133) omówioną w rozdziale 4.2.5.

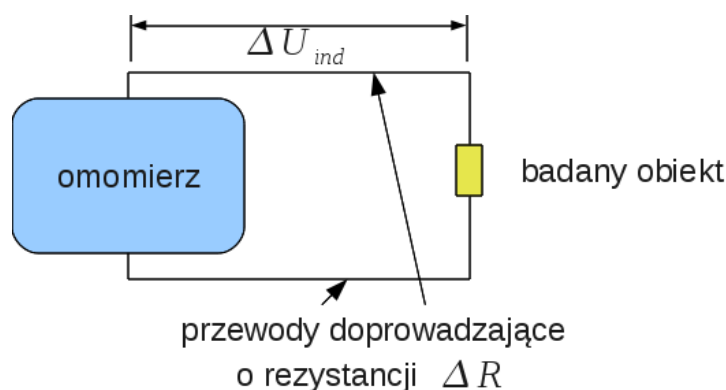
Omówimy teraz kilka źródeł błędów:

- 1) błąd doprowadzenia wielkości (ad.3) polega na tym, że sygnał który dostarczamy do przyrządu nie jest równy wartości mierzonej wielkości.
- 2) Niereprezentatywne próbkowanie (ad.4) polega na tym, że w trakcie pomiaru zmieniają się warunki pomiaru, np. ktoś włączył urządzenie zakłócające i generujące dodatkowe szумы (np. włączono jarzeniowe oświetlenie zasilaczami impulsowymi lub nadajnik WiFi).
- 3) Oddziaływanie środowiska (warunki eksperymentu), zakłócenia sygnałów.(ad.15). Są to sygnały pochodzące z otoczenia dodające się do badanego sygnału. Przykładem jest nadajnik WiFi zakłócający pomiar napięcia. Jeśli sygnał z nadajnika ma stałe parametry to nie zmienia warunków pomiaru i seria sygnałów jest zmierzona w warunkach powtarzalności i zmierzona seria jest reprezentatywna.

**Przykład 43** (Pomiar rezystancji omomierzem). Załóżmy, że mierzymy rezystancję krótkiego i cienkiego przewodnika metalowego omomierzem znajdującym się w multimetrze. Zasada działania takiego omomierza polega na pomiarze napięcia na badanym obiekcie przy zadanym natężeniu prądu. Badany przewódnik dołączamy do multimetru za pomocą przewodów. Przewody są źródłem błędów doprowadzenia (mają rezystancję) oraz zakłóceń pomiaru napięcia (na przewodach indukują się napięcia pochodzące od zakłócających pól). Jeśli chcemy wyliczyć niepewność pomiaru rezystancji to oprócz błędów spowodowanych przyrządem pomiarowym i przypadkowymi zakłóceniami musimy uwzględnić błędy pochodzących od dwóch źródeł wymienionych powyżej. Całkowity błąd pomiaru rezystancji w tym modelu będzie więc wynosił:

$$\Delta R = \Delta_a R + \Delta_r R + \Delta_z R + \Delta_p R \quad (173)$$

gdzie:



**Rysunek 25.** Schemat blokowy pomiaru rezystancji multimetrem (w trybie omomierza)

- $\Delta_a R$  - składowa błędu spowodowana przyrządem pomiarowym zgodnie ze specyfikacją producenta.
- $\Delta_r R$  - składowa obserwowana jako fluktuacja kolejnych pomiarów,
- $\Delta_z R$  - składowa związana z zaindukowanymi napięciami na przewodach doprowadzających,
- $\Delta_p R$  - składowa związana z rezystancją przewodów doprowadzających.

Składowa związana z przyrządem zależy od zakresu pomiarowego. Załóżmy, że mierzymy na zakresie  $10\Omega$  o rozdzielczości  $10m\Omega$ . Błąd graniczny zgodnie z opisem przyrządu wynosi  $0,2\%$  odczytu plus dwa razy rozdzielczość. Jeśli wynik pomiaru wynosi  $1,20\Omega$  to błąd graniczny  $\Delta_a R = 1,2 \cdot \frac{2}{1000}\Omega + 2 \cdot 10m\Omega = 22,4m\Omega$ . Niepewność standardowa tej składowej wynosi  $u_a(R) = 22,4m\Omega \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 13m\Omega$ . W celu wyznaczenia składowej związanej z przypadkowymi zakłóceniami należy powtórzyć pomiar przynajmniej 12 razy i wyliczyć odchylenie standardowe średniej. Załóżmy, że w wyniku pomiaru uzyskaliśmy następujące dane (w  $\Omega$ ):

1,20; 1,18; 1,22; 1,24; 1,16; 1,23; 1,17; 1,25; 1,15; 1,23; 1,17; 1,20

wtedy odchylenie standardowe obliczone zgodnie ze wzorem (134) wyniesie ok  $10m\Omega$ .

Składową zaindukowaną na przewodach należy zmierzyć przyrządem do pomiaru wartości skutecznej napięcia zmiennego. Załóżmy, że po podłączenia do multimetru na zakresie  $10mV$  przewodów pomiarowych (zwartych) uzyskamy wartość skuteczną ok.  $1mV$ . Załóżmy ponadto, że instrukcja przyrządu zawiera informację, że w tym zakresie pomiarów rezystancji przyrząd wytwarza prąd  $100mA$ . Oznacz to, że błąd pomiaru rezystancji może wynieść  $1mV/100mA = 10m\Omega$ . Odpowiadające temu odchylenie standardowe wyniesie  $10m\Omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  co daje ok.  $10m\Omega$

Składową związaną z rezystancją doprowadzeń należy wyznaczyć poprzez pomiar rezystancji tych przewodów na zakresie  $10m\Omega$  metoda cztero-przewodową (jeśli taki posiadamy). Załóżmy, że pomiary pokazały, że przewody mają rezystancję ok.  $20m\Omega$  co daje odchylenie standardowe ok  $12m\Omega$ .

Całkowita niepewność jest pierwiastkiem sumy kwadratów wyznaczonych składowych:

$$U(R) = \sqrt{13^2 + 10^2 + 10^2 + 12^2} m\Omega = 22,65 m\Omega$$

Czyli niepewność pomiaru rezystancji przewodnika wynosi ok.  $23m\Omega$ . Wynik końcowy można więc zapisać  $R = 1,20(2)m\Omega$ .

**Przykład 44.** Fluktuacja napięcia.

Rozważmy pomiar napięcia multimetrem cyfrowym M-380 opisanym w przykładzie 42. Uzyskano tam wynik pomiaru  $U = 1,231\text{V}$  z niepewnością standardową pochodzącą od aparatury  $u_a \approx 8\text{mV}$ . Załóżmy, że zaobserwowaliśmy zakłócenia wynikające z otaczających pól elektromagnetycznych. Zauważono gwałtowne zmiany napięcia (fluktuacje) o wartości maksymalnej (szczytowej) ok.  $\Delta_m U = 5\text{mV}$ . Jeśli uznamy zaobserwowaną wartość  $\Delta U_m$  za maksymalną wartość zmian napięcia i założymy, że rozkład fluktuacji można opisać rozkładem jednostajnym w przedziale  $[-\Delta_m U, \Delta_m U]$  to niepewność standardowa opisująca ten czynnik wyniesie  $u_{zak} = \frac{5\text{mV}}{\sqrt{3}} = 2.9\text{mV} \approx 3\text{mV}$ . Niepewność złożona (całkowita) pomiaru napięcia  $U = 1,231\text{V}$  wyniesie więc  $u(V) = \sqrt{u_a^2 + u_{zak}^2} = \sqrt{64 + 9}\text{mV} = \sqrt{73}\text{mV} = 8,544\text{mV} \approx 9\text{mV}$ .

**5.5.1. Niepewność funkcji dwóch zmiennych**

Założmy, że mamy wyliczyć wielkość  $z$  na podstawie wzoru (równanie pomiaru)

$$z = f(x, y) \quad (174)$$

gdzie  $x$  i  $y$  są dwoma wielkościami zmierzonymi niezależnie. Np. mierzymy natężenie prądu  $I$  i napięcie  $U$  i wyznaczamy rezystancję ze wzoru  $R = \frac{U}{I}$ . Równanie opisujące błąd<sup>52</sup> określenia wielkości  $z$  ma postać  $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$  ( $x_0$  i  $y_0$  są wartościami prawdziwymi). Taki przyrost funkcji można wyrazić różniczką zupełną<sup>53</sup>:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \quad (175)$$

Równanie powyższe jest uogólnieniem równania (168) opisującego przypadek sumy dwóch zmiennych.

Zakładamy, że każdy z błędów  $\Delta x$  i  $\Delta y$  jest zmienną losową, wobec czego możemy dla tych błędów wyznaczyć odchylenia standardowe odpowiednio  $\sigma(x)$  i  $\sigma(y)$ . Ponieważ odchylenia standardowe wyniku pomiaru  $x$  i błędu  $\Delta x$  jest takie samo:  $\sigma(\Delta x) = \sigma(x)$ ,  $\sigma(\Delta y) = \sigma(y)$ ,  $\sigma(\Delta z) = \sigma(z)$  (rozdział 3.8.2) więc niepewność wielkości  $z$  (równa odchyleniu standardowemu) wynosi:

$$\begin{aligned} u(z) &= \sigma(z) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 \sigma^2(x) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2 \sigma^2(y)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)} \end{aligned} \quad (176)$$

Przy czym:  $u(x) = \sigma(x)$ ,  $u(y) = \sigma(y)$ .

Wzór (176) jest konsekwencją założenia, że składowe błędy we wzorze (175) są zmiennymi losowymi niezależnymi, zasady wyprowadzenia tego wzoru opisane są w rozdziale 3.8.1.

<sup>52</sup>rozumiany jako różnica pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą

<sup>53</sup>Różniczką zupełną w sensie matematycznym)

## 5.6. Budżet niepewności

Najogólniejszy przypadek polega na wyznaczeniu niepewności sumy wielu zmiennych gdy mamy wiele źródeł błędów. Przykładem konstrukcji budżetu niepewności jest analiza źródeł błędów w przykładzie 43.

Analizę niepewności zaczyna się od ustalenia źródeł błędów (możliwie kompletną listę). Zakłada się, że błędy są addytywne (dla pomiarów bezpośrednich opisane to jest wzorem (171)) a niepewność podlega zasadom składania wariancji. Załóżmy, że czynniki od których zależy wynik pomiaru można opisać zbiorem  $K$  zmiennych  $\xi_k$  (gdzie  $k = 1, \dots, K$ ) oraz, że mierzoną wielkość  $z$  uzyskujemy pośrednio poprzez wyliczenie ze wzoru (analogicznie do (174))

$$z = f(x_1, \dots, x_N) \quad (177)$$

gdzie  $x_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) są wielkościami mierzonymi bezpośrednio.

Funkcja  $f$  opisuje zależność wielkości mierzonej od zmiennych  $x_n$  ale nie opisuje zależności od czynników  $\xi_k$  wpływających na wynik pomiaru i zakłócających nasz pomiar. Należy więc do celów analizy niepewności, na podstawie praw fizyki i analizy występujących zjawisk, wyprowadzić wzór opisujący zależność wielkości  $z$  od zmiennych  $x_n$  i czynników  $\xi_k$ . Załóżmy, że taka funkcja może być zapisana jako funkcja  $g$  wielu zmiennych:

$$z = g(x_1, \dots, x_N; \xi_1, \dots, \xi_K) \quad (178)$$

gdzie średnik informuje, że zmienne mierzone bezpośrednio  $x_n$  różnią się w interpretacji od zmiennych opisujących wpływ środowiska  $\xi_k$ .

Zmienne  $\xi_k$  zawsze występują i jeśli używamy do wyliczenia mierzonej wielkości wzoru (177) to jest to uproszczenie. Jeśli wykonujemy pomiary w warunkach gdy parametry  $\xi_k$  nie zmieniają się (wtedy nie zauważamy ich wpływu) to funkcję  $f$  można zapisać jako funkcję  $g$  dla wartości parametrów  $\xi_k$  równych pewnym wartościom stałym:  $\xi_k = \xi_{0,k}$ , dla  $k = 1, \dots, K$ . Wtedy mamy:

$$z = f(x_1, \dots, x_N) = g(x_1, \dots, x_N; \xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,K}) \quad (179)$$

Funkcja  $g$  opisuje pełną zależność tego co mierzymy od czynników wpływających na pomiar i zazwyczaj zapisanie dla konkretnego pomiaru funkcji  $g$  jest zadanie dużo trudniejszym niż ustalenie uproszczonej funkcji  $f$ .

Obliczanie niepewności wykonamy zakładając, że można przybliżyć funkcję  $g$  w postaci liniowej szeregu Taylora:

$$z = g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N; \xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,K}) + \\ + \sum_{n=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_n} \Delta x_n + \sum_{k=1}^K \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k$$

Czyli błąd  $\Delta z$  wynosi:

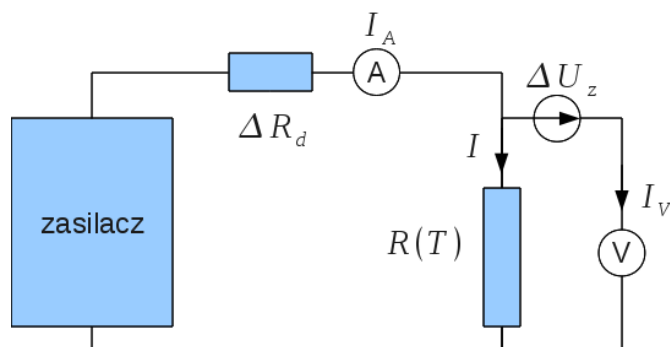
$$\Delta z = \sum_{n=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_n} \Delta x_n + \sum_{k=1}^K \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k$$

Każdy ze składników jest zmienną losową wobec czego korzystając z zależności dla wariancji sumy zmiennych losowych (81) mamy:

$$u^2(z) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)^2 u^2(x_n) + \sum_{k=1}^K \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right)^2 u^2(\xi_k) \quad (180)$$

Wzór 5.6 może być wykorzystany do szacowania niepewności pomiaru jeśli pochodne występujące we wzorze nie zerują się czyli pomiaru nie wykonujemy w warunkach określania minimum funkcji  $f$  lub  $g$ . W takim przypadku we wzorze 5.6 niezbędne jest zapisanie drugich pochodnych. Taka sytuacja występuje przy pomiarze metodą rezonansową lub określania współczynnika załamania metodą najmniejszego kąta odchylenia.

**Przykład 45.** Rozważmy pomiar rezystancji  $R$  odcinka przewodnika metodą pomiaru zależności natężenia prądu  $i$  od napięcia  $u$ . Modelem pomiaru jest funkcja liniowa  $i = \frac{u}{R}$  (prawo Ohma). Najważniejszym etapem analizy niepewności jest ustalenie czynników wpływających na błędy pomiaru.



**Rysunek 26.** Schemat pomiaru rezystancji

Wymienimy najważniejsze czynniki:

- 1) rezystancja doprowadzeń
- 2) zmieniająca się rezystancja styków połączeń
- 3) zmiana temperatury rezystora spowodowana przepływem prądu
- 4) napięcia indukowane na przewodach w wyniku oddziaływania pól elektromagnetycznych (przede wszystkim fal emitowanych przez urządzenia energetyczne 50 Hz)
- 5) prąd płynący przez woltomierz (zmienia to rozptyw prądów)
- 6) błędy przyrządów pomiarowych

Zależność od temperatury opiszemy równaniem  $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$  ( $\alpha$ -współczynnik temperaturowy rezystancji). W wyniku pomiaru chcemy mieć wartość  $R_0$  dla pewnej temperatury  $T_0$ , w wyniku wydzielania się ciepła w rezystorze jego temperatura zmienia się o  $\Delta T = T - T_0$  ( $T$  - temperatura po podgrzaniu). W wyniku pomiaru mamy więc wartość  $R$  zamiast  $R_0$ .

Wpływ rezystancji przewodów łączących mierniki z badanym rezystorem można opisać jako pojawienie się dodatkowej rezystancji  $\Delta R_d$  (rezystancja doprowadzeń).

Napięcie pól zewnętrznych oznaczymy jako  $\Delta U_z$ , natomiast błędy przyrządów  $\Delta U_V$  i  $\Delta I_A$ .

Na liście nie uwzględniono sił termoelektrycznych spowodowanych różnicą temperatur oraz napić kontaktowych. Trzeba sprawdzić jaki jest ich udział w końcowej niepewności.

Równanie opisujące pomiar rezystancji ma więc postać:

$$U_V = (R_0(1 + \alpha\Delta T) + \Delta R_d)(I_A + \Delta I_A + \Delta I_V) + \Delta U_V + \Delta U_z \quad (181)$$

gdzie:  $U_V$  - napięcie wskazane przez woltomierz,  $I_A$  - natężenie prądu wskazane przez amperomierz,  $\Delta R_d$  - rezystancja doprowadzeń (powinna uwzględniać zmianę rezystancji styków),  $\Delta U_z$  - napięcia indukowane przez pola zakłócające,  $\Delta I_A$  - błąd graniczny amperomierza,  $\Delta U_V$  - błąd graniczny woltomierza.

Wzór (181) opisuje prawo Kirchoffa uwzględniające rzeczywiste napięcia i prądy (z zakłóceniami) oraz rzeczywiste rezystancje. Wzór ten zawiera sumy wszystkich napięć, prądów i rezystancji.

Po przekształceniach mamy wzór opisujący mierzoną wielkość  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{1}{1 + \alpha\Delta T} \left( \frac{U_V - \Delta U_V - \Delta U_z}{I_A - \Delta I_A - \Delta I_V} - \Delta R_d \right) \quad (182)$$

Wzór ten można przekształcić do postaci przybliżonej wykorzystując następujące przybliżone zależności dla  $x \ll 1$ :

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad (183)$$

$$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y \quad (184)$$

Wykorzystując powyższe zależności wzór (182) przyjmuje przybliżoną postać:

$$R_0 = \tilde{R} + \tilde{R} \left( \frac{\Delta U_V}{U_V} + \frac{\Delta U_z}{U_V} + \frac{\Delta I_A}{I_A} + \frac{\Delta I_V}{I_A} + \frac{\Delta R_d}{\tilde{R}} + \alpha\Delta T \right)$$

czyli błąd pomiaru rezystancji wynosi:

$$\Delta R_0 = \tilde{R} \left( \frac{\Delta U_V}{U_V} + \frac{\Delta U_z}{U_V} + \frac{\Delta I_A}{I_A} + \frac{\Delta I_V}{I_A} + \frac{\Delta R_d}{\tilde{R}} + \alpha\Delta T \right)$$

Niepewność wyznaczamy traktując błędy jako zmienne losowe:

$$\frac{\tilde{R}}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{\Delta_m U_V}{U_V} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_m U_z}{U_V} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_m I_A}{I_A} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_m I_V}{I_A} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_m R_d}{\tilde{R}} \right)^2 + (\alpha\Delta T)^2} \quad u(R_0) = \quad (185)$$

gdzie  $\Delta_m$  oznacza, że do wzoru należy wstawić wartość graniczną poszczególnych błędów.

W powyższym wzorze ułamki typu  $\frac{\Delta_m U_V}{U_V}$  opisują błędy graniczne względne.

Założmy, że pomiary wykonane zostały multimetrami. W wyniku pomiaru napięcia uzyskano  $U=0,50V$  na zakresie  $2V$ . Błąd graniczny wynosi  $0,5\%$  odczytu +  $2$  rozdzielczość,



co daje  $\Delta_m U_V = 0,01V + 0,02V = 0,03V$ . Natężenia prądu wynosi  $I=0,50A$  na zakresie 2A. Błąd graniczny wynosi 0,5% odczytu + 2 rozdzielczość co daje  $\Delta_m I_A = 0,03V$ .

W celu pomierzenia zakłóceń niezbędne jest wykonanie pomiarów napięcia woltomierzem wartości skutecznej, woltomierz ten należy połączyć równolegle z woltomierzem mierzącym napięcie na badanym oporniku, przy odłączonym zasilaczu. W przypadku laboratorium studenckiego napięcie zakłóceń może wynosić  $\Delta_m U_z = 10mV$ . Prąd woltomierza  $I_V$  można wyliczyć na podstawie rezystancji wewnętrznej, w przypadku woltomierza cyfrowego rezystancja wewnętrzna jest duża i wynosi  $R = 10M\Omega$ , prąd woltomierza  $I_V = \frac{0,5V}{10^7\Omega} = 0,5 \cdot 10^{-7}A$  (jest to wartość dużo mniejsza od  $I_A$ ). Rezystancję przewodów można zmierzyć omomierzem cyfrowym, uzyskano  $R_d = 0,02\Omega$ . Wzrost temperatury szacujemy na ok 20 K, a współczynnik temperaturowy miedzi wynosi  $3,9 \cdot 10^{-3}$ .

Poszczególne składowe we wzorze (185) wynoszą:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_m U_V}{U_V} &= \frac{0,03V}{0,5V} = 0,06 \\ \frac{\Delta_m U_z}{U_V} &= \frac{0,01V}{0,5V} = 0,02 \\ \frac{\Delta_m I_A}{I_A} &= \frac{0,03A}{0,5A} = 0,06 \\ \frac{\Delta_m I_V}{I_A} &= \frac{10^{-7}A}{0,5A} = 2 \cdot 10^{-7} \\ \frac{\Delta_m R_d}{\tilde{R}} &= \frac{0,02\Omega}{1\Omega} = 0,02 \\ \alpha\Delta T &= 3,9 \cdot 10^{-3} 20\Omega = 0,06\Omega\end{aligned}$$

niepewność wyniesie więc:

$$\begin{aligned}u(R_0) &= \\ \frac{\tilde{R}}{\sqrt{3}} \sqrt{(0,06)^2 + (0,02)^2 + (0,06)^2 + (2 \cdot 10^{-7})^2 + (0,02)^2 + (0,06)^2} &= \\ &= \frac{1\Omega}{\sqrt{3}} 0,22 = 0,12\Omega\end{aligned}$$

Ostatecznie wynik obliczeń rezystancji można przedstawić  $R = 1,0(0,1)\Omega$ . Jak widać decydują o niepewności człony związane z błędami amperomierza i woltomierza i wpływem temperatury (jeśli badany przewodnik wykonany jest z miedzi) wkład związany z prądem woltomierza jest praktycznie zerowy (znacznie mniejszy od pozostałych składników).

## 5.7. Zasady zapisu wyniku pomiaru

Wynik estymacji wartości mierzonej (wartość średnia) i szacowania niepewności zapisujemy zgodnie z zasadami:

- 1) niepewność zapisujemy z dokładnością dwóch cyfr znaczących (jeśli pierwsza jest większa od 2 można zapisać jedną cyfrę).
- 2) ostatnia cyfra wyniku pomiaru (obliczeń wielkości mierzonej) musi stać na tej samej pozycji dziesiętnej co ostatnia cyfra niepewności. Jeżeli w wyniku obliczeń mamy za dużo cyfr to musimy dokonać zaokrąglenia.

Niepewność określona jest zazwyczaj mało dokładnie i przyjmować będziemy, że niepewność wyznaczenia niepewności jest większa od 20% jej wartości, co oznacza, że znamy jedną cyfrę znaczącą niepewności lub dwie gdy pierwsza jest jedyneką.

**Przykład 46.** Format zapisu wyniku.

Założmy, że wyniku obliczeń na kalkulatorze lub komputerze wartości napięcia (na podstawie innych pomiarów) otrzymaliśmy wynik:  $U=(1,23746321\pm 0,015)V$ . (gdzie wartość 0,015V jest błędem granicznym ustalonym dowolną metodą). Zapis ten nie jest poprawny ponieważ ma za dużo cyfr nie mających uzasadnienia. Wartość błędu granicznego wynosi 0,015V co oznacza, że informacja dokładniejsza niż 0,005V nie ma sensu dlatego cyfry na pozycjach po przecinku czwartej, piątej i dalszych (cyfry: 46321) nie wnoszą żadnej informacji o mierzonej wielkości ( $0,00046321\ll 0,015$ ). **Poprawny zapis ma postać  $U=(1,237\pm 0,015)V$ .** Wynik obliczeń zaokrąglamy w ten sposób, że ostatnia cyfra, która pozostała po opuszczeniu cyfr końcowych nie ulega zmianie, jeśli następują po niej cyfry od 0 do 4, oraz zwiększamy ją o 1, jeśli następują po niej cyfry od 5 do 9.

Niepewność standardowa wynosi  $0,015V\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,009V$  czyli wynik pomiaru można zapisać:  $U=1,237(0,009)V$ .

## 6. METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Eksperyment pomiarowy często polega na wyznaczeniu zależności jednej wielkości w funkcji innej wielkości fizycznej. Uzyskana tak relacja empiryczna pomiędzy wielkościami charakteryzuje badany obiekt. Zazwyczaj jedna z wielkości jest zmienną kontrolowaną przez eksperymentatora a druga zależy od właściwości badanego obiektu. Zmienną kontrolowaną nazywamy „zmienną niezależną” a zmienna zależną od właściwości obiektu - „zmienną zależną”.

**Przykład 47** (Prawo Ohma). Przykładem może być zależność natężenia prądu elektrycznego  $I$  płynącego przez badany obiekt od napięcia elektrycznego  $U$  przyłożonego na obiekt. Zmienną niezależną jest napięcie  $U$  bowiem do eksperymentu wykorzystuje się zasilacz regulowany wytwarzający odpowiednie napięcie elektryczne. Zmieniając napięcie płynące przez obiekt powodujemy zmianę natężenia prądu  $I$ . Jeśli badany obiekt jest przewodnikiem metalowym (np. drut metalowy) to spodziewamy się, że zależność pomiędzy natężeniem prądu a napięciem będzie liniowa, czyli będzie obowiązywać prawo Ohma:  $I = \frac{1}{R}U$ .

Przystępując do badania jakiegoś obiektu (lub zjawiska) zazwyczaj spodziewamy się, że będzie opisane równaniem pewnego typu. Równanie takie wynika zazwyczaj z teorii badanego zjawiska<sup>54</sup> Zakładamy zazwyczaj, że badany obiekt (zjawisko) opisane rodziną równań:

$$y = f_{\alpha}(x) \tag{186}$$

gdzie  $f_{\alpha}$  jest rodziną (zbiorem) funkcji numerowaną wskaźnikiem  $\alpha$ .

Wskaźnik  $\alpha$  może być jednym lub wieloma parametrami liczbowymi.

---

<sup>54</sup>Teoria może być przybliżona lub też niekompletna a nawet błędna, wtedy metoda najmniejszych kwadratów pozwala na weryfikację modelu zjawiska.

Weryfikacja tego modelu polega na pomiarze zależności zmiennej zależnej  $y$  od zmiennej niezależnej  $x$ . W wyniku pomiarów otrzymujemy serię danych, którą zapiszemy jako zbiór par  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$

Zadaniem metody najmniejszych kwadratów jest znaleźć funkcję (spośród zbioru  $f_\alpha$ ) najlepiej pasującą do danych doświadczalnych, inaczej mówiąc szukamy takiego parametru (lub parametrów)  $\alpha$ , dla którego dane empiryczne najlepiej pokrywają się z funkcją  $f_\alpha$  [3]. Metodę najmniejszych kwadratów krótko więc opiszemy jako metodę dopasowania funkcji opisującej badany obiekt do danych empirycznych.

W badaniach empirycznych mamy więc dwa zagadnienie

- 1) dobór rodziny funkcji opisującej obiekt,
- 2) określenie kryterium dopasowania funkcji opisującej obiekt do danych empirycznych.

### 6.1. Dobór rodziny funkcji

Z matematycznego punktu widzenia **rodzinę funkcji** opisuje się wzorem, w którym równanie opisujące funkcję zawiera parametr (lub kilka parametrów).

Przykłady rodzin funkcji:

- 1) Funkcja liniowa  $f(x) = 5x$  jest jedną konkretną funkcją o współczynniku nachylenia 5. Równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt  $(0, 0)$  ma postać  $f_a(x) = ax$ , wzór taki opisuje zbiór funkcji liniowych o dowolnym nachyleniu  $a$ . Taki zbiór nazywamy rodziną funkcji o różnych współczynnikach indeksowaną (wskaźnikowaną, numerowaną, parametryzowaną) parametrem  $a$ , parametr ten jest współczynnikiem nachylenia prostej.
- 2) funkcje liniowe w ogólnym przypadku indeksowane są dwoma parametrami  $(a, b)$   $f_{(a,b)}(x) = ax + b$ , parametr  $a$  nazywany jest współczynnikiem nachylenia lub współczynnikiem kierunkowym, a  $b$  jest stałą (wyraz stały) lub opisowo współrzędną przecięcia z osią  $y$ . Wskaźnik  $\alpha$  zapisany w ogólnej formule (186) składa się więc z dwóch parametrów  $\alpha = (a, b)$ .
- 3) Rodzina funkcji kwadratowych  $f_\alpha(x) = ax^2 + bx + c$  wskaźnikowana jest trzema parametrami:  $\alpha = (a, b, c)$ .  
Ogólnie rodziną funkcji może być dowolny wielomian  $n$ -tego rzędu, współczynniki wielomianu są wskaźnikami rodziny wielomianów.
- 4) Rodzina funkcji wykładniczych  $f(x) = ae^{(bx)}$  ma dwa parametry  $a$  i  $b$ .
- 5) Rodzina funkcji wymiernych:  $f(x) = A \frac{x - a}{x - b}$ , na postać ilorazu wielomianów pierwszego rzędu.
- 6) Rodzina funkcji Lorentza  $f(x) = \frac{A}{b - (x - a)^2}$

Wybór funkcji opisującej zjawisko powinien wynikać z praw fizyki, które wykorzystujemy do opisu obserwowanych zjawisk. Korzystając z teorii fizycznych należy napisać równania opisujące opisującej zjawisko. Np. gdy badamy zależność natężenia prądu od napięcia na rezystorze wykonanym z metalu to zastosujemy rodzinę funkcji liniowych, co jest konsekwencją prawa Ohma. Jeśli badamy drogę przebytą przez ciało w funkcji czasu w rzucie swobodnym (w próżni bez oporów powietrza) to zastosujemy funkcję kwadratową.

## 6.2. Kryteria dopasowania rodziny funkcji do danych empirycznych

Załóżmy, że w wyniku pomiarów zależności zmiennej  $y$  od zmiennej  $x$  uzyskamy  $N$  par pomiarów  $(x_i, y_i)$  opisujących empiryczną zależność pomiędzy zmiennymi  $x$  i  $y$ . Zmienną  $x$  nazywa się często zmienną kontrolną i zakładamy, że jest mierzona dokładnie. Zakładamy, że gdyby pomiary były idealne to zależność opisana byłaby pewną funkcją z rodziny  $f_\alpha$  (np. jedną z funkcji liniowych). Naszym zadaniem jest znaleźć funkcję  $f_{\alpha_0}$  taką, która najlepiej pasuje do danych doświadczalnych. Rzeczywiste pomiary obarczone jest błędem i punkty pomiarowe nie będą leżeć na wykresie funkcji opisującej zjawisko. Modelem pomiaru jest równanie:

$$y_i = f_{\alpha_0}(x_i) + \varepsilon \quad (187)$$

gdzie  $f_{\alpha_0}(x_i)$  jest wartością mierzonej wielkości dla zmiennej niezależnej  $x_i$ ,

Jeśli więc badane zjawisko opisywane jest najlepiej przez równanie  $y = f_{\alpha_0}$ , dla pewnego optymalnego parametru  $\alpha_0$  to dla większości wyników obserwacji  $(x_i, y_i)$  mamy  $y_i \neq f_{\alpha_0}(x_i)$ . W celu znalezienia najlepiej pasującego do danych pomiarowych równania należy posłużyć się metodami statystycznymi (nie może to być metoda polegająca na rozwiązaniu układu równań typu  $y_i = f_{\alpha_0}(x_i)$ ).

Kryterium dopasowania musi być opisane ilościowo, tj. za pomocą miary określającej ilościowo stopień dopasowania funkcji do danych empirycznych. Miarę tą oznaczmy  $\chi^2(\alpha)$  i jest ona funkcją zależną od danych empirycznych jak i równania opisanego wzorem  $y = f_\alpha(x)$ . Dla konkretnego zestawu danych pomiarowych miara  $\chi^2(\alpha)$  zależy od parametru (lub parametrów)  $\alpha$ . Parametr (lub parametry)  $\alpha$  dobieramy tak aby funkcja  $\chi^2(\alpha)$  dla optymalnych parametrów  $\alpha$  miała wartość minimalną.

Funkcji, opisujących miarę odchylenia danych empirycznych od funkcji postulowanej, można wybrać wiele, ale najczęściej stosowana jest suma różnic kwadratów błędów<sup>55</sup>:

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{i=1}^N (y_i - f_\alpha(x_i))^2 \quad (188)$$

Wzór powyższy opisuje dopasowanie do danych doświadczalnych poprawnie gdy niepewności zmierzonych  $y$ -ów są jednakowe (a zmienną  $x$  mierzymy bez błędu).

W przypadku gdy niepewność każdej wartości  $y_i$  jest inna i wynosi  $U(y_i)$ , miarę  $\chi^2(\alpha)$  trzeba zmodyfikować tak aby punkty pomiarowe o dużych niepewnościach dawały mały wkład do wyznaczonego  $\chi^2(\alpha)$ . Uzyskuje się to wprowadzając do wzoru (188) wagi odwrotnie proporcjonalne do kwadratu niepewności standardowej  $u(y_i)$ :

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f_\alpha(x_i)}{u(y_i)} \right)^2 \quad (189)$$

Gdy dane są odchylenia standardowe  $\sigma_i$  każdej wielkości  $y_i$  należy minimalizować funkcję:

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f_\alpha(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (190)$$

Wskaźnik  $\alpha$  może oznaczać kilka parametrów. Np. prosta, opisana równaniem  $f(x) = ax + b$ , ma dwa parametry  $a$  i  $b$ . Para  $(a, b)$  może być oznaczona jako jeden wskaźnik  $\alpha$ , czyli:  $\alpha = (a, b)$ .

<sup>55</sup>Można wykazać, że taka miara daje najlepsze dopasowanie (w sensie najmniejszego błędu) parametrów jeśli rozkład błędów jest normalny [3]

**Przykład 48.** Dopasowanie do prostej  $f(x) = ax$

Rozpatrzmy najprostszy przykład dopasowania funkcji liniowej jedno-parametrowej  $f(x) = ax$  do danych pomiarowych  $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$  wykonanych z jednakową niepewnością (wszystkie  $u(y_i)$  są identyczne).

Warunkiem dopasowania jest minimum funkcji  $\chi^2(a)$ :

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i))^2 = \min \quad (191)$$

Czyli:

$$\frac{d}{da} \chi^2(a) = \frac{d}{da} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2 = 0$$

przekształcając

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i) (-x_i) = 0$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^N y_i x_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 = 0$$

ostatecznie współczynnik kierunkowy  $a$  wynosi:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Jeśli założymy, że każdy pomiar wielkości  $y_i$  miał niepewność  $u(y_i) = \sigma_i$  to należy wykorzystać warunek minimalizacji funkcji (190) i otrzymamy:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i x_i}{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i}}$$

### 6.3. Dopasowanie funkcji liniowej $y = ax + b$ do danych empirycznych

Założmy, że badamy zależność wielkości  $y$  od wielkości  $x$  w pewnym zjawisku (procesie). W wyniku pomiaru uzyskamy zależność empiryczną w postaci  $N$  par liczb  $(x_i, y_i)$  opisujących badaną relację. Ponadto założymy, że zmienna  $x$  mierzona jest dokładnie (dużo dokładniej niż zmienna  $y$ ), a wszystkie wyniki pomiarów pomiarów  $y_i$  zmiennej  $y$  mają taką samą niepewność (i błędy pomiarowe mają taki sam rozkład normalny), wtedy minimalizacja funkcji (188) daje najlepszą estymację dla parametrów  $a$  i  $b$  funkcji  $y = ax + b$  dopasowanych najlepiej do danych  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1 \dots N$ ).

Wartości parametrów  $a$  i  $b$  znajdziemy więc jako warunek minimum funkcji tych parametrów, funkcją tą jest suma kwadratów błędów dopasowania:

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (192)$$

Minimum wyznaczamy z warunku, że pochodne względem parametrów  $a$  i  $b$  zerują się:

$$\frac{\partial}{\partial a} \chi^2(a, b) = 0, \text{ i } \frac{\partial}{\partial b} \chi^2(a, b) = 0 \quad (193)$$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy:

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (194)$$

$$b = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right) \quad (195)$$

Jeśli wprowadzimy średnie:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (196)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (197)$$

to równania (194) można zapisać w postaci:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (198)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad (199)$$

Niepewności standardowe  $s(a)$  i  $s(b)$  wyznaczenia współczynników  $a$  i  $b$ :

$$s(a) = s_y \sqrt{\frac{N}{(N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2)}} = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \quad (200)$$

$$s(b) = s_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{(N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2)}} = s(a) \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (201)$$

gdzie  $s_y$  to odchylenie standardowe zmiennej  $y$  ale liczone względem prostej, czyli jako suma kwadratów odchyleń punktów od prostej

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - b - ax_i)^2 \quad (202)$$

We wzorze (202) w mianowniku jest  $N - 2$  ponieważ liczba stopni swobody wynosi liczba danych  $N$  minus liczba parametrów, a parametry to  $a$  i  $b$ . Wzór na  $\sigma_y$  jest odchyleniem standardowym licznika równania wzoru na współczynnik  $a$  dany równaniem (198).

Jeśli pomiary zmiennej  $y_i$  wykonane są z różnymi niepewnościami opisanymi odchyleniem standardowym  $\sigma_i$  minimalizować trzeba miarę (190). Otrzymujemy wtedy:

$$a = \frac{S \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{\Delta}, \quad b = \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{\Delta} \quad (203)$$

gdzie:

$$\Delta = S \cdot S_{xx} - (S_x)^2, \quad S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (204)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad (205)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}. \quad (206)$$

Odchylenia standardowe współczynników  $a$  i  $b$  wynoszą:

$$s^2(a) = s_y^2 \frac{S}{\Delta}, \quad s^2(b) = s_y^2 \frac{S_{xx}}{\Delta}, \quad (207)$$

gdzie  $s_y$  dane jest wzorem (202).

Jeśli w powyższych wzorach wstawimy jednakowe odchylenie standardowe  $\sigma_i = \sigma$ , dla każdego  $i = 1, \dots, N$ , to otrzymamy wzory (194).

W przypadku gdy zarówno zmienna niezależna  $x$  i zmienna zależna  $y$  są obarczone błędami trzeba uogólnić metodę i opisanie to jest w literaturze, dobrym źródłem wiedzy na temat analizy danych jest książka Brandta [3].

## 7. TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH

Pomiary wykonuje się w celu wyciągnięcia wniosków dotyczących badanych obiektów i zjawisk. Zasady wnioskowania rzadko są opisane prostym schematem deterministycznym, w którym na podstawie wyniku pomiaru możemy podjąć jednoznaczna decyzję. Zazwyczaj wyniki pomiarów charakteryzują się rozrzutem danych pomiarowych, a wnioskowanie ma postać odrzucenia lub nie odrzucenia pewnej hipotezy na temat obserwowanych zjawisk. Dlatego też wyciąganie wniosków z wyników empirycznych powinno przebiegać z wykorzystaniem metod statystycznej weryfikacji hipotez.

Większość badań poznawczych można opisać jako zadawanie pytań dotyczących właściwości obiektów. Pytanie takie może być sformułowane jako hipoteza, którą chcemy zweryfikować w wyniku badań empirycznych.

Rozpatrzmy przykład pomiaru temperatury w okresie jesiennym na zewnątrz budynku w celu podjęcia decyzji o wyborze ubioru. Załóżmy, że jest koniec lata i chodziliśmy ubrani lekko. Decyzja o ubiorze może mieć postać: „jeśli  $T > T_c$  to pozostajemy ubrani lekko”, w przeciwnym wypadku zakładamy kurtkę.  $T$  oznacza temperaturę na dworze (temperaturą odczytaną z termometru), a  $T_c$  jest temperaturą, którą uznajemy jako granicę „bycia ciepło”.  $T_c$  nazwiemy temperaturą krytyczną czyli jeśli temperatura jest mniejsza od

$T_c$  to uważamy, że jest zimno. Tak postawiony problem można ująć jako testowanie hipotezy „czy  $T > T_c$ ” i podejmowania decyzji dotyczącej ubioru: jeśli w wyniku pomiaru odrzucimy hipotezę, że „jest ciepło” to musimy ubrać się kurtkę.

Opisany powyżej przykład dotyczy wnioskowania na podstawie jednorazowo zmierzonej wartości, przy założeniu, że mierzona wielkość nie zmienia się. Jeśli chcemy podjąć decyzję na podstawie serii pomiarów i wielkość obserwowana (mierzona) jest zmienną losową, to decyzję<sup>56</sup> możemy sformułować jako test hipotezy i wymaga to metod statystycznych.

Założmy, że wynikiem pomiaru jest ciąg liczb  $(x_1, \dots, x_N)$ , które z punktu widzenia statystyki są próbami losowymi jakiegoś rozkładu zmiennej  $x$ . Hipoteza w tym przypadku nie może mieć już prostej postaci, że  $x > x_c$ , ponieważ wielkość  $x$  opisana zmienną losową  $X$  i może przybierać wszystkie wartości (z pewnym prawdopodobieństwem). W praktyce jednak decyzje podejmujemy na podstawie prawdopodobieństwa tego, że  $X > x_c$ .

Kryterium odrzucenia hipotezy, że  $x > x_c$  sformułujemy ilościowo poprzez kryterium dla wartości prawdopodobieństwa: jeśli prawdopodobieństwo, tego że  $X > x_c$  jest małe czyli jeśli jest mniejsze od zadanej wielkości  $\alpha$ :  $P(X > x_c) < \alpha$  to mamy powody odrzucenia hipotezy o tym, że  $x > x_c$ . Wartość  $\alpha$  nazywa się istotnością testu hipotezy. Poziom istotności testu ustala się na podstawie modelu kosztów podjęcia błędnej decyzji [6], ale często przyjmuje się arbitralnie wartość  $\alpha = 0,05$ .

W modelu probabilistycznym miarą zgodności teorii (hipotezy) z doświadczeniem jest wielkość prawdopodobieństwa. Decyzja zależy od wartości prawdopodobieństwa tego, że hipoteza jest prawdziwa jeśli w obserwacji uzyskamy wynik pomiaru w postaci serii danych pomiarowych  $x_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Interpretując te dane zakładamy, że są one próbą losową hipotetycznego rozkładu.

Jeśli  $P(X > x_c)$  jest małe (czyli, że wyniki pomiarów są większe od  $x_c$  jest mało prawdopodobne) to powiemy, że są powody odrzucenia hipotezy o tym, że wielkość obserwowana  $x$  jest większa od  $x_c$ . Decyzja ma więc postać: jeśli  $P(X > x_c) < \alpha$  to odrzucamy hipotezę: że „ $x > x_c$ ”, jako mało prawdopodobną.

Wróćmy do przykładu związanego z pomiarem temperatury, ale w sytuacji gdy temperatura jest zmienną losową. Do tej pory było ciepło i ubieraliśmy się ciepło, zmienimy ubranie gdy prawdopodobieństwo tego, że temperatura spadnie poniżej temperatury  $T_c$  jest dostatecznie duże. Wykonujemy serię pomiarów i interesuje nas kiedy musimy odrzucić hipotezę, że jest ciepło.

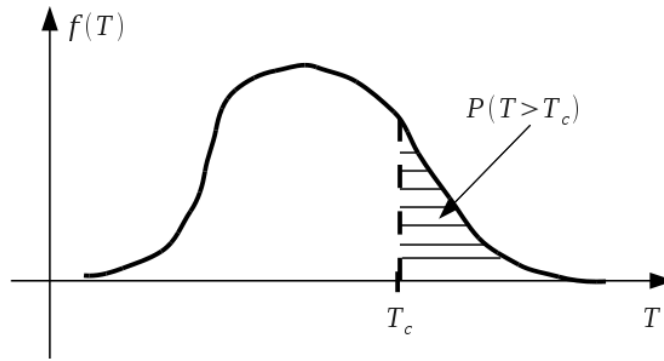
Prawdopodobieństwo tego, że jest ciepło. Określamy próg ryzyka, że zmarzniemy poprzez prawdopodobieństwo tego, że temperatura jest większa od krytycznej  $T_c$ .

W takim eksperymencie hipotezą jest faktycznie funkcja rozkładu prawdopodobieństwa. Zazwyczaj zakłada się, że zjawiska opisuje się rozkładem Gaussa, wobec czego rozkład prawdopodobieństwa określony jest jednoznacznie przez dwa parametry: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe. określoną przez parametry rozkładu prawdopodobieństwa na jego podstawie określamy, czy warunek

---

<sup>56</sup>Teoria decyzji jest dużo bardziej rozbudowaną metodą niż weryfikacja hipotezy statystycznej patrz np. [6]





**Rysunek 27.** Rozkład temperatury i obszar w którym temperatura jest większa od krytycznej  $T_c$ .

### 7.1. Ogólny schemat weryfikacji hipotezy

Hipotezą statystyczną jest przypuszczenie, że obserwowane zjawisko opisane jest pewnym (hipotetycznym) rozkładem prawdopodobieństwa o założonych parametrach. Taką hipotezę zapiszemy symbolicznie  $H_0$ .

Wynik obserwacji (seria danych pomiarowych) oznaczmy symbolem  $A$ . Mając założony rozkład prawdopodobieństwa związany z hipotezą  $H_0$  możemy dla wyników obserwacji, wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe  $P(A|H_0)$  tego, że uzyskamy wynik obserwacji  $A$ , jeśli prawdziwa jest hipoteza  $H_0$ .

Jeśli prawdopodobieństwo  $P(A|H_0)$  jest małe (mniejsze od progu, nazywanego poziomem istotności testu) to powiemy, że wynik obserwacji jest tak mało prawdopodobny (przy założonej hipotezie), że mamy powody odrzucenia hipotezy  $H_0$ . Jeśli  $P(A|H_0)$  jest większe od poziomu istotności, to powiemy, że nie ma powodu odrzucenia hipotezy  $H_0$  (patrz np. [12]). Poziom istotności testu ustala się na podstawie modelu ryzyka lub też przyjmuje się arbitralnie np. 0,05. Należy podkreślić, że jeśli „nie mamy powodu odrzucenia hipotezy” to nie oznacza to tego, że hipoteza  $h_0$  jest prawdziwa.

Jeśli testowana hipoteza  $H_0$ , dotyczy wartości oczekiwanej to przez zdarzenia  $A$  rozumiemy zbiór zdarzeń dla których obserwowane wartości średnice są mniejsze (lub większe) od wartości uzyskanej w wyniku obserwacji.

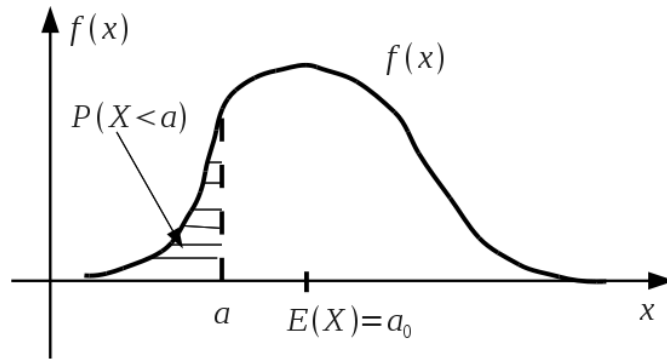
#### Przykład 49. Hipoteza wartości oczekiwanej

Rozważmy hipotezę, że wartość oczekiwana charakteryzująca zjawisko równa jest  $a_0$  czyli:  $H_0 : E(X) = a_0$ . Wykonaliśmy  $N$  pomiarów i wartość średnia z danych empirycznych wyniosła  $\bar{x} = a$  ( $a < a_0$ ). Jako kryterium odrzucenia hipotezy przyjmujemy prawdopodobieństwo  $P(X < a)$  tego, że wartość zaobserwowanej średniej jest mniejsza od wartości  $\alpha$  nazywanej poziomem istotności.

Jeśli prawdopodobieństwo  $P(X < a)$  jest małe (mniejsze od ustalonej wartości  $\alpha$ ) to mamy powód odrzucenia hipotezy.

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f_{a_0}(x) dx < \alpha \quad (208)$$

gdzie  $f_{a_0}(x)$  jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  przy założeniu, że wartość oczekiwana wynosi  $a_0$ :  $E(X) = a_0$ . Przyjmujemy, że  $\alpha = 0,05$ .



**Rysunek 28.** Hipotezą jest to, że zjawisko opisane jest rozkładem prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej  $E(X) = a_0$ . Wynikiem obserwacji jest wartość zmiennej losowej  $a$ . Prawdopodobieństwo tego, że  $X < a$  opisuje eksperymenty o wynikach mniejszych od  $a$ . Jeśli  $P(X < a) < \alpha$  (jest małe) to hipotezę, że  $E(X) = a_0$  odrzucamy.

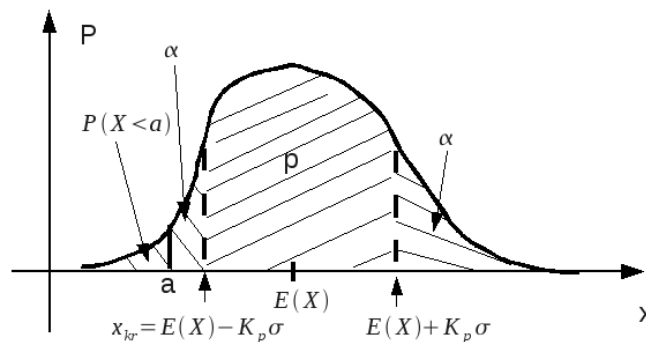
Zależność (208) można zapisać poprzez wartość krytyczną testu  $x_{kr}$  zdefiniowaną jako:

$$P(X < x_{kr}) = \int_{-\infty}^a f(x)dx = \alpha \quad (209)$$

Wtedy kryterium (208) można zapisać poprzez wartość krytyczną:  $a < x_{kr}$ , gdzie  $a$  jest zmierzoną wielkością lub średnią z serii pomiarowej.

Kryterium odrzucenia hipotezy można wyrazić poprzez przedział ufności. Przedział ufności opisany jest wzorem (141), wtedy wartość krytyczna równa jest  $E(X) - k_p\sigma(X)$ , gdzie dla rozkładu symetrycznego  $p = 1 - 2\alpha$  (rysunek 29), czyli kryterium odrzucenia hipotezy zerowej ma postać:

$$E(X) - k_p\sigma(X) > a$$



**Rysunek 29.** Kryterium odrzucenia hipotezy a przedział ufności.  $x_{kr} = E(X) - k_p$ , pole po obu stronach przedziału ufności wynosi  $2\alpha$ . Wynik obserwacji  $a$  leży w obszarze krytycznym.

## 7.2. Moc testu, błąd drugiego rodzaju

Testowanie przy założeniu jednej hipotezy nie jest poprawne metodologicznie i należy porównywać różne hipotezy. Załóżmy, że mamy hipotezę alternatywną  $H_1$  dla której znany jest rozkład warunkowy  $P(A|H_1)$ . Rozkład taki może znacznie się różnić od

rozkładu  $P(A|H_0)$  i obszar krytyczny odrzucenia hipotezy  $H_0$  może leżeć w obszarze nie-odrzućenia hipotezy alternatywnej  $H_1$ .

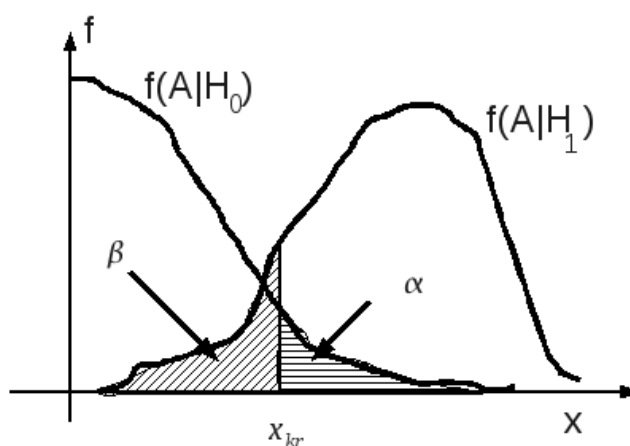
$\alpha$  oznacza prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy  $H_0$  gdy jest prawdziwa (poziom istotności testu),

$\beta = 1 - P(A|H_1)$  oznacza prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy alternatywnej gdy jest prawdziwa. Wielkość tą nazywamy mocą testu.

W weryfikacji hipotez występują dwa rodzaje błędów:

- 1) błąd pierwszego rodzaju: odrzucenie hipotezy zerowej gdy jest prawdziwa
- 2) błąd drugiego rodzaju: przyjęcie hipotezy zerowej gdy nie jest prawdziwa.

Im większa jest istotność testu tym większy jest błąd drugiego rodzaju.



**Rysunek 30.** Błąd pierwszego i drugiego rodzaju. Istotność  $\alpha$  i moc  $\beta$ .

### 7.3. Test zgodności chi-kwadrat

Test zgodności ma na celu weryfikację hipotezy:

”czy hipotetyczny rozkład prawdopodobieństwa  $f(x)$  nie jest sprzeczny z wynikami obserwacji  $\{x_i\}_{i=1}^N$ ? „

Hipotetyczny rozkład prawdopodobieństwa  $f(x)$  jest rozkładem, który przewidujemy na podstawie wiedzy teoretycznej i naszych wcześniejszych obserwacji.

W celu weryfikacji powyższej hipotezy należy sprawdzić na ile hipotetyczny rozkład różni się od rozkładu empirycznego zbudowanego na podstawie danych empirycznych. czy dane empiryczne nie zaprzeczają naszej hipotezie o postaci rozkładu  $f(x)$  należy skonstruować miarę liczbową opisującą różnicę pomiędzy rozkładem hipotetycznym a rozkładem empirycznym wynikającym z danych pomiarowych  $\{x_i\}_{i=1}^N$ ?. Na podstawie danych pomiarowych możemy wyznaczyć histogram (rozdział 4.1)

W celu weryfikacji hipotezy definiujemy miarę<sup>57</sup> różnicy pomiędzy rozkładem empirycznym wynikającym z danych eksperymentalnych  $\{x_i\}$  a rozkładem hipotetycznym  $f(x)$  (rozkładem podlegającym testowaniu):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} = \sum_{k=1}^K \frac{(f_k - p_k)^2}{p_k} \quad (210)$$

<sup>57</sup>Miara różnicy wielkości opisuje liczbowo wielkość różnicy pomiędzy wielkościami.

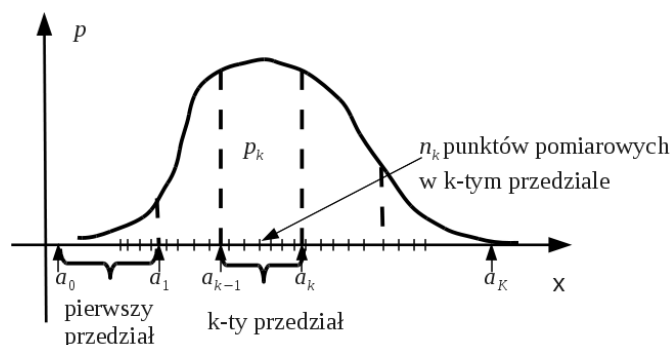
gdzie:  $n_k$  - liczba wystąpień wyników z  $k$  - tego przedziału.

$p_k$  - prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa  $X$  znajduje się w  $k$ -tym przedziale,  $k$ -ty przedział oznaczamy  $[a_{k-1}, a_k]$  (rys. 7.3),

$N = \sum_{k=1}^K n_k$  - ilość prób.  $f_k = \frac{n_k}{N}$  - zaobserwowana częstość w  $k$ -tym przedziale,  $K$  - liczba przedziałów, na które podzielono oś wyników pomiarów (oś  $x$ -ów).

Jeśli liczba wystąpień  $n_k$  pomiarów w  $k$ -tym przedziale jest większa od 10 to można przyjąć, że tak zdefiniowana zmienna  $\chi^2$  ma rozkład chi-kwadrat o  $K - 1$  stopniach swobody (dlatego test nosi nazwę „test chi-kwadrat hipotezy o rozkładzie statystycznym”) [12].

W celu wyznaczenia  $n_k$  i  $p_k$  oś liczb rzeczywistych reprezentujących wyniki pomiarów dzielimy na  $K$  przedziałów  $[a_{k-1}, a_k]$ ,  $k = 1, \dots, K$ , w taki sposób aby w każdym przedziale było nie mniej niż 10 punktów pomiarowych. Optymalnie jest podzielić  $n$  a takie przedziały aby w każdym z nich było tyle samo punktów (lub podobna ilość). Każdy z przedziałów nazywamy koszykiem, tak więc przedział  $[a_{k-1}, a_k]$  jest  $k$ -tym koszykiem. Jeśli wynikiem pomiarów jest seria danych doświadczalne:  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), to koszyki można skonstruować następująco: Załóżmy, że  $N = K * L$ , gdzie  $K$  liczba koszyków a  $L$  - liczba danych w jednym koszyku. Wtedy przedziały mogą mieć postać:  $[0, x_L], [x_L, x_{2L}], \dots, [x_{L(K-1)}, x_{KL}]$ , gdzie założyliśmy, że wielkość mierzona musi być dodatnia. Pierwszy punkt  $X_0$  jest najmniejszą możliwą (nie koniecznie występującą w serii pomiarowej) wartością wielkości mierzonej. nazywanych koszykami:



**Rysunek 31.**  $n_k$  - liczba danych w  $k$ -tym koszyku,  $p_k$  - prawdopodobieństwo znalezienia zmiennej losowej  $X$  w  $k$ -tym koszyku.  $p_k$  jest polem powierzchni po krzywą, na obszarze jednego koszyka (zaznaczone liniami pionowymi). Na osi naniesiono punkty pomiarowe oraz koszyki, które są przedziałami  $[a_{k-1}, a_k]$

Prawdopodobieństwo  $p_k$  tego, że wynik obserwacji jest w  $k$ -tym przedziale  $[a_{k-1}, a_k]$  wylicza się ze wzoru:

$$p_k = P(a_{k-1} < X \leq a_k) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx \quad (211)$$

Gdzie  $f(x)$  - gęstość testowanego rozkładu prawdopodobieństwa.

Rozkład prawdopodobieństwa  $f(x)$  wyznacza się na podstawie parametrów wyznaczony z danych pomiarowych.

**Przykład 50.** Test hipotezy o rozkładzie normalnym szumów generowanych przez diodę Zenera Przy pomocy przetwornika analogowo-cyfrowego wykonano serię pomiarów napię-

cie generowane przez diodzie Zenera (generator szumów z wykorzystaniem diody Zenera). Pomiar wykonano przetwornikiem NI6210USB firmy National Instrument o rozdzielczości 12 bitów i przy częstotliwości próbkowania 100kHz. Wynik pomiarów w bitach przedstawia tabela 5. Zadaniem jest weryfikacja hipotezy o rozkładzie normalnym procesu generującego serię danych, które traktujemy jako próba losowa testowanego rozkładu. Wartości gęstości prawdopodobieństwa wyliczana jest na podstawie wzoru (wzór (96):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (212)$$

gdzie  $\mu$  równa jest wartości średniej, z danych pomiarowych.

**Tablica 5.** Uporządkowane wyniki pomiarów napięcia na diodzie Zenera w bitach, jeden bit odpowiada napięciu  $\frac{10V}{2^{16}} \simeq 0,15mV$

2763	2843	2869	2896	2898
2903	2917	2921	2933	2935
2946	2948	2949	2949	2949
2950	2952	2956	2959	2959
2961	2965	2966	2966	2966
2970	2971	2973	2974	2978
2979	2979	2981	2982	2984
2985	2987	2987	2992	2993
2994	2994	2999	3000	3000
3001	3001	3003	3007	3011
3011	3013	3014	3014	3018
3023	3026	3027	3028	3029
3032	3032	3039	3040	3040
3042	3044	3048	3051	3051
3054	3057	3060	3061	3063
3065	3071	3071	3073	3073
3077	3081	3083	3085	3090
3090	3091	3098	3101	3104
3104	3110	3112	3122	3125
3151	3153	3155	3183	3198

**Tablica 6.** Wyliczenia statystyki  $\chi^2$ . Kolumna  $a_k$  oznacza krańce koszyków  $a_k = x_{10k}$  (gdzie  $k = 1, \dots, 10$ ) - co dziesiąta wartość pomiarowa z tablicy 5 (ostatnia kolumna),  $F(y)$  - dystrybucja rozkładu normalnego dla wartości z kolumny  $a_k$ ,  $p_k$  - prawdopodobieństwo dla przedziałów  $(a_{k-1}, a_k)$  zgodnie ze wzorem (211),  $\chi^2$  - wartości cząstkowe statystyki  $\chi^2$  ze wzoru (210), ostatni wiersz kolumny  $\chi^2$  - suma składowych zapisanych w kolumnie

$k$	$a_k$	$F(a_k)$	$p_k$	$\chi^2$
0	0	0,000		
1	2935	0,134	0,13375	0,85177
2	2959	0,218	0,08474	0,27484
3	2978	0,303	0,08484	0,27083
4	2993	0,379	0,07585	0,76908
5	3011	0,476	0,09730	0,00749
6	3029	0,575	0,09873	0,00163
7	3051	0,689	0,11398	0,17146
8	3073	0,787	0,09822	0,00324
9	3104	0,890	0,10243	0,00578
10	3198	0,994	0,10436	0,01821
	$\infty$	1		
		suma $\chi^2$	2,37432	

W celu weryfikacji hipotezy o tym, czy dane pomiarowe są próbą losową rozkładu testowanego, w tym przypadku normalnego, należy wartość statystyki  $\chi^2$  obliczonej ze

wzoru (210) porównać z wartościami krytycznymi rozkładu  $\chi^2$  dla ustalonego poziomu istotności (zazwyczaj będziemy zakładać poziom istotności 0,05). Z tabeli 7 odczytujemy, że dla 9 stopni swobody i poziomu istotności 0,05 (liczba koszyków minus jeden) wartość krytyczna statystyki  $\chi^2$  wynosi 16,92. Można więc powiedzieć, że na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw odrzucenia hipotezy o tym, że dane pomiarowe są próbą losową rozkładu normalnego.

**Tablica 7.** Wartości krytyczne rozkładu  $\chi^2$ ,  $p$  - poziom istotności,  $l$  - liczna stopni swobody

p	l=4	l=5	l=6	l=7	l=8	l=9	l=10
0,5	3,36	4,35	5,35	6,35	7,34	8,34	9,34
0,45	3,69	4,73	5,77	6,80	7,83	8,86	9,89
0,4	4,04	5,13	6,21	7,28	8,35	9,41	10,47
0,35	4,44	5,57	6,69	7,81	8,91	10,01	11,10
0,3	4,88	6,06	7,23	8,38	9,52	10,66	11,78
0,25	5,39	6,63	7,84	9,04	10,22	11,39	12,55
0,2	5,99	7,29	8,56	9,80	11,03	12,24	13,44
0,15	6,74	8,12	9,45	10,75	12,03	13,29	14,53
0,1	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
0,05	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,005	14,86	16,75	18,55	20,28	21,95	23,59	25,19

## 8. POJĘCIA PODSTAWOWE I WAŻNIEJSZE DEFINICJE

**Definicja 36.** Obiekt fizyczny.

Obiektem (obiektem będącym przedmiotem poznania) nazywać będziemy wszystko co można uczynić poznawalnym metodami naukowymi, tj. za pomocą obserwacji zmysłowej i mierzalnego aparaturą pomiarową. Taka definicja zawęży obiekty do obiektów fizycznych, w tym sensie obiektami nie są zjawiska społeczne i byty psychiczne. Obiektem fizycznym może być zjawisko, ciało lub proces, a także właściwość charakteryzująca zjawisko.

**Definicja 37.** Suma mnogościowa: Suma dwóch zbiorów  $A$  i  $B$  ma postać:  $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \cup x \in B)$ .

**Definicja 38.** Wielkość fizyczna.

Wielkość fizyczna jest cechą, którą można wyrazić ilościowo.

**Definicja 39.** Mezurand.

Mezurandem nazywamy wielkość fizyczną, mierzoną jest w określonych warunkach i w określony sposób definiujący mierzoną wielkość. Warunki te definiują zasady pomiaru wielkości fizycznej i sposób wyznaczania z serii danych pomiarowych.

**Definicja 40.** Pomiar.

Pomiar jest zbiorem operacji, wynikiem których jest przyporządkowanie obiektom wartości mierzonej wielkości.

**Definicja 41.** Błąd.

Błąd  $\Delta x$  pomiaru wielkości  $x$  jest różnica pomiędzy estymatą  $\tilde{x}$  a wartością estymowaną  $x_0$  (nazywaną poprawną lub prawdziwą):

$$\Delta x = \tilde{x} - x_0 \quad (213)$$

$x_0$  – wartość estymowana,

$\tilde{x}$  – estymata wartości mierzonej (odczytana z przyrządu lub wyznaczona z serii odczytów)

**Definicja 42.** Niepewność.

Parametr związany z wynikiem pomiaru opisujący wielkość błędów.

*Przewodnik* ISO [23] definiuje niepewność następująco:

**Niepewność pomiaru** jest to parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

**Definicja 43.** Estymata.

Estymatą nazywamy przybliżoną wartość.

Przykłady estymat.

- 1) Każdy wynik pomiaru jest przybliżony jest więc estymatą.
- 2) Zaokrąglenie obliczeń, np:  $\sqrt{10} \approx 3$ .

**Definicja 44.** Estymator.

Estymatorem jest operator wyznaczania wartości przybliżonej.

Operatorem jest zespół działań opisany algorytmem. przykład. Operatorem jest wartość średnia z  $N$  danych  $x_1, \dots, x_N$  (średnia z próby).

**Definicja 45.** Wartość średnia z próby (Średnia próby).

Niech  $x_1, \dots, x_N$  oznacza  $N$  wyników pomiarów w tych samych warunkach, każdy wynik oznaczamy  $x_i$ , gdzie  $i = 1, \dots, N$ . średnia  $x_{Av}$  wynosi (wzór (151))

$$x_{Av} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \quad (214)$$

Średnia może być zapisana poprzez operator uśredniania  $Av$ :  $Av(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Operator  $Av$  polega na dodaniu wszystkich danych.

## 9. JEDNOSTKI WIELKOŚCI FIZYCZNYCH, ZAMIANA JEDNOSTEK, WZORCE

Jednostkami podstawowymi w układzie SI są: metr, kilogram, amper, Kelwin i kandela, radian i steradian są jednostkami uzupełniającymi.

Zamiana jednostek polega na podstawianiu w miejsce jednej jednostki jej wartość przeliczoną w innej jednostce.

**Przykład 51.** zamiana milimetrów na metry

Długość zapisano jako  $l = 1095,3mm$  ile to wynosi w metrach?. Ponieważ  $1m = 1000mm$  więc  $1mm = \frac{1}{1000}m$ , postawiamy to w miejsce  $mm$  i mamy:  $l = 1095,3 \frac{1}{1000}m = 1,0953m$

**Przykład 52.** Zamiana  $\frac{km}{h}$  na  $\frac{m}{s}$

Wyrazić  $v = 45 \frac{km}{h}$  w  $\frac{m}{s}$ . Postawiamy  $1km = 1000m$  i  $1h = 3600s$  i mamy  $v = 45 \frac{1000m}{3600s} = 12,5 \frac{m}{s}$

**Przykład 53.** Zamiana  $\frac{m}{s}$  na  $\frac{km}{h}$  Wyrazić  $v = 3m/s$  w  $\frac{km}{h}$ . Podstawiamy:  $1m = \frac{1}{1000}km$  oraz  $1s = \frac{1}{3600}h$ , po podstawieniu mamy:

$$v = 3 \frac{m}{s} = 3 \frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} = \frac{3 \cdot 3600}{1000} \frac{km}{h} = 10,8 \frac{km}{h}$$



## 10. PRZYKŁADOWE ZADANIA

**Zad 1.** Samodzielnie (nie korzystając z opisów w literaturze) napisz krótki traktat zawierający precyzyjne definicje, opisujący proste (nie high-technology) przedmioty domowego użytku, korzystając z definicji pojęć podstawowych (definicje pojęć podstawowych należy znaleźć w literaturze).

**Zad 2.** Zbiór zdarzeń opisany warunkiem  $\Gamma$  opisujemy wzorem (48):

$$A_\Gamma = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \Gamma\} \quad (215)$$

Zapisz warunek  $\Gamma$  i zbiór  $\Omega$  dla zbioru czerwonych skarpetek w szafie.

**Zad 3.** Udowodnij, że  $E(X - E(X)) = 0$ .

**Zad 4.** Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne to

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0 \quad (216)$$

Wskazówka jest w podrozdziale 3.8.1.

**Zad 5.** Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe  $X_n$  opisujące próby losowe mają jednakową wartość oczekiwaną  $E(X_n) = a$  to:

$$E\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) = Na.$$

**Zad 6.** Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe  $X_n$  opisujące próby losowe mają jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa i są nieskorelowane to:

$$\sigma^2\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) = N\sigma(X).$$

**Zad 7.** Wylicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dla rozkładu równomiernego opisanego na przedziale  $[a, b]$ . Zapisz wzorem rozkład prawdopodobieństwa i wykonaj unormowanie.

**Zad 8.** Zmienna losowa ma rozkład trójkątny w przedziale  $[a, b]$ , przy czym maksimum rozkładu jest dla  $c \in [a, b]$ . Wyznacz:

- funkcję rozkładu prawdopodobieństwa z warunku "unormowania",
- wartość oczekiwaną,
- odchylenie standardowe,
- medianę.

**Zad 9.** Zmienna losowa ma rozkład jednostajny w przedziale  $[-a, b]$  (gdzie:  $a > 0, b > 0$ ). Wyznacz wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe.

**Zad 10.** W grze w karty każdy gracz dostaje 5 kart z talii 52 kart. Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych opisujących jednego gracza, oraz warunek opisujący zdarzenie polegające na tym, że dostaniemy dwie pary kart (np dwie piątki i dwa króle). Zapisz warunek równaniami.

**Zad 11.** Gra polega na rzucie monetą i przemieszczaniu pionka na linijce. Założono, że po wyrzuceniu orła pionek posuwa się o dwa centymetry do przodu ( $X(O) = 2cm$ ) a przy wyrzuceniu reszki cofa się o jeden centymetr ( $X(R) = -1cm$ ). Wyznacz wartość oczekiwaną przemieszczenia zakładając idealną monetę.

**Zad 12.** Wykonać eksperyment z rejestracją wielokrotną zjawiska losowego, np.: rzut kością (np. suma oczek dwóch kości), generator liczb losowych, stan giełdy, rzut do tarczy, szumy termiczne itp. Dla otrzymanych danych:

- 1) wyznaczyć i narysować histogram oraz dystrybuantę empiryczną (wykres częstości skumulowanej).
- 2) obliczyć wartość średnią, estymator odchylenia standardowego, trzeci moment centralny, współczynnik asymetrii,
- 3) zweryfikować hipotezę o tym, że empiryczny rozkład jest:
  - a) równomierny,
  - b) normalny,
  - c) trójkątny.
  - d) Weibulla.

**Zad 13.** Zmienna losowa opisana jest rozkładem danym w tabelce. **Wyznacz:** Wartość oczekiwaną  $E(X)$ , odchylenie standardowe  $\sigma(X)$ , wartość oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej  $E(X^2)$ .

$i$	$x_i$	$p_i$
1	1	0.5
2	2	0.25
3	4	0.25

**Zad 14.** Zmienna losowa opisana jest rozkładem danym w tabelce.

**Wyznacz:** Wartość oczekiwaną  $E(X)$ , odchylenie standardowe  $\sigma(X)$ , wariancję  $V(X)$ , wartość oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej  $E(X^2)$ , oraz sześcianu  $E(X^3)$ .

$i$	$x_i$	$p_i$
1	-2	1/2
2	2	1/4
3	4	1/8
4	8	1/8

**Zad 15.** Omów metodę najmniejszych kwadratów. Wyprowadź wzór dla przypadku wyznaczenia nachylenia  $a$  funkcji liniowej  $y = ax$ , gdy wszystkie pomiary  $\{x_i, y_i\}$  wykonane zostały z taką samą niepewnością. udowodnij, że  $a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$ .

**Zad 16.** Rzuć 100 razy 10 kośćmi. Wyznacz z każdego rzutu 10 kośćmi średnią, medianę oraz środek. Dla uzyskanych 100 wartości średniej, 100 median i 100 środkowych narysuj odpowiednie histogramy. Wyznacz odchylenia standardowe tych wielkości i oceń który estymator jest najlepszy. Środek  $n$  liczb zdefiniowany jest:  $x_0 = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min})$ ,  $x_{max}$  i  $x_{min}$  są maksymalną i minimalną wartością z  $n$  liczb.

**Zad 17.** Wynik pomiaru napięcia za pomocą woltomierza analogowego klasy 1% o zakresie pomiarowym  $U_{zakr} = 15V$ , i maksymalnej liczbie działek  $\alpha_{max} = 75$ działek, wyniósł  $\alpha_U = 62,5$ dz. Oblicz wartość zmierzonego napięcia oraz niepewność standardową i rozszerzoną pomiaru (bezwzględna i względna).

**Zad 18.** W wyniku pomiaru natężenia prądu multimetrem analogowym uzyskano następujące wyniki (w mA):

2,0 2,2 1,8 2,1 1,9 2,2 1,8 2,3 1,7 2,4 1,6

wyznacz:

- wartość średnią,
- estymator odchylenia standardowego,
- estymator odchylenia standardowego wartości średniej,
- niepewność standardową z złożoną.

Multimetr jest klasy 5%, pomiar wykonywany był na zakresie  $I_z = 5mA$ .

**Zad 19.** Pokój zmierzono miarką z podziałką centymetrową i uzyskano wyniki:

$x = (5.51 \pm 0.01)m$  i  $y = (4.02 \pm 0.01)m$ .

Ponadto stwierdzono, że ściana jest nierówna i oszacowano nierównomierność na 100mm. Oszacuj niepewności pomiaru długości boków i wyznacz niepewność pola powierzchni.

**Zad 20.** W celu pomiaru objętości kuli wykonano 11 pomiarów obwodu. i uzyskano (w mm):

40 44 36 42 38 44 36 46 34 48 32

zakładając, że pomiar wykonano miarką z podziałką milimetrowa wyznacz objętość i niepewność objętości.

**Zad 21.** W celu wyznaczenia rezystancji wykonano pomiary napięcia  $U$  i natężenia prądu  $I$ . Natężenie prądu zmierzono amperomierzem cyfrowym o błędzie względnym 1% i rozdzielczości dwóch ostatnich cyfr, a napięcie woltomierzem analogowym klasy 5%. Wyniki pomiarów przedstawione są w tabelce:

$I(mA)$	$I - zagr(mA)$	$U(V)$	$U - zagr(V)$
2,00	3	1,00	3
5,00	10	2,0	3
8,00	10	4,00	10
13,0	30	6,0	10
17,0	30	9,0	10
20,0	30	11	30
31,0	100	15	30
40,0	100	20	30

Wyznacz metodą najmniejszych współczynników nachylenia prostej na płaszczyźnie ( $U, I$ ) i na tej podstawie opór elektryczny korzystając ze wzoru otrzymanego w zadaniu 2. Narysuj wyniki pomiarowe na wykresie zależności  $U = f(I)$ , zaznacz słupki błędów, narysuj prostą (na oko) najlepiej pasującą do danych oraz określ na rysunku błąd (graniczny) wyznaczenia rezystancji. Która składowa błędów jest większa systematyczna (instrumentalna) czy przypadkowa? Oblicz błąd wynikający z rezystancji wewnętrznej woltomierza ( $R_v = 10k\Omega/V$ ).

**Zad 22.** W celu wyznaczenia pola powierzchni pokoju wykonano pomiary długości ścian miarką o z podziałką milimetrową. Dokładność z jaką udało się przyłożyć miarkę do ściany wynosi 4mm. Natomiast ustalono, że ściany są nierówne i ta nierówność wynosi ok 1cm. Wyznacz pole powierzchni i niepewność pola powierzchni jeśli zmierzone długości ścian

wynoszą: 5,21m i 4,03m. Wylicz składowe niepewności granicznej wynikającą z błędów pomiaru długości poszczególnych ścian. Niepewność całkowitą wyznacz zakładając, że składowe błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi.

**Zad 23.** W celu wyznaczenia wysokości budynku zmierzono długość cienia  $h_1$  pręta (o wysokości  $h_0 = 1m$ ) i długość cienia budynku  $h_2$ . Długość cienia pręta wyniosła  $h_1 = 1m$ , przy czym rozmycie cienia wyniosło  $\Delta h_1 = 1cm$ , natomiast długość cienia budynku wynosi  $h_2 = 10m$ , a rozmycie tego cienia  $\Delta h_2 = 10cm$ , pomiary cienia pręta i długości pręta wykonano miarką z podziałką 1mm, natomiast długość cienia budynku taśmą mierniczą z podziałką 1cm. Wyznacz wysokość budynku i niepewność (wyliczenie wysokości bez niepewności nie zalicza). Niepewność całkowitą wyznacz zakładając, że rozmycie cienia można potraktować jako błąd graniczny i składowe błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi (czyli sumowanie jest zgodnie z pierwiastkiem kwadratów).

**Zad 24.** Termometr rezystancyjny składa się z opornika, którego opór zależy od temperatury, źródła prądowego oraz woltomierza, którego wskazania wyskalowane są w  $^{\circ}C$  na podstawie wzoru:  $R(t) = R_0(1 + \alpha_0(t - t_0))$ , gdzie  $\alpha_0$  jest współczynnikiem temperaturowym odnoszącym się temperatury  $t_0$ . Wypisz źródła błędów, korzystając z ogólnego schematu pomiaru i wynikającej z niego klasyfikacji źródeł błędów. Napisz równanie pomiaru czyli równanie opisujące zależność mierzonej temperatury od napięcia i natężenia prądu. Rezystancja termometru dla  $t=20.00^{\circ}C$  ( $0,01^{\circ}C$ ) wynosi  $(100,000 \pm 0,001)$ , współczynnik temperaturowy platyny (odniesiona do  $20^{\circ}C$ )  $\alpha_{20} = (0,0040 \pm 0,0001) 1/K$  ( $0,0001$  jest błędem granicznym). W wyniku pomiaru napięcia uzyskano  $u=1,010V$ , a natężenie prądu wynosiło  $I=10,00mA$ . Napięcie i natężenie zmierzono przyrządem cyfrowym wyświetlającym cztery cyfry, na zakresach odpowiednio 2V i 20mA. Klasa obu przyrządów wynosi 0,2% (błąd przyrządu cyfrowego ma dwie składowe: błąd kwantowania i błąd systematyczny wynikający z klasy przyrządu). Wyznacz temperaturę i jej niepewność.

**Zad 25.** W celu wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego  $g$  wykonano pomiar okresu drgań wahadła matematycznego. Wylicz  $g$  (i jego niepewność) jeśli czas 10 wahań zmierzony stoperem wynosi  $T_{10} = 20,2s$ , długość wahadła  $L = 1,03cm$ . Błąd graniczny stopera wynosi 0,1s, długość mierzono miarką z podziałką 1mm. Oblicz niepewność uwzględniając refleks (ok. 0,2s). Błąd pomiaru długości spowodowany niedokładną lokalizacją środka zawieszoności ciała, jak i osi obrotu. Ciało miało ok. 2cm promienia i środek można określić z dokładnością 5mm. Do zawieszenia ciała użyto przewodu w igelocie o średnicy 0,7mm. Błąd określenia punktu zaczepienia szacujemy na maksimum 2mm. Przyspieszenie grawitacyjne wylicz z przybliżonego wzoru  $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ , oszacuj błąd  $g$  spowodowany użyciem tego wzoru jeśli kąt wahań wahadła wynosi  $20^{\circ}$ .

## LITERATURA

- [1] Abramowicz H., Jak analizować wyniki pomiarów, PWN, Warszawa, 1992.
- [2] Arendarski J., Niepewność Pomiarów, Oficyna Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2003.
- [3] Brandt S., Analiza danych, PWN, Warszawa, 1998.
- [4] Jerzy Browkin, Zbiory z działaniami, Warszawa : Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1974.

- [5] Jakubowski J., Sztencel R., Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego, Script, Warszawa 2006.
- [6] M.H. De Groot M.H., Optymalne decyzje statystyczne, PWN 1981.
- [7] Kuratowski K., Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, Warszawa, 1972.
- [8] Kuhn D., Struktura rewolucji naukowych, PWN, 1960.
- [9] Jaworski J., Morawski R., Olędzki J., Wstęp do metrologii i techniki eksperymentu. WNT, Warszawa 1992.
- [10] Łęski J., Systemy neuronowo-rozmyte, WNT, Warszawa, 2008.
- [11] Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii, Główny Urząd Miar, Warszawa 1996, dokument angielski <http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>
- [12] Plucińska A., Pluciński E., Elementy Probabilistyki, PWN, 1979.
- [13] Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, PWN, Warszawa, 1972.
- [14] Piotrowski J. Teoria Pomiarów, PWN, Warszawa 1986.
- [15] Podręcznik Metrologii, Tom 1, Podstawy teoretyczne, red. Sydenham P. H.,Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1988.
- [16] Rasiowa H., Wstęp do matematyki współczesnej, PWN Warszawa 1971.
- [17] Schuster G.H., Chaos deterministyczny. Wprowadzenie. PWN, Warszawa, 1995.
- [18] Słowiński P., Słowiński K. K. Nikola Tesla i jego genialne wynalazki, Wydawnictwo Videograf S.A., 2013.
- [19] Krysicki W., i in., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, (tom I i II), PWN 2004.
- [20] Taylor J.R., Wstęp do analizy błędu pomiarowego, PWN, Warszawa 1995.
- [21] Urbański M., K., Modelowanie pomiarów w algebraicznych strukturach rozmytych, Prace Naukowe, Fizyka, z.55, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2011.
- [22] Zieliński R., Siedem wykładów wprowadzających do statystyki matematycznej, <http://www.impan.pl/~rziel/7ALL.pdf>
- [23] Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik., Główny Urząd Miar, Warszawa, 1999. dokument angielski: <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>
- [24] <http://www.iso.org/iso/home.html>
- [25] <http://www.bipm.org/>