Katarzyna Grebieszkow

Obliczanie niepewności pomiarów

na podstawie

Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)

Cytując za *Bureau International des Poids et Measures (BIPM)* już w roku 1979 *"almost all [laboratories] believed that is was important to arrive at an internationally accepted procedure for expressing measurement uncertainty and for combining individual uncertainty components into a single total uncertainty*

Luty 2015, Wydział Fizyki PW, Laboratorium Fizyki I

W 1995 roku Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna czyli *International Organization for Standardization (ISO)* opublikowała *„Guide to the expression of uncertainty in measurement” (GUM)* - dokument opisujący jak obliczać i wyrażać niepewności pomiarów.

Pomiar każdej wielkości fizycznej dokonywany jest ze skończoną dokładnością czyli tzw. **niepewnością pomiarową**. Przyczyny niepewności pomiarowych:

1) niedoskonałość przyrządów pomiarowych (rozdzielczość aparatury określona przez producenta lub oszacowana na podstawie najmniejszej podziałki)
2) niedokładność odczytu ze skali (mierniki analogowe, suwmiarki, śruby mikrometryczne, etc.)
3) przypadkowy stan układu w trakcie wykonywania pomiaru, niereprezentatywne pomiary
4) wpływ procesu pomiarowego na mierzoną wielkość, etc.

Różnice między podstawowymi pojęciami:

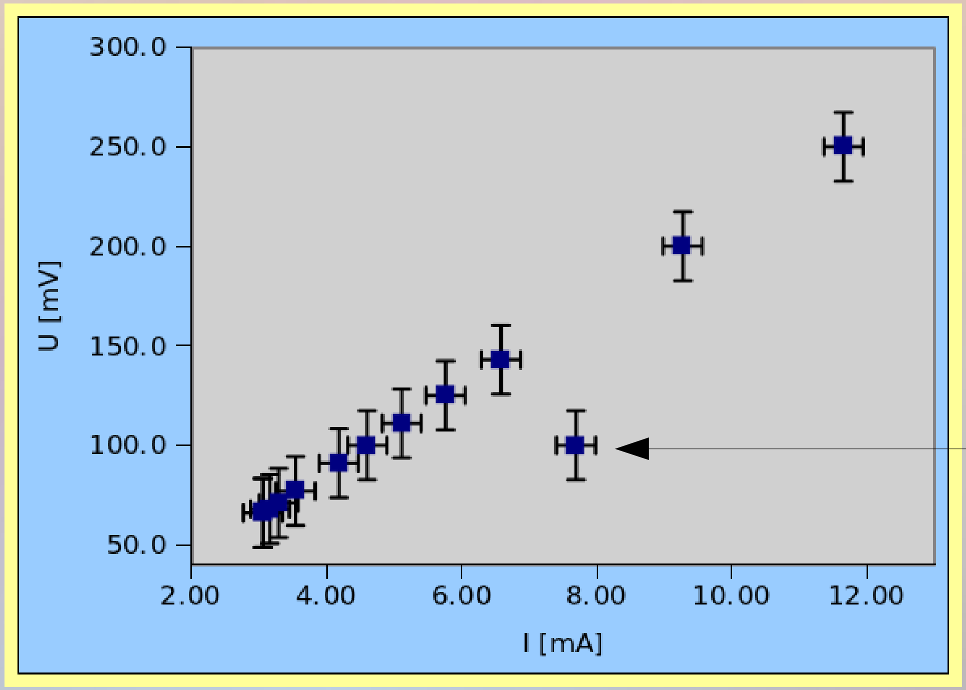
niepewność pomiaru – miara dokładności wykonywanego pomiaru (wielkość mierzalna)
błąd pomiaru – różnica między wartością zmierzoną a hipotetyczną wartością *prawdziwą* czyli taką jaką otrzymalibyśmy (ale jej nie znamy!) z idealnego pomiaru (dokładna wielkość nieznana i niemierzalna)
błąd gruby – pomyłka (pomiar do odrzucenia)

Przykłady błędów grubych (pomyłek)

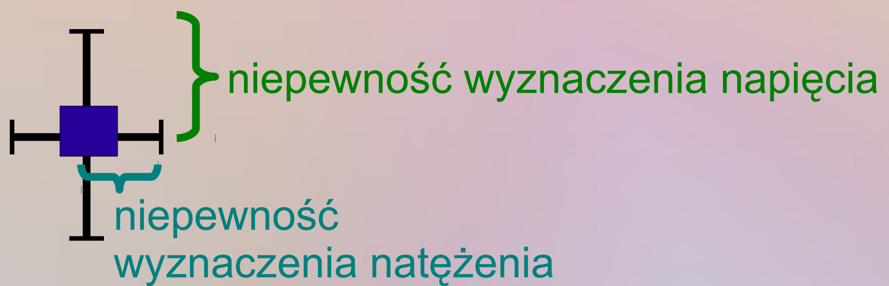
Przykład 1: pomiar średnicy metalowego pręta [mm]
kolejne pomiary:
10.02, 10.04, 10.03, 10.02, 10.02, 10.03, ~~10.24~~, 10.03, 10.05, …

10.24 – błąd gruby (pomyłka); pomiar taki należy usunąć z dalszych analiz (liczenia średniej i standardowego odchylenia średniej czyli miary niepewności wartości średniej)

Przykład 2: jednoczesny pomiar napięcia i natężenia prądu



Graficzne przedstawienie punktów na wykresie:



Błąd gruby (pomyłka), punkt usuwamy (po uprzednim komentarzu !) z analiz bo zaburzyłby np. wyznaczanie współczynnika proporcjonalności prostej

Niepewność pomiaru (*uncertainty*) - parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut (dyspersję) wartości, które w sposób uzasadniony można przypisać mierzonej wielkości.

Niepewność standardowa (*standard uncertainty*) (tutaj oznaczona jako u_x, w GUM jako u(x) ale należy pamiętać, że jest to liczba a nie funkcja!) – niepewność pomiaru wyrażona jako niepewność standardowa (*standard deviation*) (np. odchylenie standardowe średniej).

Wyznaczanie niepewności metodą typu A (*type A evaluation of uncertainty*) - metoda obliczania niepewności pomiaru oparta o statystyczną analizę serii wyników pomiarów. Metoda ta może być oparta o każdą poprawną metodę statystycznej analizy danych. Przykłady: obliczenie standardowego odchylenia średniej, zastosowanie metody najmniejszych kwadratów w celu dopasowania krzywej do danych i obliczenia parametrów krzywej oraz ich niepewności standardowych.

Wyznaczanie niepewności metodą typu B (*type B evaluation of uncertainty*) - metoda obliczania niepewności pomiaru przy użyciu sposobów innych niż analiza statystyczna serii pomiarów czyli na drodze innej niż metoda typu A. Ten rodzaj obliczania (a raczej oszacowania!) niepewności jest zwykle oparty o naukowy osąd badacza biorącego pod uwagę wszystkie dostępne informacje, które mogą zawierać: rezultaty poprzednich pomiarów, doświadczenie i wiedzę na temat zachowania i własności przyrządów i badanych materiałów, informacje producenta na temat własności i dokładności mierników, etc.

Niepewności w pomiarach bezpośrednich
(liczone metodą typu A, liczone metodą typu B oraz niepewności całkowite)

Typ A Przykład z pomiarem wzrostu studentów. Mamy serię pomiarów, nie interesuje nas (lub nie wiemy) jakim przyrządem dokonywany był każdy pojedynczy pomiar. Kolejne pomiary [cm]: 176.2, 176.2, 177.4, 173.1, 170.3, 173.2, 176.6, 173.2, 174.5, 176.5, 174.2, 184.0, 168.6, 171.1, 174.1, 167.3, 183.2, … (3000 tego typu pomiarów)

średnia arytmetyczna: $x \equiv \bar{x} = \dfrac{1}{3000}\sum_{i=1}^{3000} x_i = 175.070\,[\mathrm{cm}]$

Odchylenie standardowe rozkładu $s_x = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{(N-1)}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{3000}(x_i-\bar{x})^2}{(3000-1)}} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2999}\left[(176.2-175.07)^2+(176.2-175.07)^2+(177.4-175.07)^2+\ldots\right]} = 5.06 \quad [\mathrm{cm}]$$

Odchylenie standardowe średniej (niepewność średniej):

$$u_x(\text{typ A}) \equiv s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3000}(x_i-\bar{x})^2}{3000\cdot(3000-1)}} = 0.092 \quad [\mathrm{cm}]$$

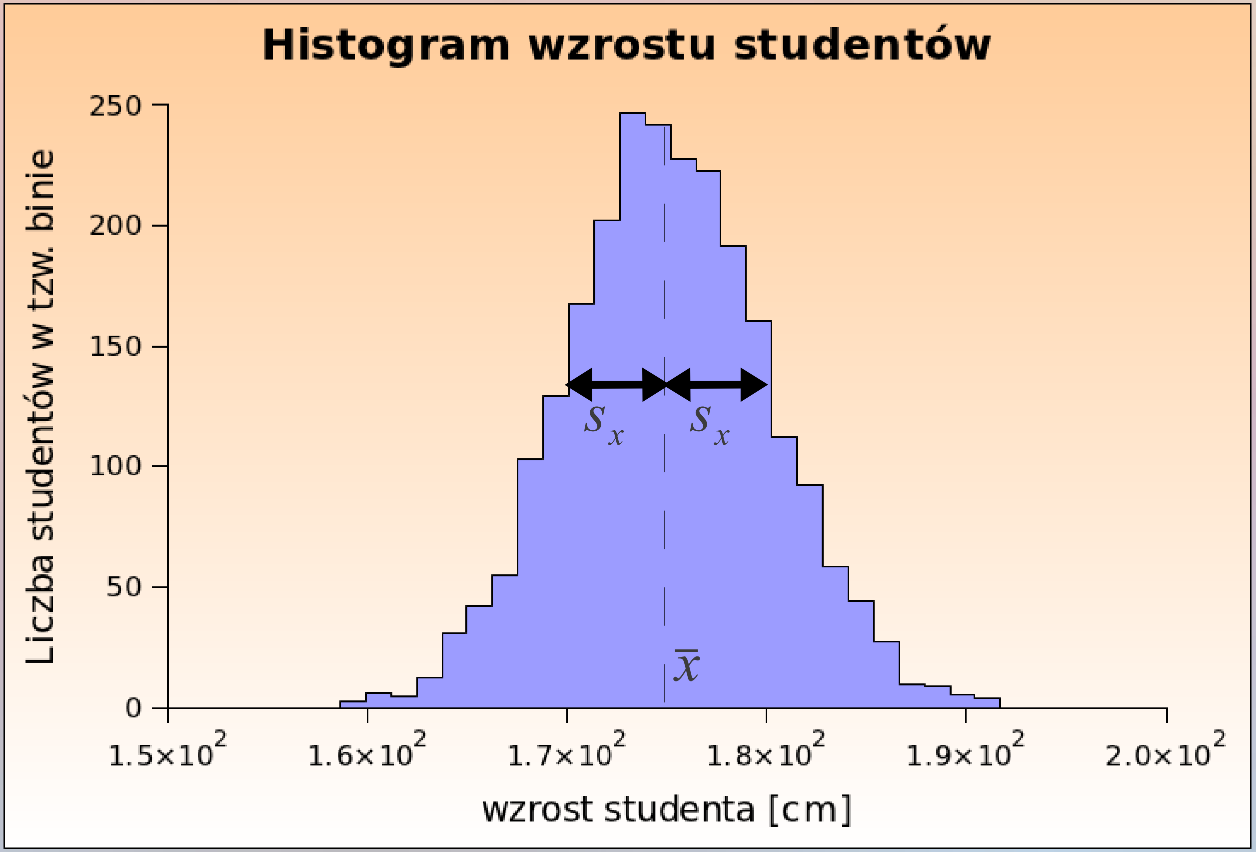
← przykład obliczania niepewności metodą typu A; stosowane do serii pomiarów kiedy rozkład prawdopodobieństwa x_i jest dany rozkładem Gaussa

Interpretacja:

s_x – jest miarą szerokości rozkładu (miara rozrzutu wzrostu pojedynczych studentów wokół wartości średniej); dawnej zwane niepewnością pojedynczego pomiaru (uwaga: określenie może być mylące)

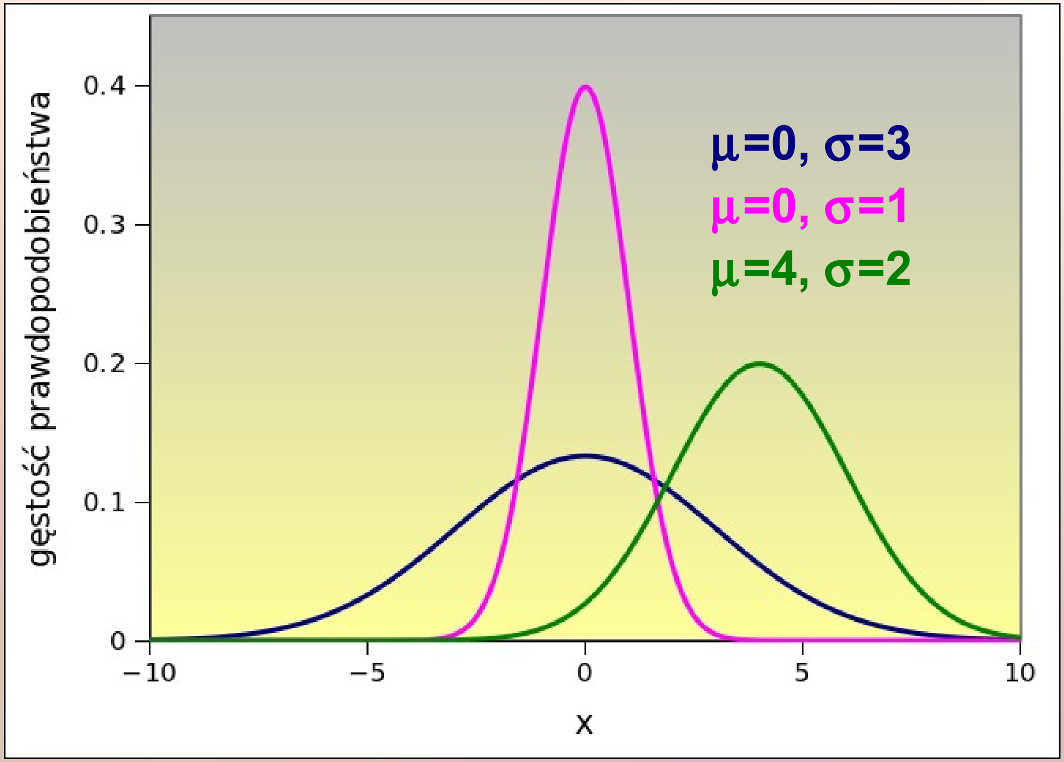
$s_{\bar{x}}$ - miara niepewności wartości średniej (jak średnia mogłaby się różnić od wartości oczekiwanej czyli takiej jaką uzyskalibyśmy z idealnego rozkładu Gaussa/rozkładu dla nieskończonej ilości studentów)

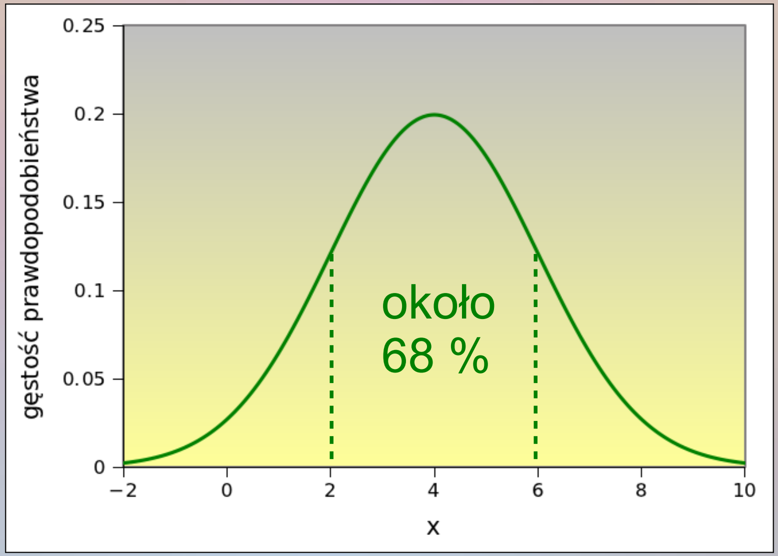
Odchylenie standardowe (s_x) jest <u>estymatorem</u> dyspersji (σ) a średnia jest estymatorem wartości oczekiwanej (μ).
Parametry σ oraz μ (+ ew. normalizacja) to dwa parametry które jednoznacznie opisują rozkład Gaussa



Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa (zwany również rozkładem normalnym)

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



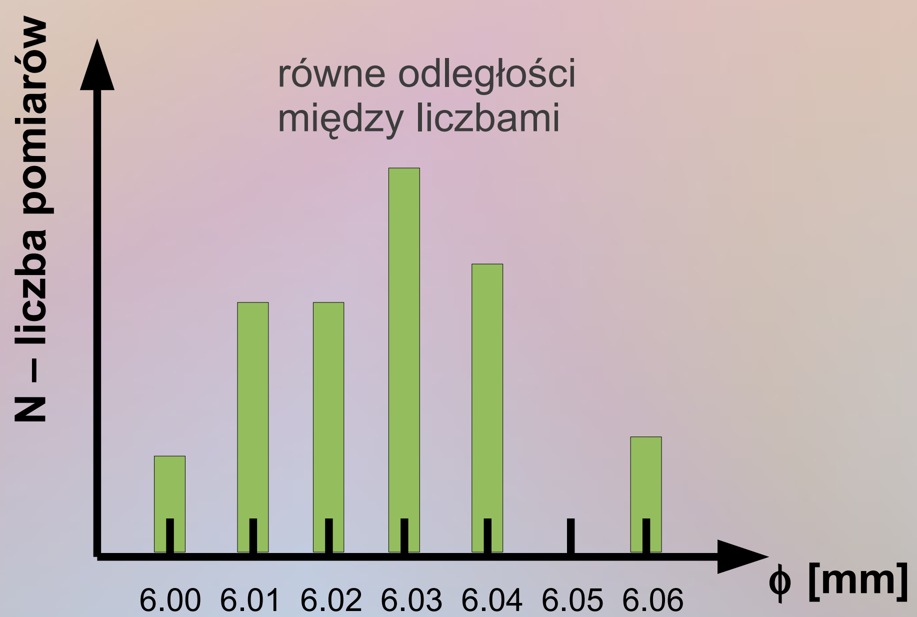


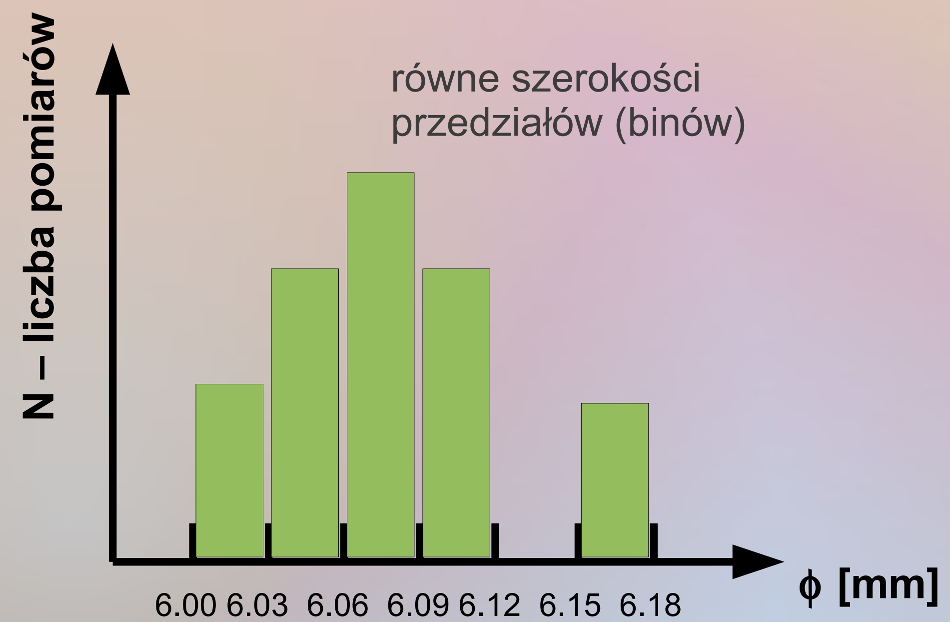
W zakresie od $\mu-\sigma$ do $\mu+\sigma$ jest 68.3% rozkładu
W zakresie od $\mu-2\sigma$ do $\mu+2\sigma$ jest 95.5% rozkładu
W zakresie od $\mu-3\sigma$ do $\mu+3\sigma$ jest 99.7% rozkładu

Uzupełnienie: graficzna prezentacja wyników wielokrotnych pomiarów (np. tej samej wielkości) czyli **jak zrobić histogram** na przykładzie pomiaru grubości metalowego pręta. Mamy wiele (np. 100) pomiarów średnicy pręta.

1. Pręt jest bardzo równy, wartości różnią się między sobą niewiele (Rys. lewy).
6.02, 6.02, 6.03, 6.02, 6.02, 6.03, 6.04, 6.04, 6.02, 6.03, 6.03, ...

2. Pręt jest dość niestarannie wykonany. Duże różnice między poszczególnymi pomiarami (Rys. prawy).
6.02, 6.07, 6.08, 6.01, 6.16, 6.05, 6.07, 6.06, 6.00, 6.09, 6.05, 6.17...





Czyli przedziały (biny) 6.00-6.03, 6.03-6.06, 6.06-6.09, itd.

Typ B Przykład z pomiarem wzrostu studentów – kontynuacja. Dowiedzieliśmy się jakim przyrządem dokonywany był każdy pojedynczy pomiar. Najmniejsza podziałka była Δx=0.1 cm (centymetr krawiecki).

$$u_x(\text{typ B}) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

lub

$$u_x(\text{typ B}) = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}}$$

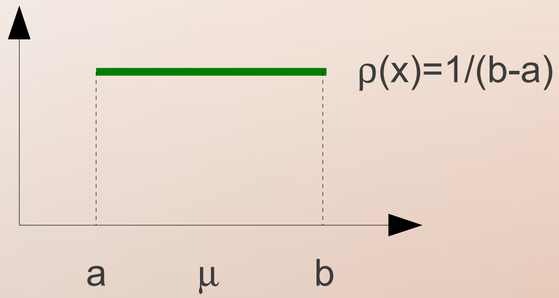
← najbardziej popularny <u>przykład</u> wyznaczania niepewności typu B; tutaj rozkład prawdopodobieństwa x_i jest dany płaskim (prostokątnym) rozkładem

Δx – nazywane czasami **niepewnością wzorcowania** lub (przed GUM) błędem granicznym. Z powodu skończonej rozdzielczości użytych przyrządów/mierników. Przeważnie jako **<u>maksymalną</u> wartość Δx bierzemy najmniejszą podziałkę przyrządu**. Czasami mamy dodatkowo:

Δx_E – **niepewność eksperymentatora** przy odczytywaniu wartości na miernikach analogowych (woltomierze/amperomierze wychyłowe, metrówki, suwmiarki, śruby mikrometryczne, wagi, etc., wiąże się z tzw. „błędem paralaksy”). Δx_E może być zaniedbana jeśli wierzymy, że jesteśmy w stanie odczytać wynik bardzo dokładnie. W <u>większości</u> przypadków jako **<u>minimalną</u> wartość Δx_E bierzemy Δx_E = ½ Δx.** Uwaga: wyjątkiem jest np. pomiar stoperem gdzie oszacowane Δt_E >> Δt oraz pomiar przy użyciu noniusza gdzie warto przyjąć **Δx_E = 1-2 Δx.** W razie jakichkolwiek wątpliwości konsultujemy się z prowadzącym ćwiczenie!

Skąd ten pierwiastek z 3?

Gęstość prawdopodobieństwa ρ(x) rozkładu płaskiego (prostokątnego):



Wartość oczekiwana $\mu = (a+b) / 2$;

Wariancja: $Var = (b-a)^2 / 12$

Jeśli $a= -\Delta x$ oraz $b=\Delta x$ => $Var =(\Delta x)^2/3$

ostatecznie: odchylenie standardowe $u_x = \sqrt{Var}$

W rozkładzie tym zakładamy, że prawdopodobieństwo otrzymania wartości mierzonej (np. wzrost studenta) w przedziale od $-\Delta x$ do Δx jest takie samo oraz równe zero poza tym przedziałem.

Uwzględniając zarówno niepewność typu A jak i B (przykład ze wzrostem studenta) mamy **niepewność całkowitą (A i B) pomiaru bezpośredniego:**

$$u_x(\text{całkowita}) = \sqrt{u_x^2(\text{typ A}) + u_x^2(\text{typ B})} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}}$$

W naszym przykładzie: $$u_x(\text{całkowita}) = \sqrt{0.092^2 + \frac{(0.1)^2}{3} + \frac{(0.05)^2}{3}} = 0.11$$

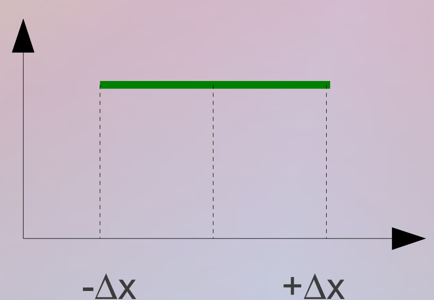
Odpowiedź końcowa: **średni wzrost studenta wynosi 175.07 cm a niepewność tej wartości to 0.11 cm.**

Uwaga: oba typy wyznaczania niepewności **(typ A oraz B) są** podobne i **oparte o rozkłady prawdopodobieństw. Składowe niepewności,** będące rezultatem obu typów obliczeń, **są określane poprzez** wariancje lub **odchylenia standardowe.**

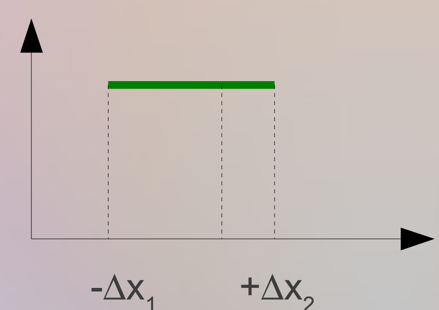
Typ A niepewność standardowa otrzymywana jest z **funkcji gęstości prawdopodobieństwa** (*probability density function, PDF*) pochodzącej z **obserwowanego rozkładu częstości** (rozkład statystyczny wyników serii pomiarów).

Typ B niepewność standardowa jest otrzymana z **<u>założonej</u> funkcji gęstości prawdopodobieństwa** w oparciu o doświadczenie lub inne informacje (często nazywane jest to subiektywnym prawdopodobieństwem).

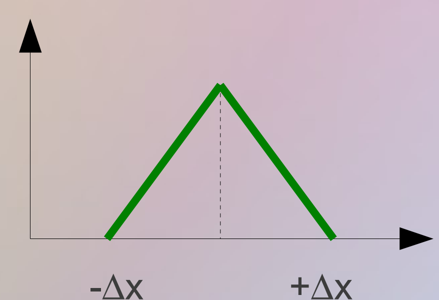
Przykłady (zob. GUM dla rozkładów w kształcie trapezu, etc.):



Najbardziej popularny
rozkład prostokątny
odchylenie std. $u_x = \Delta x/\sqrt{3}$



rozważane są również
rozkłady asymetryczne –
zob. GUM F.2.4.4 i G.5.3



rozkład trójkątny
odchylenie std. $u_x = \Delta x/\sqrt{6}$

Przykładowe niepewności wzorcowania oraz niepewności standardowe **(typ B)** przy pojedynczym pomiarze popularnymi przyrządami pomiarowymi

1. Linijka, metrówka, centymetr krawiecki

$\Delta x = 1$ mm (maksymalna wartość), $\Delta x_E = 0.5$ mm (minimalna wartość)

$u_x = 0.58$ mm (jeśli uwzględnić tylko Δx) lub $u_x = 0.65$ mm (jeśli uwzględnić zarówno Δx jaki i Δx_E)

2. Śruba mikrometryczna

$\Delta x = 0.01$ mm, $\Delta x_E = 0.005$ mm

3. Przykładowa waga analityczna

$\Delta m = 0.1$mg, $\Delta m_E = 0.05$ mg

4. Przykładowy stoper (cyfrowy)

$\Delta t = 0.01$ s, przyjęte minimalne $\Delta t_E = 0.5$ s

(0.2-0.3 s to typowy refleks człowieka;
refleksem trzeba wykazać się zwykle dwa razy:
włączenie i wyłączenie stopera)

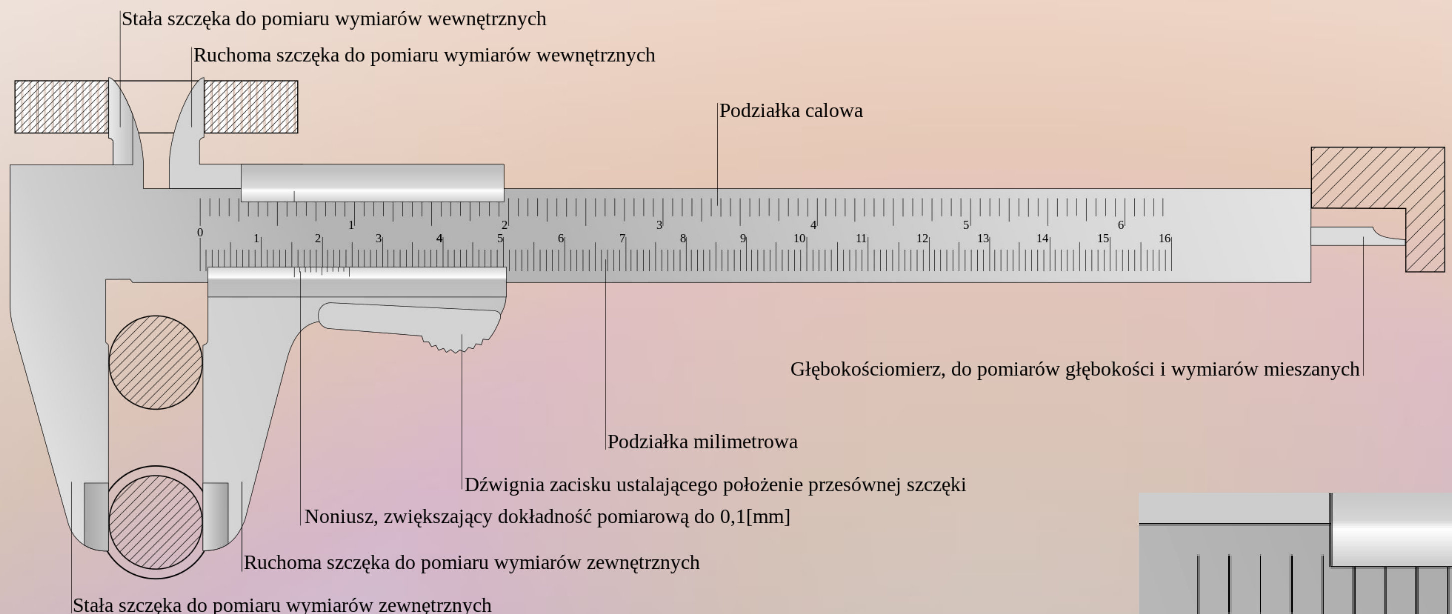
5. Przykładowy stoper (analogowy)

$\Delta t = 0.2$ s, przyjęte minimalne $\Delta t_E = 0.5$ s

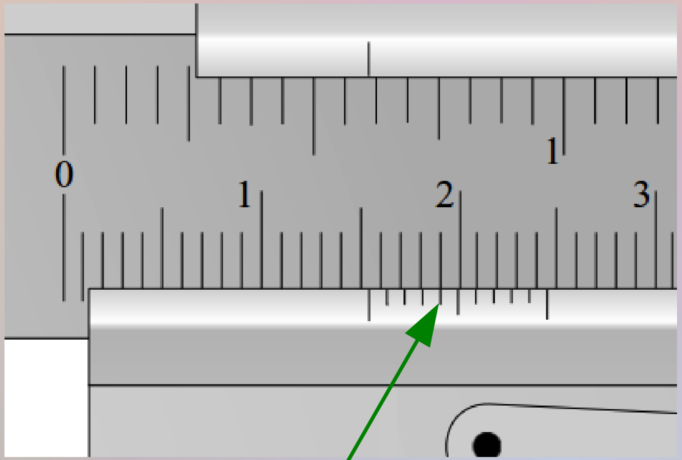
6. Przykładowa suwmiarka

(pomiar z **<u>noniuszem</u>**)

$\Delta x = 0.1$ mm, minimalne Δx_E można tutaj przyjąć jako równe 1-2 Δx czyli 0.1-0.2 mm



Uwaga: dokładniejsza suwmiarka to np. taka gdzie $\Delta x = 0.05$ mm a noniusz ma 20 zamiast 10 podziałek. W takiej można przyjąć minimalne $\Delta x_E = 2\ \Delta x = 0.1$ mm.



Odczyt 15.4 mm
(15 mm na prowadnicy z podziałką milimetrową oraz 0.4 mm na noniuszu)

Rys. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Suwmiarka.svg

7. Woltomierze, amperomierze wychyłowe

ΔI = klasa * zakres /100

ΔU = klasa * zakres /100

(ΔU_E , ΔI_E można przyjąć jako ½ najmniejszej podziałki)

Przykłady:

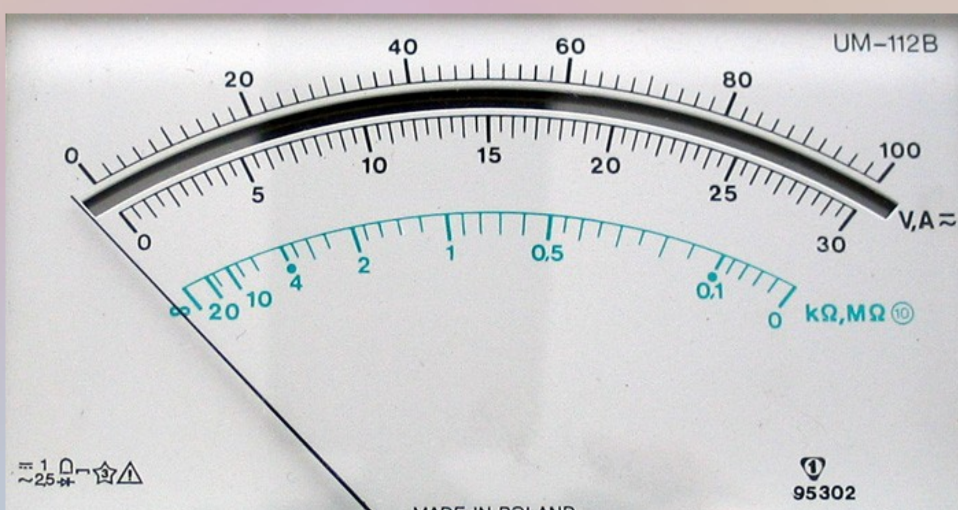
pomiar 22.5 V na zakresie 30V, ΔU=1*30V/100 = 0.3 V

pomiar 16.0 V na zakresie 30V, ΔU=1*30V/100 = 0.3 V

pomiar 6 V na zakresie 10V, ΔU=1*10V/100 = 0.1 V

Niepewność wzorcowania dla mierników wychyłowych NIE zależy od wartości mierzonej a zależy jedynie od klasy miernika oraz wybranego zakresu.

Zakres ustawiamy pokrętłem



Na zakresach 0.1, 1, 10, 100, etc. odczytujemy z górnej skali.
Przykład: na zakresie 10V wskaźnik w połowie skali oznacza 5V a nie 50V !

Na zakresach 0.3, 3, 30, 300, etc. odczytujemy z dolnej skali.

8. Woltomierze, amperomierze cyfrowe

Niepewność wzorcowania dla mierników cyfrowych zależy zarówno od zakresu jak i od wartości zmierzonej. Potrzebujemy tabliczek ze specyfikacją dołączonych do miernika (przy stanowiskach pomiarowych).

Przykładowy pomiar:

Zakres 2A, DCA (prąd stały), odczyt na mierniku: 0.800 (A).

Uwaga: spisujemy wszystkie widoczne cyfry, nawet jeśli na końcu są zera! Nie notujemy 0.8 A tylko 0.800 A. Będzie to potrzebne do liczenia niepewności.

Zgodnie z tabliczką producenta, na zakresie 2A (DCA):

$\Delta I = 1.2\% * rdg + 1\ dgt = 1.2/100 * 0.800A + 1 * 0.001A$
$= 0.0106\ A$

$u_I = \Delta I/\sqrt{3} = 0.006\ A$

Inny przykład:

Zakres 200 mV, DCV (napięcie stałe),
odczyt na mierniku: 66.3 mV.

Zgodnie z tabliczką producenta, na zakresie 200 mV (DVC):

$\Delta U = 0.3\% * rdg + 1\ dgt = 0.3/100 * 66.3mV + 1* 0.1mV$
$= 0.299\ mV$

$u_U = \Delta U/\sqrt{3} = 0.17\ mV \approx 0.2\ mV$

Niepewności w pomiarach pośrednich
(niepewność złożona)

Niepewność standardowa złożona (*combined standard uncertainty*) czyli propagacja niepewności

Mamy wielkość y, która jest kombinacją **niezależnie (!)** mierzonych a, b oraz c, gdzie a, b i c są mierzone z **całkowitymi (!)** (typ A oraz / lub typ B) niepewnościami u_a, u_b i u_c. Dla takiego przypadku **niepewność złożona u_y** (w GUM oznaczona jako $u_c(y)$) może być obliczona z **prawa propagacji niepewności** (*law of propagation of uncertainty*).

$$y = f(a, b, c)$$

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 u_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 u_c^2}$$

Kiedy pomiary wielkości a, b i c są skorelowane powyższa formuła musi być zmodyfikowana. W szczególności trzeba liczyć macierz kowariancji (zob. GUM 5.2).

Przykłady zastosowań (zob. też obliczenia na kolejnych slajdach):
1. Pomiar oporu R na podstawie bezpośrednich pomiarów napięcia oraz natężenia prądu R = f(U, I) czyli R = U/I
2. Pomiar przyspieszenia ziemskiego z pomiaru okresu drgań wahadła matematycznego oraz długości wahadła $g = f(L, T)$ czyli $g = 4\pi^2 L / T^2$

Prawidłowy zapis niepewności

Dwie bardzo ważne zasady

1. Zarówno **wartość** jak **i jej niepewność powinny być podane z tą samą dokładnością** (precyzją):
$L = 50.000$ cm, $u_L = 0.065$ cm

nawet jeśli są wyrażone w innych jednostkach:
$L = 50.000$ cm, $u_L = 0.65$ mm

2. **Niepewności mogą mieć <u>maksymalnie</u> 2 cyfry znaczące** (cyfry z wyjątkiem zer na początku). Pomimo tego w niektórych przypadkach może być konieczne zachowanie dodatkowych cyfr żeby uniknąć błędów związanych z zaokrąglaniem przy dalszych obliczeniach.

Wniosek: zapis wartości wraz z niepewnością zaczynamy od ustalenia dokładności zapisu niepewności.

Przykład: pomiar objętości $V = 247.2872225636\ m^3$, a niepewność wyniosła:
$u_V = 0.00589256\ m^3$. Tu w niepewności mamy 8 cyfr po przecinku ale tylko 6 cyfr znaczących z których możemy zachować maksymalnie dwie. Czyli:
$V = 247.2872\ m^3$, $u_V = 0.0059\ m^3$ lub
$V = 247.287\ m^3$, $u_V = 0.006\ m^3$

Prawidłowy zapis wartości z niepewnością (złożoną) <u>standardową</u>

H = 50.000 cm, u_H = 0.076 cm lub H = 50.000 cm, u_H = 0.76 mm

H = 50.000 (76) cm ← szeroko używany w publ. naukowych, katalogach, tabelach, etc.

H = 50.000 (0.076) cm

H = (50.000 ± 0.076) cm ← zapis formalnie dozwolony ale NIE polecany przez GUM (proponujemy studentom nie używać go!) ponieważ może być mylony z niepewnością rozszerzoną (zob. następna strona). GUM przypomina, że znak ± powinien być używany do oznaczenia przedziału odpowiadającego wysokiemu poziomowi zaufania.

Jeśli chcemy podać tylko jedną cyfrę znaczącą w niepewności to przykładowe zapisy:

H = 50.00 cm, u_H = 0.08 cm lub H = 50.00 cm, u_H = 0.8 mm

H = 50.00 (8) cm

H = 50.00 (0.08) cm

W większości przypadków (w tym pracownia studencka, praca naukowa, etc.) **wystarczy podać mierzoną wartość oraz jej (złożoną) niepewność <u>standardową</u>**, typowo używając zapisu **x (u_x) [jednostka]**. Jednak w przypadku niektórych zastosowań może być potrzebne podanie dodatkowo niepewności <u>rozszerzonej</u>.

↓

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) (tutaj oznaczana jako U_x, in GUM jako U) - wielkość określająca rozmiar przedziału wokół wyniku pomiaru, o której wiadomo, że pokrywa duży procent rozkładu wartości, które mogą być rozsądnie przypisane do wielkości mierzonej. Niepewność ta jest używana do porównań wyników z wynikami innych eksperymentów, z wartościami tablicowymi, etc. Jest również używana do celów komercyjnych oraz do określania norm przemysłowych, zdrowotnych bezpieczeństwa, etc.

$\mathbf{U_x = k\, u_x}$ k – współczynnik rozszerzenia (*coverage factor*)

Wybór współczynnika k, który jest zwykle w zakresie **2 < k < 3**, jest oparty prawdopodobieństwo pokrycia (*coverage probability*) lub poziom zaufania (*level of confidence*) (oznaczone jako p) wymaganego dla interwału $x - U_x$ do $x + U_x$. **W większości przypadków (w tym laboratoria studenckie) zaleca się używanie k = 2.**

Zalecenie GUM: **współczynnik rozszerzenia k powinien zawsze być podany** po to, żeby odtworzyć niepewność standardową w razie jeśli byłaby potrzeba dalszego jej użycia w obliczeniach złożonej niepewności standardowej innej wielkości.

Wartość k = 2 określa prawdopodobieństwo znalezienia wartości *prawdziwej* wewnątrz przedziału $x \pm U_x$ jako równe 95.5% (w przypadku niepewności typu A) lub 100% (dla niepewności typu B). W rzeczywistości, w przypadku niepewności typu B, p = 100% jest osiągane już dla $k = \sqrt{3} = 1.73$ i dlatego przy pojedynczym, bezpośrednim pomiarze z niepewnością typu B nie ma żadnego sensu używanie k > 1.73 przy określaniu niepewności rozszerzonej.

Zalecenie GUM: **O ile tylko jest to możliwe, p** (*coverage probability* / *level of confidence*) **związane z przedziałem zdefiniowanym przez U_x powinno być oszacowane i podane.** Jednak może to okazać się trudne ponieważ wymaga szczegółowej wiedzy na temat funkcji gęstości prawdopodobieństwa PDF (skomplikowane jeśli mamy np. zarówno niepewności typu A jak i B wnoszące wkład do niepewności złożonej; na początek należałoby zrobić splot funkcji prawdopodobieństw).

Cały Aneks G w GUM opisuje jak wybrać współczynnik k, który daje przedział mający poziom zaufania p bliski określonej przez nas wartości. Jednak **dla wielu praktycznych pomiarów w wielu dziedzinach,** gdy niepewności standardowe $u_{x,i}$ (które mogą być otrzymane zarówno z analizy typu A jak i B) wnoszą podobnej wielkości przyczynki do **złożonej niepewności standardowej** możemy (z pomocą Centralnego Twierdzenia Granicznego):

1. przyjąć k=2 i założyć że p ≈ 95%

2. przyjąć k=3 i założyć że p ≈ 99%

Prawidłowy zapis wartości z niepewnością rozszerzoną

I Pojedynczy pomiar długości $L = 20$ cm, rozdzielczość: ΔL (maks.) = 1 mm, w tym przykładzie (celowo!) zaniedbujemy niepewność eksperymentatora.

Niepewność standardowa (typ B): $u_L = \Delta L/\sqrt{3} = 0.058$ cm.
Zapis wartości z niepewnością standardową byłby: $L = 20.000\ (0.058)$ cm

Przykłady zapisu z niepewnościami rozszerzonymi U_L:

1. $U_L = 0.1$ cm (dla $k=1.73$) (dla pojedynczego pomiaru z niepewnością typu B, czyli PDF prostokątny, nie ma sensu używanie $k > \sqrt{3}$)

Zapis: **$L = (20.0 \pm 0.1)$ cm ($k=1.73$)**, ale jeśli możliwe powinniśmy podać również **p (tutaj 100%),** sposób w jaki k było wybrane (na przykład: PDF normalny / **PDF prostokątny**), liczba stopni swobody **ν** (szczegóły w Aneksie G), itp.

2. **$L = (20.000 \pm 0.096)$ cm ($k=1.65$), $p=95\%$, PDF prostokątny**

3. **$L = (20.000 \pm 0.099)$ cm ($k=1.71$), $p=99\%$, PDF prostokątny**

Prawidłowy zapis wartości z niepewnością rozszerzoną

II Wielokrotny pomiar czasu ze średnią 25 sekund i niepewnością standardową 1.3 sekundy (niepewność była typu A czyli odchylenie standardowe średniej), nic nie wiemy na temat dokładności stopera i niepewności eksperymentatora.

Zapis wartości z niepewnością standardową byłby: t = 25.0 (1.3) s

Przykłady zapisu z niepewnościami rozszerzonymi U_L:

1. **t = (25.0 ± 2.6) s (k=2), p=95.5%, PDF normalny**
2. **t = (25.0 ± 3.9) s (k=3), p=99.7%, PDF normalny**

III. Pośredni pomiar koncentracji nośników w półprzewodniku (do niepewności złożonej wchodziły niepewność wyznaczenia parametru prostej – typ A, niepewność wyznaczenia pola magnetycznego – typ B, niepewności wyz. grubości płytki – typ B)

$n = 2.35 \times 10^{20}\ 1/m^3$, $u_n = 0.21 \times 10^{20}\ 1/m^3$

Zapis wartości z niepewnością standardową byłby: $n = 2.35\ (0.21) \times 10^{20}\ 1/m^3$

Przykłady zapisu z niepewnościami rozszerzonymi U_L:

1. $\mathbf{n = (2.35 \pm 0.42) \times 10^{20}\ 1/m^3\ \ (k=2),\ p \approx 95\%}$
2. $\mathbf{n = (2.35 \pm 0.63) \times 10^{20}\ 1/m^3\ \ (k=3),\ p \approx 99\%}$

Więcej przykładów

Przykład 1 (obliczanie niepewności metodami typu A i B):
50 pomiarów średnicy (x) ołówka przy użyciu śruby mikrometrycznej (rozdzielczość śruby daje maksymalnie $\Delta x = 0.01$ mm, oszacowana niepewność eksperymentatora w czasie odczytywania jest minimalnie $\Delta x_E = 0.005$ mm).

Pomiary [mm]: 6.25, 6.25, 6.27, 6.22, 6.23, 6.23, ... (50 pomiarów)

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = 6.26\,[\mathrm{mm}]$$

niepewności standardowe / odchylenia:

$$u_x(\text{typ A}) \equiv s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2}{50\cdot(50-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2450}\left[(6.25-6.26)^2 + (6.25-6.26)^2 + (6.27-6.26)^2 + \ldots\right]} = 0.0028 \quad [\mathrm{mm}]$$

$$u_x(\text{całkowita}) = \sqrt{u_x^2(\text{typ A}) + \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_E}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0.0028^2 + 0.0058^2 + 0.0029^2} = 0.0071 \quad [\mathrm{mm}]$$

Przykłady zapisu końcowego:
x = 6.260 (0.007) mm lub
x = 6.260 (7) mm lub
x = (6.260 ± 0.014) mm (k=2)

Przykład 2 (niepewności typu B, niepewność złożona):
Wyznaczanie oporu R (R=U/I).
Zmierzyliśmy (tylko raz):

U = 26 V przy użyciu miernika analogowego (zakres 0-30V; klasa miernika: 1)
ΔU = klasa x zakres /100 = 1/100 x 30 V = 0.3 V
ΔU_E= pół podziałki = ½ x 0.5 V = 0.25 V

I = 0.825 A miernik cyfrowy (zakres 2A; dla tego zakresu ΔI =1.2% x rdg + 1 dgt)
ΔI = 1.2% x 0.825 A + 1 x 0.001 A = 0.0109 A

Niepewności standardowe (odchylenia) typu B:
$u_U = [(\Delta U/\sqrt{3})^2 + (\Delta U_E/\sqrt{3})^2]^{1/2} = 0.225$ V => U = 26.00 (0.23) V
$u_I = \Delta I/\sqrt{3} = 0.00629$ A => I = 0.825 (0.006) A

niepewność złożona $u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u_I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{-U}{I^2}\right)^2 u_I^2} = 0.364\,\Omega$

R = 31.51 (0.36) Ω lub
R = 31.51 (36) Ω lub
R = (31.51 ± 0.72) Ω (k=2), lub (31.51 ± 0.73) zachowując cyfry z u_R, etc.

Przykład 3 (niepewność typu B, niepewność złożona):
Pomiar stałej siatki dyfrakcyjnej (d). Wykonano jednokrotny pomiar położenia widma I rzędu w siatce dyfrakcyjnej oświetlonej światłem o długości fali
λ = 589 nm. Otrzymano kąt ugięcia $\Theta_1 = 11^0 35'$ z niepewnością pomiarową (niepewność wzorcowania – czyli typu B; brak informacji o niepewności eksperymentatora) $\Delta\Theta_1 = 10'$ (uwaga – trzeba stopnie zamienić na radiany). Czyli Θ_1 = 0.2022 radianów (w programach typu Excell/Gnumeric jest to =RADIANS(11+35/60). $\Delta\Theta_1$ = 0.0029 radianów.

$$\sin\Theta_k = \frac{k\cdot\lambda}{d}$$

$$d = \frac{\lambda}{\sin\Theta_1} = 2933.37\ \mathrm{nm}$$

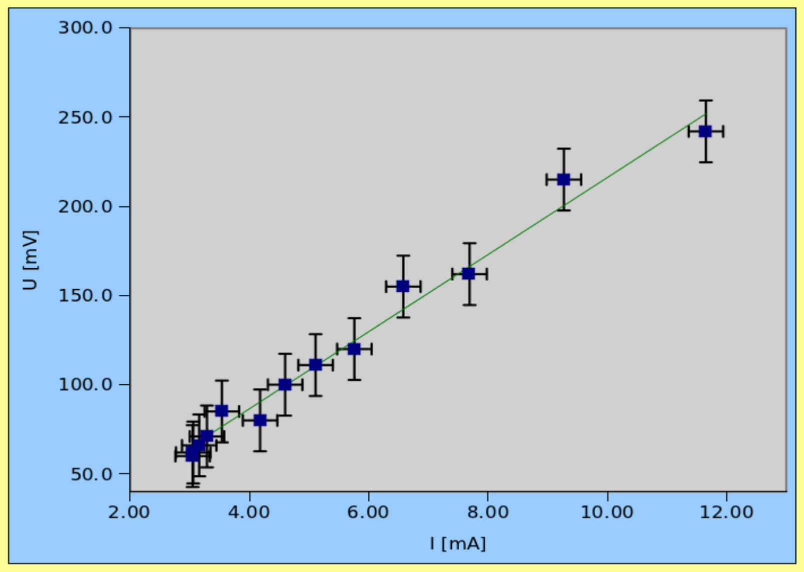
$$u_d = \sqrt{\left(\frac{-\lambda\cos\Theta_1}{\left(\sin\Theta_1\right)^2}\right)^2 \cdot u_{\Theta_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{-\lambda\cos\Theta_1}{\left(\sin\Theta_1\right)^2}\right)^2 \cdot \frac{\Delta\Theta_1^{\ 2}}{3}} = 24.035\ \mathrm{nm}$$

d = 2933 (24) nm lub
d = (2933 ± 48) nm (k=2), etc.
niepewność względna u_d/d*100% = 0.82 % (bardzo dobry pomiar)

Metoda najmniejszych kwadratów
(użyta do wyznaczania parametrów równania prostej oraz niepewności tych parametrów)

Dopasowujemy teorię (model) do danych doświadczalnych.

Mamy punkty (x_i, y_i) np. niezależne pomiary natężenia i napięcia (I_i, U_i) na tym samym oporniku. Niepewności standard. pomiaru pojedynczych natężeń i napięć to u_{Ii} oraz u_{Ui} Wiemy, że punkty powiązane są zależnością funkcyjną: y = f(x, a, b, c, d, e....). W przykładzie (Rys.) z napięciem i natężeniem y = f(x, a) = ax, bo U = RI (parametr a jest tutaj oporem).



Metoda najmniejszych kwadratów pozwala na znalezienie najbardziej prawdopodobnych wartości parametrów a, b, c, d, e, … czyli takich dla których suma kwadratów odchyleń będzie jak najmniejsza, tzn.

$$\boldsymbol{\Sigma^{N}_{i=1} \; [y_i - f(x, a, b, c, d, e, ...)]^2 = \min.}$$

W naszym przykładzie znajdujemy parametr prostej a (wraz z jego niepewnością) który jest tutaj oporem.

Wyznaczanie niepewności parametrów a, b, c, … (oznaczanych jako u_a, $u_{b,}$ u_c, … lub częściej s_a, s_b, s_c, ...) metodą najmniejszych kwadratów to analiza niepewności metodą

typu A

1. Prosta ma postać **y=ax**
Znamy niepewności na y-ach

Mamy danych N punktów x_i oraz $y_i(s_{y_i})$ oznaczanych wcześniej jako $y_i(u_{y_i})$

Współczynnik kierunkowy $a=\bar{a}(s_a)$, gdzie:

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i / s_{y_i}^2)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 / s_{y_i}^2)}$$

$$s_a=\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 / s_{y_i}^2)}}$$

2. Prosta ma postać **y=ax**

Nie znamy niepewności na y-ach (zakładamy więc, że są sobie równe)

Mamy danych N punktów x_i oraz y_i

Współczynnik kierunkowy $a=\bar{a}(s_a)$, gdzie:

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

$$s_a=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{a}x_i)^2}{(N-1)\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}$$

3. Prosta ma postać **y=ax+b**
Znamy niepewności na y-ach

Mamy danych N punktów x_i oraz $y_i(s_{y_i})$ oznaczanych wcześniej jako $y_i(u_{y_i})$

Współczynniki prostej $a=\bar{a}(s_a)$ oraz $b=\bar{b}(s_b)$ wynoszą:
(dla ułatwienia zapisu wprowadzamy oznaczenie $w_i=1/s_{y_i}^2$)

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \sum_{i=1}^{N} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i w_i\right)^2} \qquad \bar{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 \sum_{i=1}^{N} w_i y_i - \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i w_i\right)^2}$$

$$s_a=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i w_i\right)^2}} \qquad s_b=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i w_i\right)^2}}$$

4. Prosta ma postać **y=ax+b**
Nie znamy niepewności na y-ach

Mamy danych N punktów x_i oraz y_i

Współczynniki prostej $a=\bar{a}(s_a)$ oraz $b=\bar{b}(s_b)$ wynoszą:

$$\bar{a}=\frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i-\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad \bar{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i-\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$s_a=\sqrt{\frac{\frac{N}{(N-2)}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{a}x_i-\bar{b})^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}} \qquad s_b=\sqrt{\frac{\frac{1}{(N-2)}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{a}x_i-\bar{b})^2\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}$$

W praktyce często jest tak, że mamy niepewności zarówno na y-ach jak i x-ach. Wtedy, jeśli chcemy zastosować któryś z podanych wzorów, staramy się tak wybrać osie, żeby na x-ach wartości niepewności były mniejsze niż na y-ach.

Parametry prostej typu y=ax+b lub y=ax można uzyskać przy użyciu funkcji LINEST (wersja angielska) lub REGLINP (wersja polska) w programach (arkusze kalkulacyjne) MicroSoft Office, Open Office, Libre Office, **Gnumeric**.

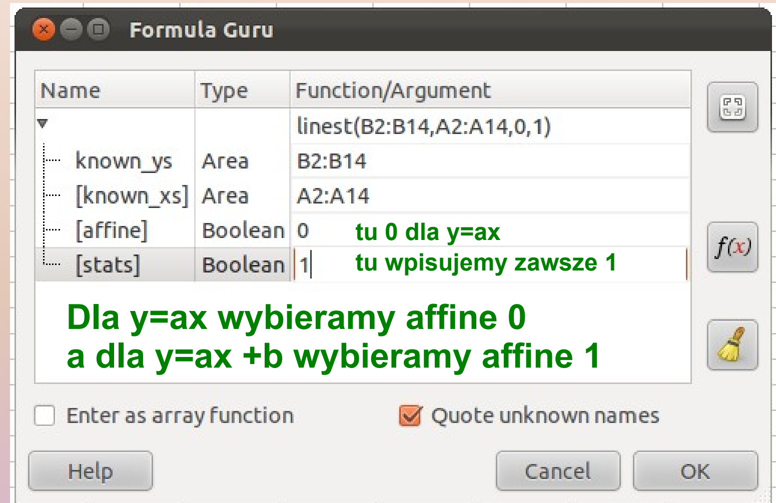
File Edit View Insert Format

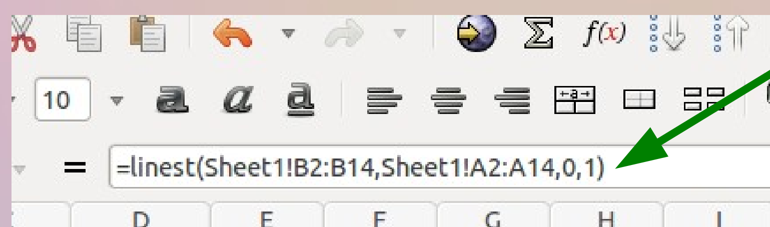
Sans

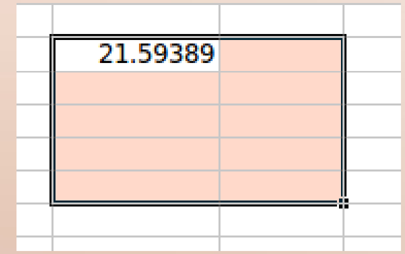
L29

	A	B	C
1	Is [mA]	Uh [mV]	
2	3.05	66.0	
3	3.06	66.0	
4	3.16	68.0	
5	3.29	71.0	
6	3.54	77.0	
7	4.18	91.0	
8	4.60	100.0	
9	5.11	111.0	
10	5.76	125.0	
11	6.58	143.0	
12	7.69	166.0	
13	9.27	200.0	
14	11.65	250.0	
15			

kolumny z danymi







Dostajemy liczbę a; żeby uzyskać pozostałe zaznaczamy obszar 2x5, idziemy do paska narzędzi na koniec formuły i wciskamy Ctrl+Shift+Enter

	H	I	J	K
	parametry dopasowania y=ax+b			
	21.4602	0.89345		
	0.06155	0.37169		
	0.99991	0.57382		
	121549	11		
	40022.4	3.62196		
	parametry dopasowania y=ax			
a	21.5939	0	b	
s_a	0.03116	#N/A	s_b	
	0.99998	0.67851		
	480118	12		
	221032	5.52445		

Uwaga: w funkcji tej nie uwzględniane są niepewności pomiarowe poszczególnych punktów.

Podsumowanie

Przedstawiona metoda obliczania niepewności pomiarów jest:

☺ zunifikowana (wspólny i spójny sposób traktowania obu typu niepewności A oraz B); w obu przypadkach niepewności wyrażane są jako odchylenia standardowe

☺ skutkuje jedną końcową wartością niepewności (w nieco starszym podejściu przeprowadzano oddzielnie analizy dla tzw. niepewności statystycznych i systematycznych i podawano oddzielnie oba typy niepewności); pozwala to na łatwiejsze porównanie wyników między różnymi eksperymentami, nawet jeśli otrzymane zostały w zupełnie różnych warunkach eksperymentalnych

Uwaga na zakończenie:

Guide: *„3.4.8 Although this Guide provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value."*

Na następne zajęcia:

1. Oglądamy jeszcze raz niniejszą prezentację
http://www.if.pw.edu.pl/~puk/niepewnosci_pomiarow.pdf
i czytamy przewodnik na temat liczenia niepewności pomiarów:
http://www.if.pw.edu.pl/~labfiz1p/cmsimple2_4/index.php?Obliczanie_niepewno%B6ci

2. Zapoznajemy się z instrukcją do ćwiczenia 1 (Metody pomiarowe i opracowania wyników w laboratorium fizyki) na stronie (login i hasło podane na zajęciach):
http://clf.if.pw.edu.pl/

3. Przynosimy teczkę na sprawozdania

Przed kolejnymi zajęciami:

1. Robimy sprawozdanie z poprzedniego ćwiczenia
2. Zapoznajemy się z instrukcją do kolejnego ćwiczenia (ich lista dla każdego zespołu powieszona jest przez wejściem do CLF)

GUM: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

Slajdy dodatkowe

Ważne: Błędy (dokładne wartości nieznane i niepoznawalne) $\neq$ **niepewności** (mogą być oszacowane)

Wartość prawdziwa – wartość która mogłaby być otrzymana w idealnym eksperymencie (nie może być wyznaczona).

Błąd (pomiaru) – różnica między wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą. Na przykład **błąd systematyczny** – średnia, która byłaby wynikiem nieskończonej liczby pomiarów odjąć wartość prawdziwa (błąd systematyczny i jego przyczyny nie mogą być całkowicie poznane).

Powinniśmy próbować poprawić nasze wyniki na błędy systematyczne (przynajmniej na rozpoznane efekty). Złożona niepewność standardowa poprawionego wyniku powinna zawierać zarówno niepewność niepoprawionego wyniku jak i niepewność poprawki.

GUM oraz ta prezentacja skupia się na niepewnościach a nie błędach.
☹ Nawet jeśli wyznaczone niepewności są małe, nie mamy żadnej gwarancji że błąd pomiaru też jest mały. Efekt(y) systematyczny(e) mogły zostać pominięte ponieważ nie zostały rozpoznane. Wreszcie, nasze poprawki mogą nie być idealne.

☺ (Poprawiony) wynik pomiaru może być (niepoznawalnie) bardzo blisko wartości prawdziwej (i stąd mieć zaniedbywalny błąd) nawet jeśli ma dużą niepewność.

Niepewność pomiaru nie powinna być mylona z pozostającym nieznanym błędem.

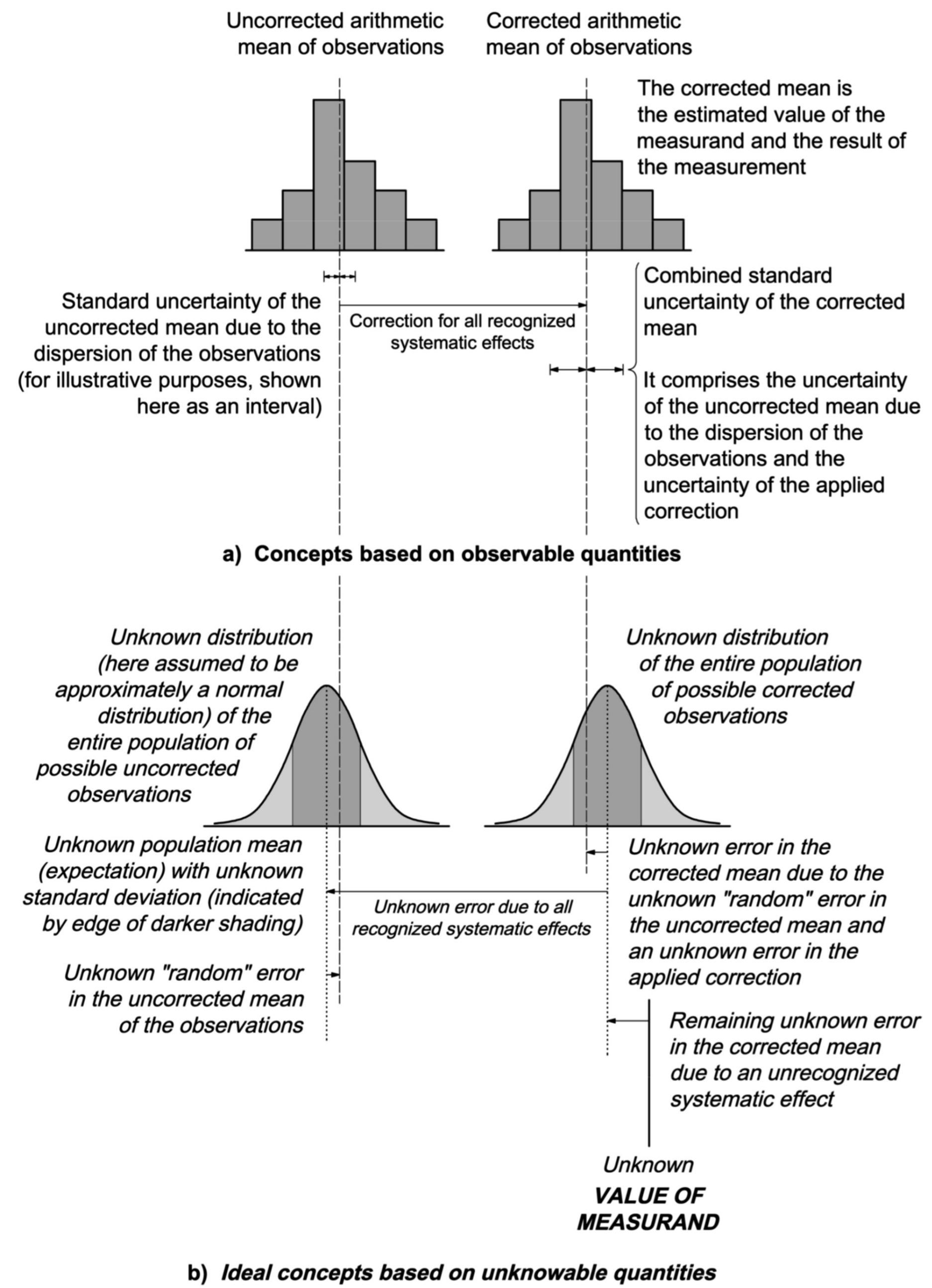


Figure D.1 — Graphical illustration of value, error, and uncertainty

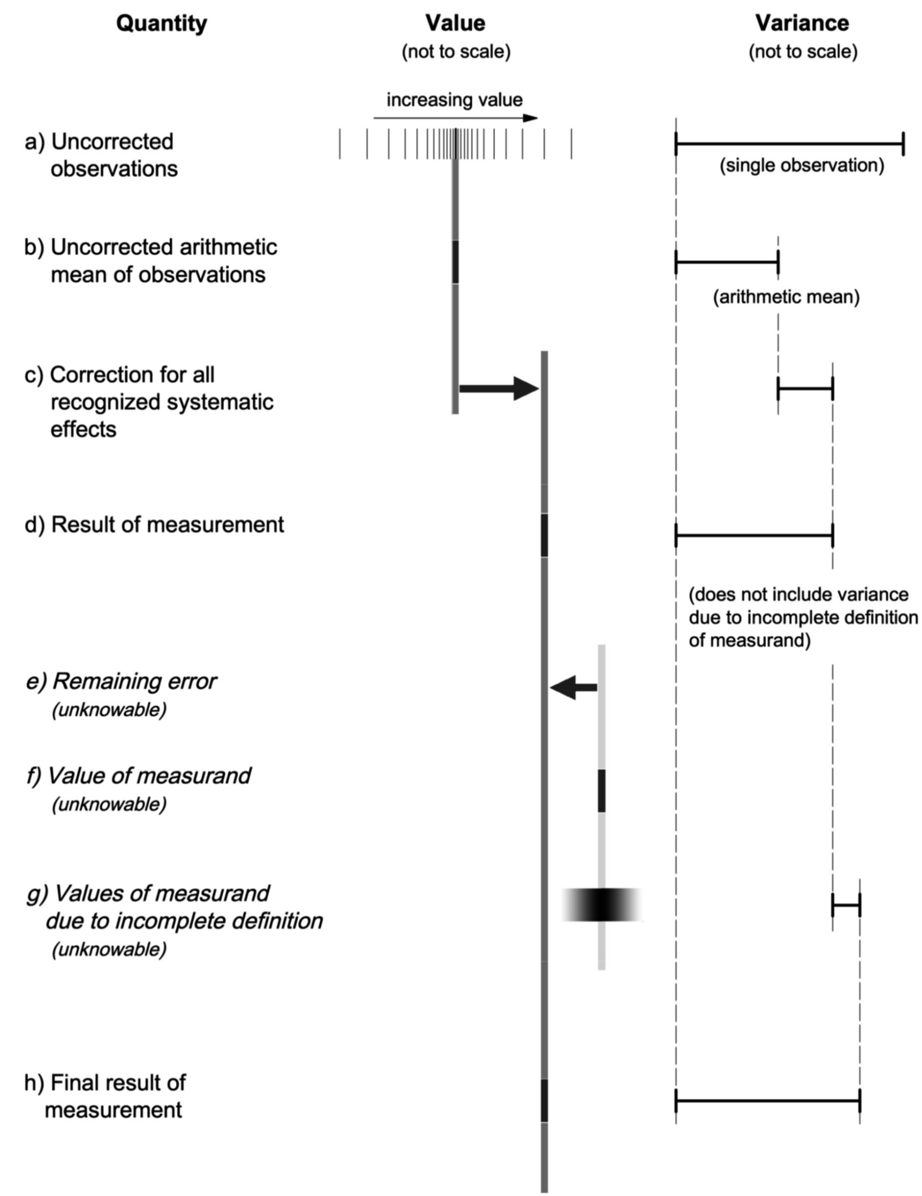


Figure D.2 — Graphical illustration of values, error, and uncertainty