

POLE MAGNETYCZNE

- Siła Lorentza i elektrodynamiczna
- Dipol magnetyczny
- Wektor indukcji magnetycznej, prawo Ampere'a
- Potencjał wektorowy pola magnetycznego
- Prawo Biota-Savarta
- Wektor natężenia pola magnetycznego, magnetyzacja

POLE MAGNETYCZNE

Siła Lorentza

Działa na ładunek q , poruszający się z prędkością \mathbf{v} w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B}

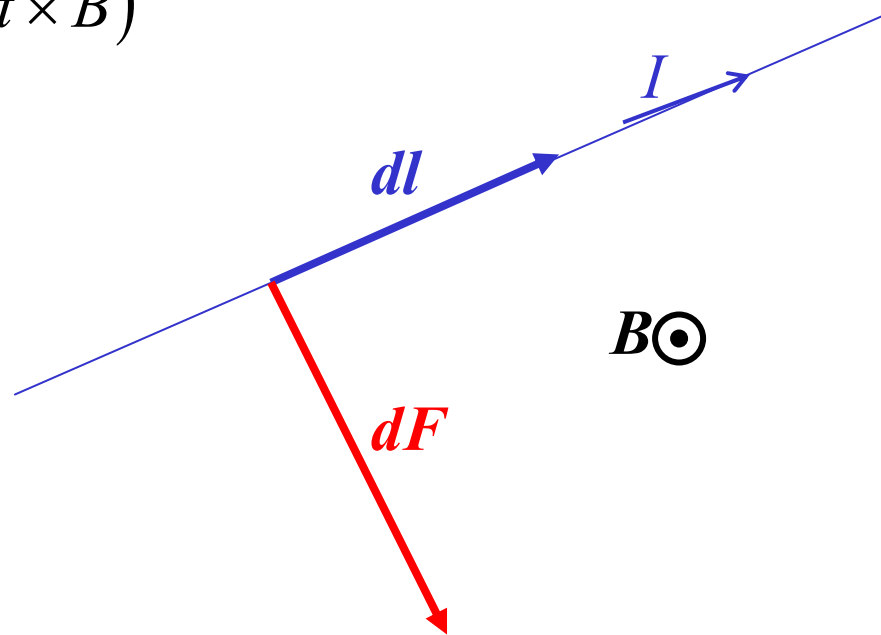
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Siła elektrodynamiczna

Wskutek działania siły Lorentza na poruszające się z prędkością \mathbf{v} ładunki, tworzące płynący w przewodniku prąd elektryczny, na element długości przewodnika $d\mathbf{l}$, umieszczony w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} , działa siła

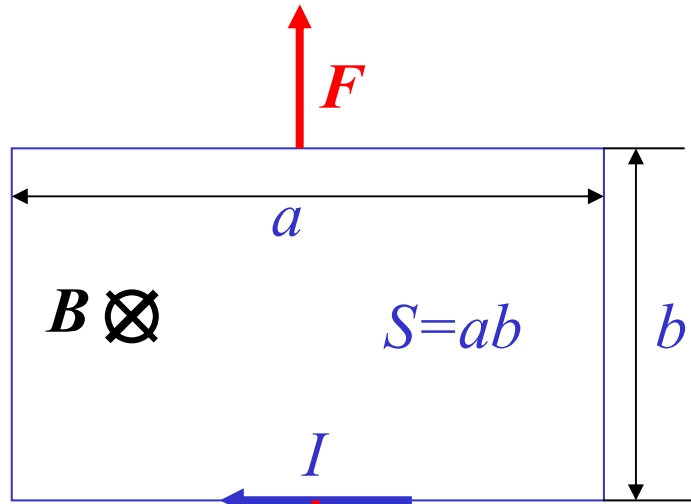
$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{v}dt \times \vec{B})$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$



DIPOL MAGNETYCZNY

Zamknięty obwód z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym



$$|\vec{F}| = BIa$$

$$M_F = 2BIa \frac{b}{2} \sin \alpha = Iab \sin \alpha = ISB \sin \alpha$$

Moment magnetyczny

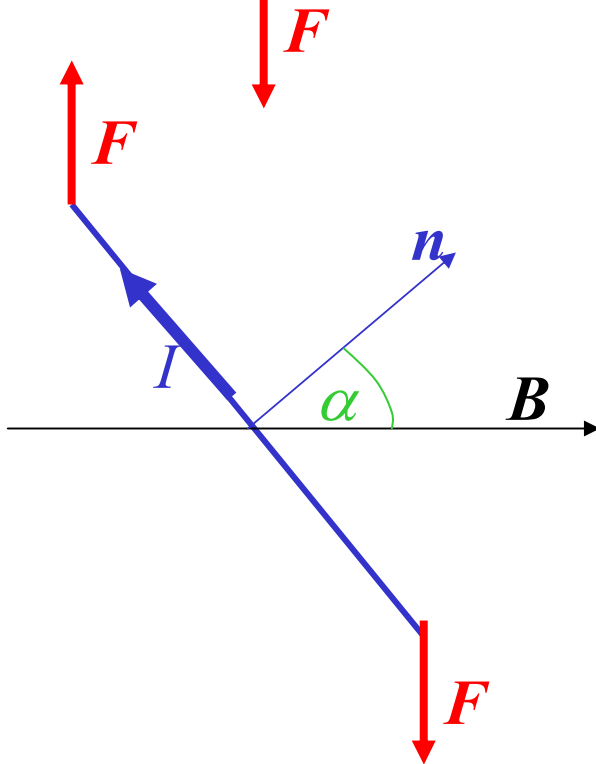
$$\vec{\mu} = IS\vec{n}$$

$$M_F = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

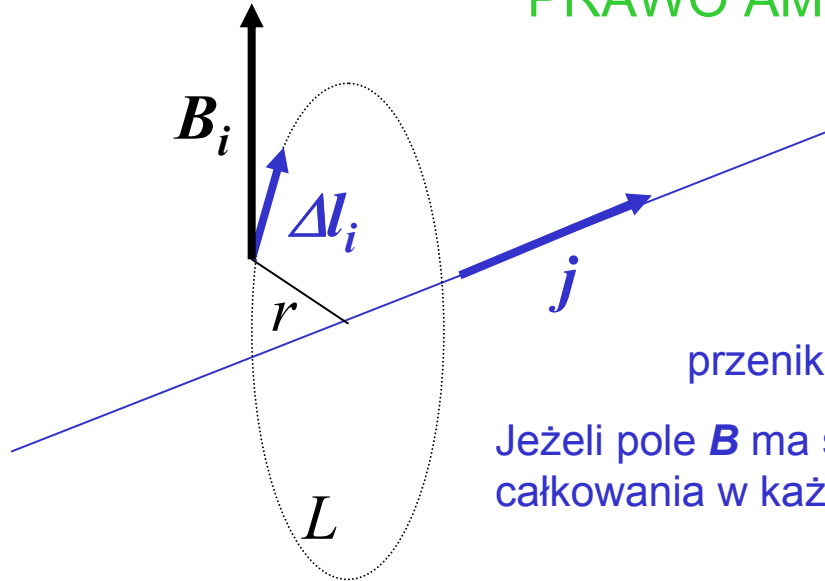
Energia potencjalna dipola magnetycznego w polu magnetycznym jest równa pracy, którą należy wykonać, by obrócić ramkę od kąta $\pi/2$ do α .

$$E_p = \int_{\pi/2}^{\alpha} M_F d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} \mu B \sin \alpha d\alpha = -\mu B \cos \alpha$$

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$



PRAWO AMPERE'A



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{l}_i \equiv \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

przenikalność magnetyczna próżni

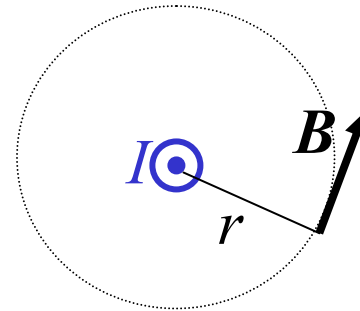
Jeżeli pole \vec{B} ma stałą wartość i jest styczne do konturu całkowania w każdym punkcie, to

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 I$$

Postać różniczkowa prawa Ampere'a

$$\lim_{S \rightarrow 0} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \lim_{S \rightarrow 0} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{S}$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = (\text{rot} \vec{B})_z = \mu_0 j_z$$



Pole od przewodnika prostoliniowego z prądem

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ponieważ nie istnieją swobodne ładunki magnetyczne, z prawa Gaussa wynika, że

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Pole magnetyczne jest polem wirowym

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

POTENCJAŁ WEKTOROWY POLA MAGNETYCZNEGO

Ponieważ pole \mathbf{B} jest wirowe, tj. jego rotacja nie jest tożsamościowo równa zeru, nie jest ono gradientem żadnego pola skalarne (gdyż rotacja gradientu jest tożsamościowo równa zeru), więc \mathbf{B} nie jest polem potencjalnym (zachowawczym).

Można jednak wprowadzić **potencjał wektorowy \mathbf{A}**

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \text{ z cechowaniem } \text{div}\vec{A} = 0$$

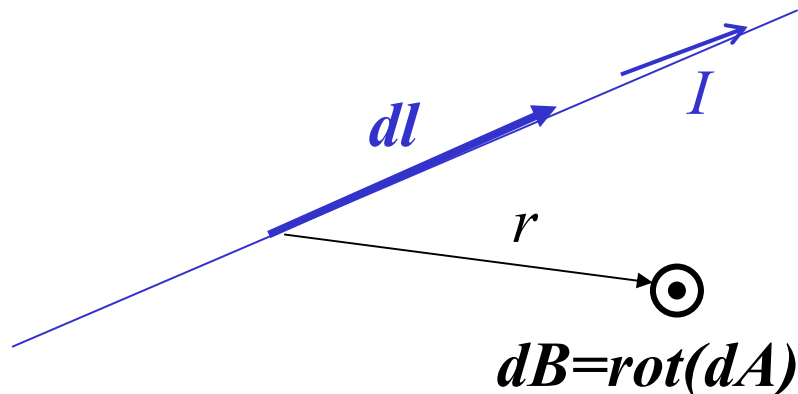
Uwaga: $\forall \vec{u} \quad \text{div}(\text{rot}\vec{u}) = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{B} = \text{div}(\text{rot}\vec{A}) = 0$

Równanie Poissona dla potencjału wektorowego

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}_{=\text{div}\vec{A}=0} \nabla - \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{=\nabla^2} \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \Rightarrow \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z$$

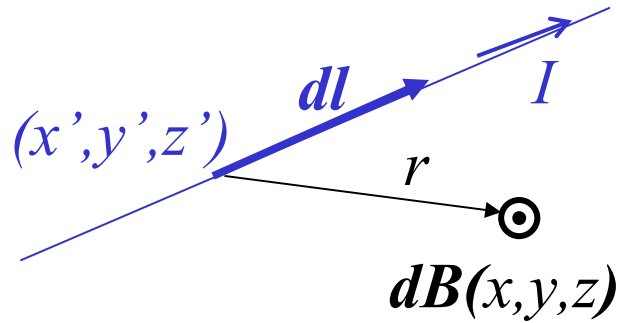


Potencjał wektorowy pola magnetycznego, pochodzący od elementu przewodnika dl .

Równanie Poissona ma rozwiązanie analogiczne jak równanie Poissona dla potencjału elektrycznego ładunku punktowego

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r}$$

PRAWO BIOTA-SAVARTA



Pole w punkcie (x, y, z) pochodzące od elementu $d\vec{l}$ długości przewodnika, zaczonego w punkcie (x', y', z')

$$d\vec{B} = \text{rot}(d\vec{A}) = \text{rot}\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r}\right), \quad d\vec{l} = [dx', dy', dz']$$

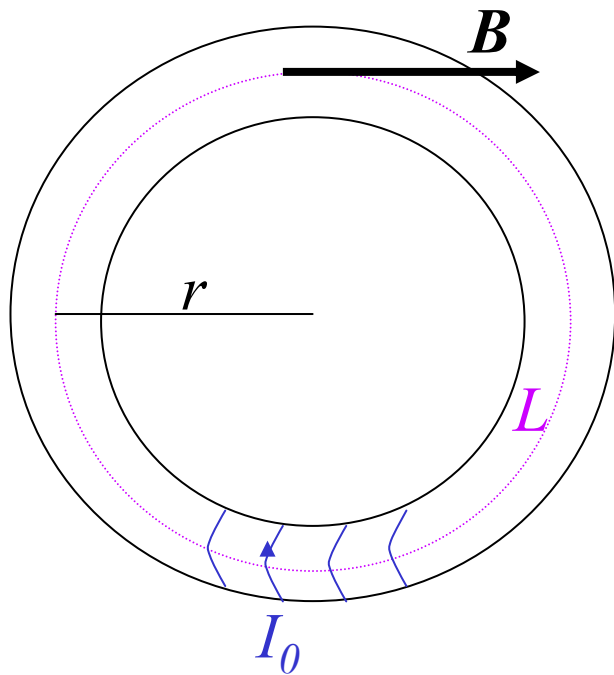
$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Ponieważ $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d(r^{-1})}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - x'}{r} = -\frac{r_x}{r^2}, \dots$ to

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{dx'}{r} & \frac{dy'}{r} & \frac{dz'}{r} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{bmatrix} -dz' \frac{r_y}{r^3} + dy' \frac{r_z}{r^3} \\ -dx' \frac{r_z}{r^3} + dz' \frac{r_x}{r^3} \\ -dy' \frac{r_x}{r^3} + dx' \frac{r_y}{r^3} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx' & dy' & dz' \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}, \quad \vec{r} = [x - x', y - y', z - z']$$

POLE MAGNETYCZNE W MAGNETYKACH



Cewka toroidalna z rdzeniem magnetycznym

Ośrodki magnetyczne wykazują istnienie wewnętrznego momentu magnetycznego, zależnego od indukcji magnetycznej w ośrodku. Moment ten powoduje wzrost indukcji B w porównaniu do tej, jaką miałyby w nieobecności ośrodka.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I = N_0 (I_0 + I_M)$$

Ilość zwojów cewki

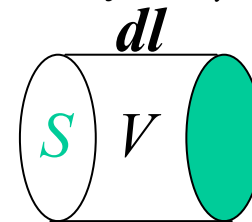
Rzeczywisty prąd w każdym zwoju

Równoważna wartość natężenia prądu, opisująca wpływ zaindukowanego momentu magnetycznego

Niech moment magnetyczny ośrodka w objętości V wynosi μ

$$\vec{\mu} \equiv I_M n d\vec{l} S$$

gęstość zwojów cewki



Magnetyzacja - moment magnetyczny jednostki objętości

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V} = \frac{\vec{\mu}}{S|d\vec{l}|} = I_M n \frac{d\vec{l}}{|d\vec{l}|}$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_M n \oint_L \frac{d\vec{l}}{|d\vec{l}|} \cdot d\vec{l} = I_M n \oint_L dl = 2\pi r I_M n = I_M N_0$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 N_0 + \mu_0 \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = I_0 N_0$$

Natężenie pola magnetycznego

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

TRZY WEKTORY MAGNETYCZNE

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_0 I_0$$

Prawo Ampere'a w magnetykach, napisane dla wektora natężenia pola magnetycznego, uwzględnia tylko wpływ prądów rzeczywistych, płynących w ośrodku. Wpływ zaindukowanych momentów magnetycznych uwzględnia względna przenikalność magnetyczna.

Dla materiałów paramagnetycznych i diamagnetycznych zakładamy

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_r = \text{const} \quad \text{względna przenikalność magnetyczna}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}) = \frac{1}{\mu_0} (\mu_r - 1) \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}, \quad \chi_m \equiv \mu_r - 1 = \text{const} \quad \text{podatność magnetyczna}$$

Dla paramagnetyków $\chi_m > 0 \Rightarrow \mathbf{M}$ równoległe do \mathbf{H}

Dla diamagnetyków $\chi_m < 0 \Rightarrow \mathbf{M}$ antyrównoległe do \mathbf{H}

Związki między wektorami magnetycznymi

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$