

Ruch falowy

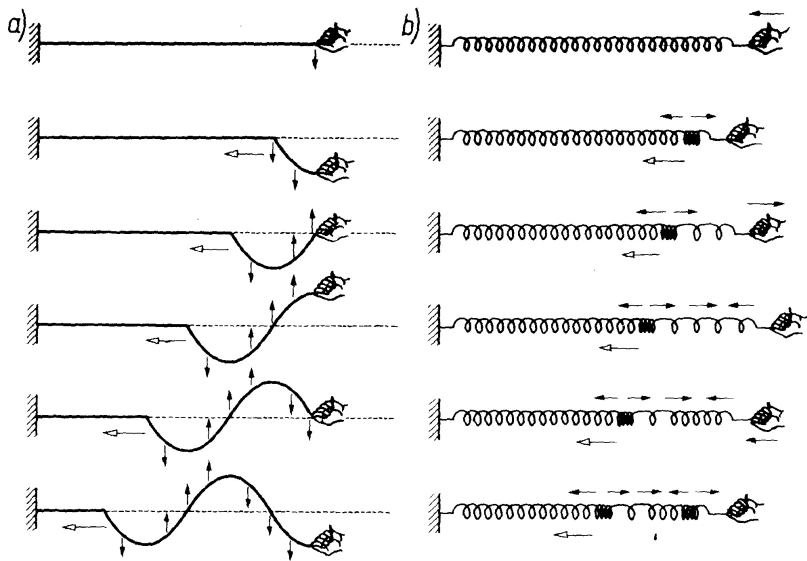
Falą nazywamy każde rozprzestrzeniające się zaburzenie (odkształcenie) w przestrzeni.

Fale mechaniczne mogą rozprzestrzeniać się w ośrodkach ciągłych jak woda, powietrze, metal, drewno lub też ośrodkach dyskretnych jak układ sprzężonych oscylatorów (np. wahadeł). Cząsteczki ośrodka wykonują drgania wokół położenia równowagi, ale bez transportu masy.

Fala poprzeczna: drgania ośrodka zachodzą prostopadłe do kierunku propagacji fali; takie fale są odkształceniami postaci. Przykład: fala elektromagnetyczna

Fala podłużna: drgania zachodzą w kierunku równoległym do propagacji; rozchodzą się odkształcenia objętości. Przykład: fale akustyczne

Fale poprzeczne (a) i podłużne (b)



Przykład: falownica pionowa

Każde wahadło torsyjne w falownicy połączone jest sprężystością z wahadłem poprzedzającym i następnym. Rozważmy fazę ϕ n -tego wahadła torsyjnego. I - moment bezwładności wahadła, np. $I = 2ml^2$, k - parametr określający sprężystość połączeń pomiędzy wahadłami.

$$I\ddot{\phi}_n = k(\phi_{n-1} - \phi_n) + k(\phi_{n+1} - \phi_n)$$

$$I\ddot{\phi}_n = k(\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x - \Delta x) - 2\phi(x) + \phi(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Dla ośrodka ciągłego: $\phi_n \rightarrow \phi(x)$, $m \rightarrow \rho\Delta x$,
odległość pomiędzy wahadłami $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$v = \text{const}$ - prędkość propagacji fali



Równanie falowe w jednym wymiarze

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

W szczególności* rozw. jest fala harmoniczna biegnąca w kierunku x :

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Rozwiązanie można również zapisać w postaci zespolonej:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

Aby $\Psi(x, t)$ było rozwiązaniem równania falowego, musi być spełniona **relacja dyspersji**:

$$\omega = vk$$

A - **amplituda fali**,

$\phi = \omega t - kx + \varphi_0$ - **faza**,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ - **częstość**,

T - **okres fali** - czas, po którym faza drgań dowolnego elementu ośrodka wzrośnie o 2π ,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - **wektor falowy** (liczba falowa),

λ - **długość fali** - najmniejsza odległość między dwoma punktami o jednakowej fazie (z dokładnością do 2π),

$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$ - **prędkość fazowa** - prędkość przemieszczania się stałej fazy

* W ogólności rozwiązaniem jest funkcja $\Psi(x, t) = f(x \pm vt)$ ciągła wraz z drugimi pochodnymi obydwu argumentów. Poza tym jest dowolna.

Zasada superpozycji

Zaburzenie falowe ośrodka, pochodzące od wielu źródeł, równe jest sumie (wypadkowej) zaburzeń, pochodzących od poszczególnych źródeł.

Równanie falowe jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym, więc kombinacja liniowa niezależnych rozwiązań jest również jego rozwiązaniem.

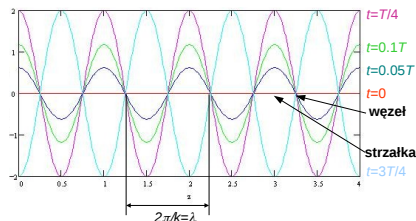
Przykład: fala stojąca - superpozycja dwóch fal biegnących w kierunkach x i $-x$:

$$\Psi(x, t) = \cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)$$

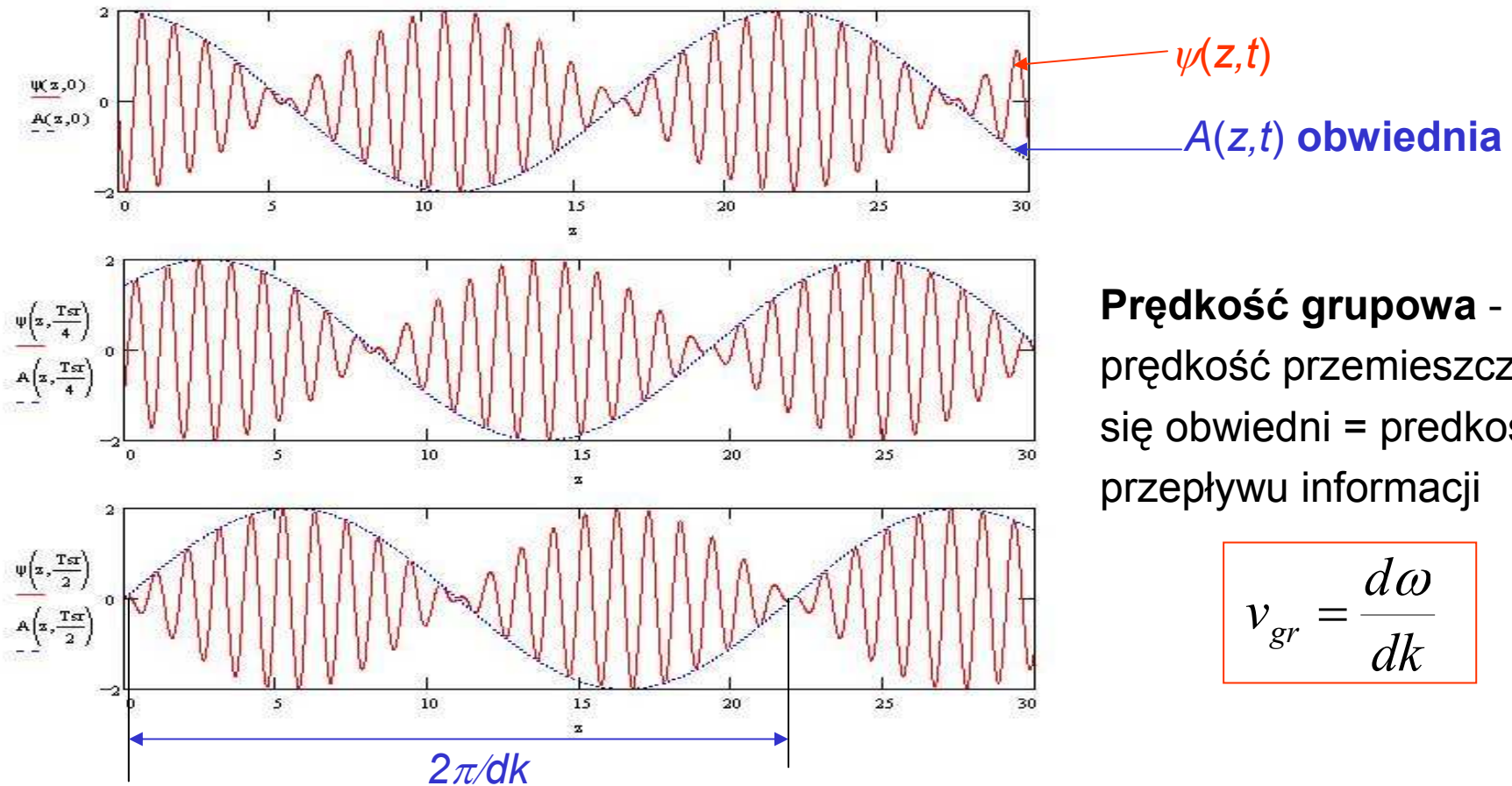
Po zastosowaniu wzoru na *cosinus* sumy kątów:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\Psi(x, t) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$$



Przykład: prędkość grupowa



Prędkość grupowa -
 prędkość przemieszczania
 się obwiedni = predkości
 przepływu informacji

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\psi_1(z,t) = A \sin(\omega t - kz), \quad \psi_2(z,t) = A \sin((\omega + d\omega)t - (k + dk)z)$$

$$\psi(z,t) = \psi_1(z,t) + \psi_2(z,t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}z\right)}_{A(z,t)} \sin\left(\left(\omega + \frac{d\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{dk}{2}\right)z\right)$$

RÓWNANIE FALOWE W TRZECH WYMIARACH

Zaburzenie, rozchodzące się w przestrzeni trójwymiarowej, opisywane jest wektorem o trzech składowych.

Każda ze składowych wektora jest funkcją trzech zmiennych przestrzennych x, y, z i spełnia równanie falowe.

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

$$\vec{\psi} = [\psi_x, \psi_y, \psi_z]$$

$$\psi_i = \psi_i(\vec{r}) = \psi_i(x, y, z), \quad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 0$$

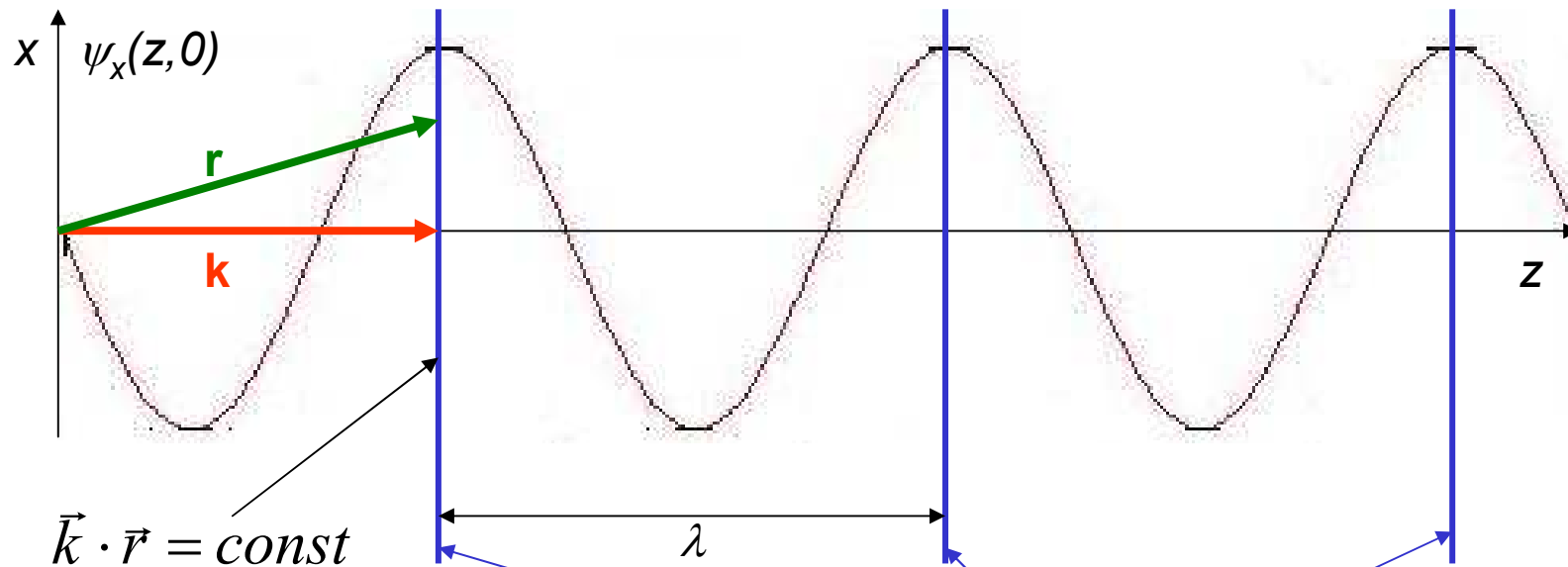
Operator Laplace'a (laplasjan)

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Równanie falowe w trzech wymiarach

$$\nabla^2 \psi_i - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = x, y, z$$

Przykład: fale płaskie

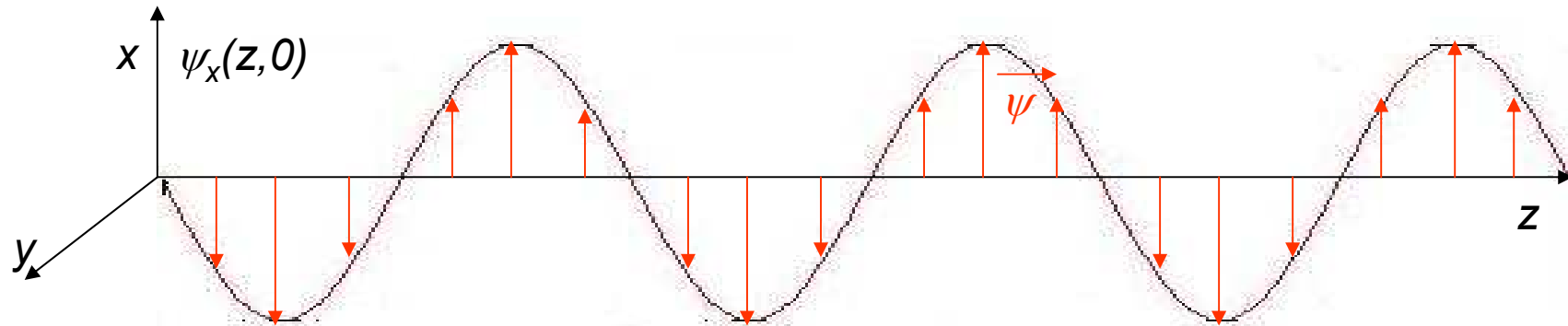


Płaszczyzny stałej fazy są prostopadłe do kierunku propagacji danego wektorem falowym \mathbf{k} i odległe od siebie o λ

$$\psi_i = A_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad i = x, y, z$$

$$\vec{k} = [k_x, k_y, k_z] = \left[0, 0, \frac{2\pi}{\lambda} \right] \Rightarrow \psi_i = A_i \cos(kz - \omega t)$$

Przykład: polaryzacja fal płaskich



Fala płaska spolaryzowana liniowo - drgania zachodzą wzdłuż jednej osi.

$$\vec{\psi} = [\psi_x, 0, 0] = [A \cos(kz - \omega t), 0, 0]$$

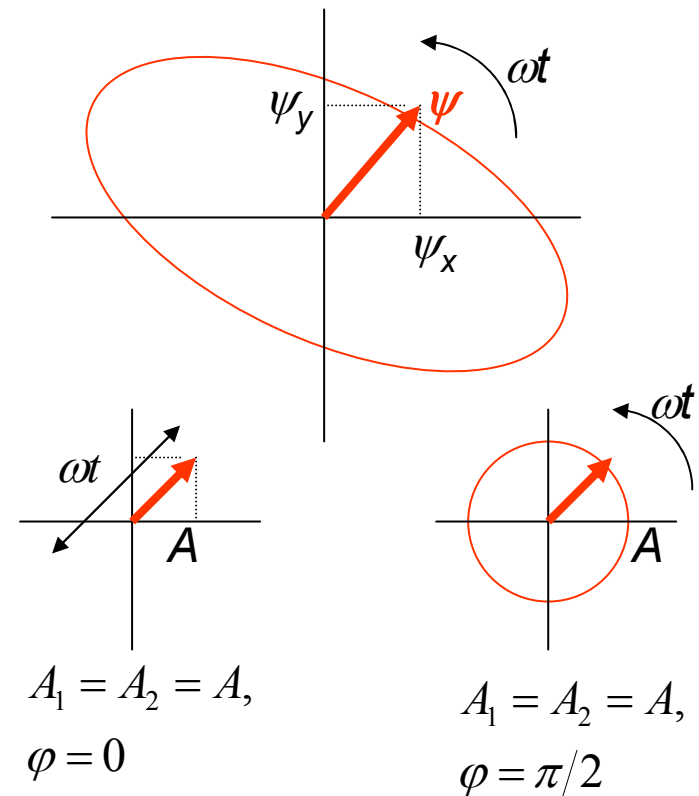
Superpozycja dwóch fal płaskich spolaryzowanych liniowo jest w ogólności **falą płaską spolaryzowaną eliptycznie** - przy ustalonym $z = \text{const}$ koniec wektora zaburzenia zakreśla w czasie elipsę.

$$\vec{\psi}_1 = [\psi_x, 0, 0] = [A_1 \cos(kz - \omega t), 0, 0]$$

$$\vec{\psi}_2 = [0, \psi_y, 0] = [0, A_2 \cos(kz - \omega t + \varphi), 0]$$

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2$$

$$z = 0 \Rightarrow \vec{\psi} = [A_1 \cos(\omega t), A_2 \cos(\omega t - \varphi), 0]$$

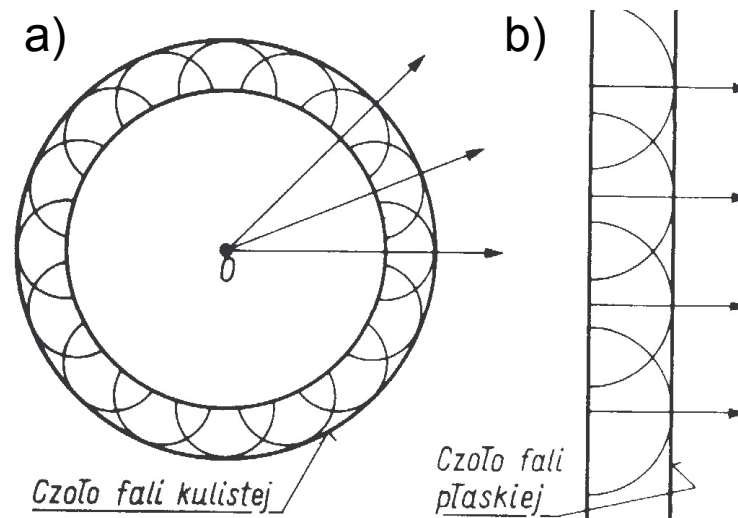


Przykład: Fale kuliste

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}(r) \Rightarrow \psi_i = \psi_i(r), \quad i = x, y, z$$

$$\psi_i(r) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

Zasada Huyghensa: każdy punkt, do którego dociera zaburzenie, staje się źródłem nowej fali kulistej. Zaburzenie wypadkowe jest superpozycją fal kulistych, pochodzących od wszystkich punktów ośrodka.



Rys. 2.13. Rozchodzenie się fali: a) kulistej, b) płaskiej, według zasady Huyghensa

Natężenie fali kulistej: energia, przepływająca przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu

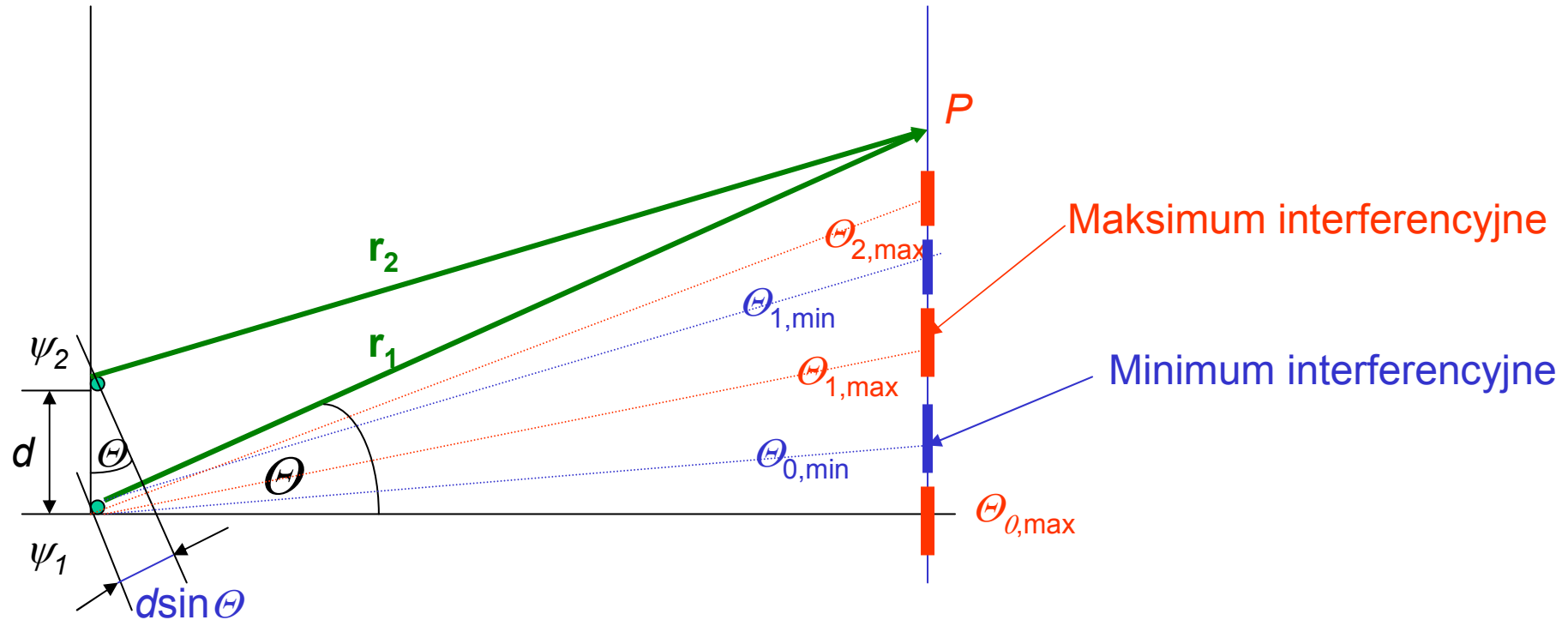
Całkowita energia, przepływająca przez powierzchnię zamkniętą, otaczającą źródło fali kulistej, nie zależy od odległości

$$I = A^2 / r^2$$

$$E = 4\pi r^2 I = \\ = 4\pi A^2 = const$$

INTERFERENCJA

Przykład: Interferencja fal kulistych



$$d \cong \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \left| \begin{array}{l} d \ll r_1, r_2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\psi_1(P, t) = \frac{A}{r_1} \cos(\omega t - kr_1) \approx \frac{A}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 - kd \sin \theta)$$

$$\psi_2(P, t) = \frac{A}{r_2} \cos(\omega t - kr_2)$$

$$\psi(P, t) = \psi_1(P, t) + \psi_2(P, t)$$

$$\psi(P, t) = \frac{2A}{r_2} \cos\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) \cos\left(kr_2 - \omega t - \frac{kd \sin \theta}{2}\right)$$

Efektywne natężenie

$$I(P) = \frac{4A^2}{r_2^2} \cos^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)$$

Maksima interferencyjne

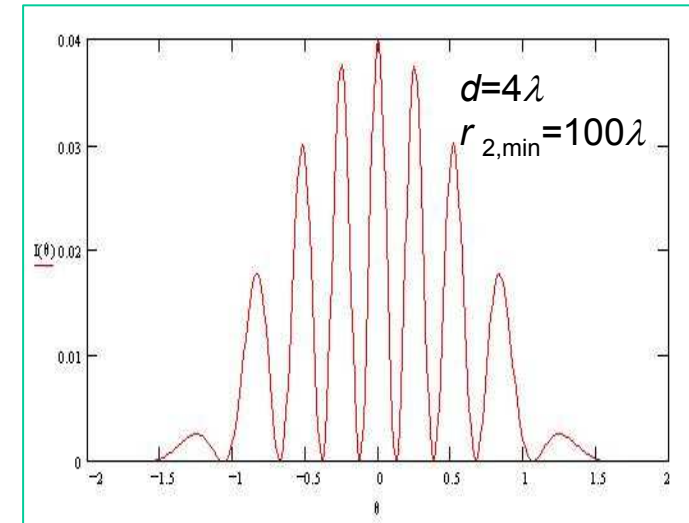
$$\cos\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$d \sin \theta_{n, \max} = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

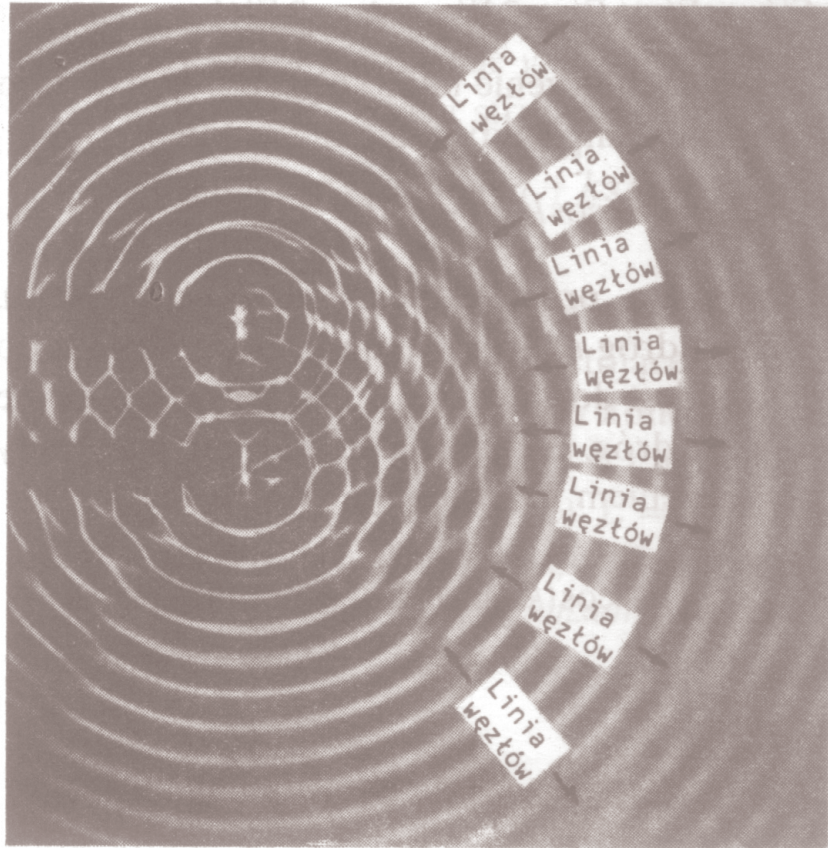
Minima interferencyjne

$$\cos\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

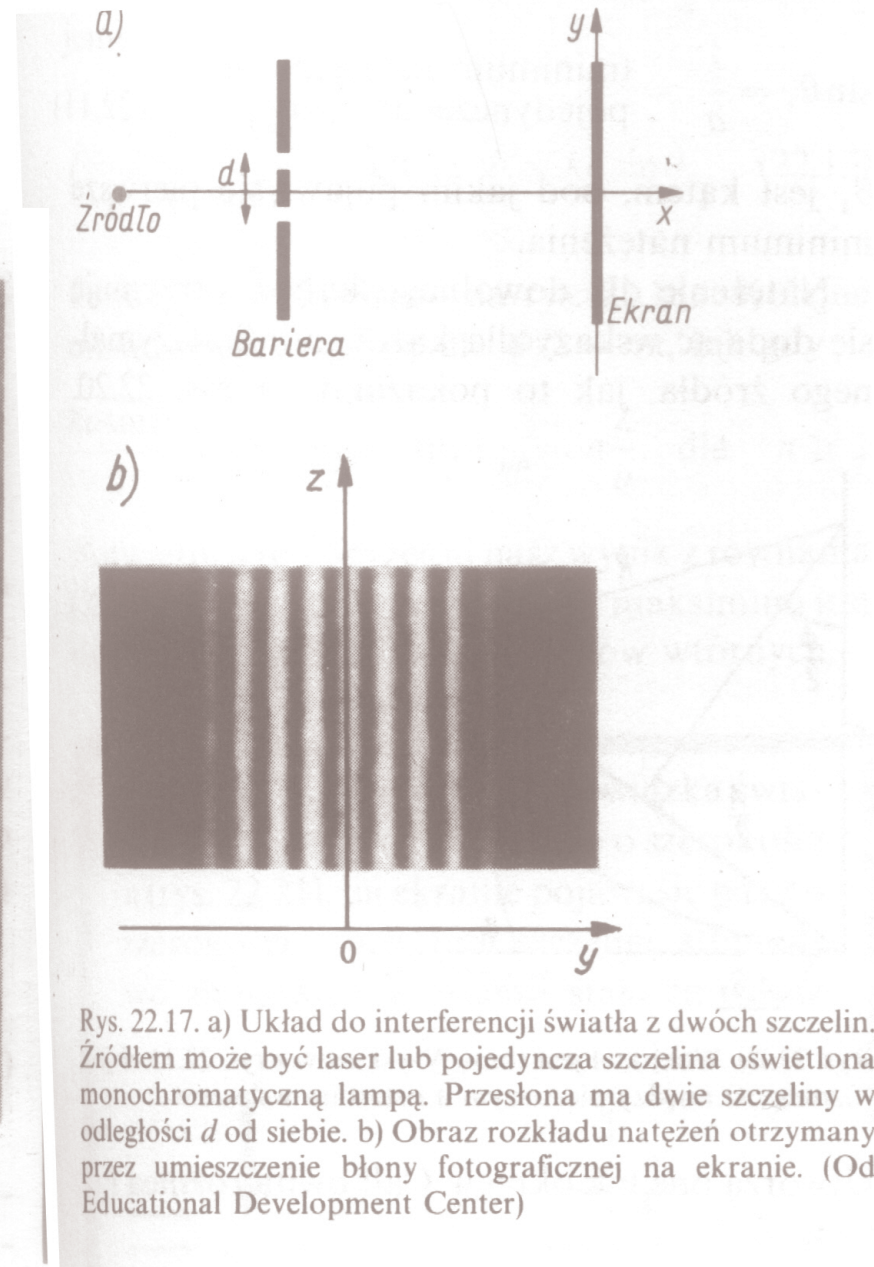
$$d \sin \theta_{n, \min} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Interferencja fal kulistych na powierzchni wody (u dołu) i światła przechodzącego przez dwie szczeliny (z prawej)

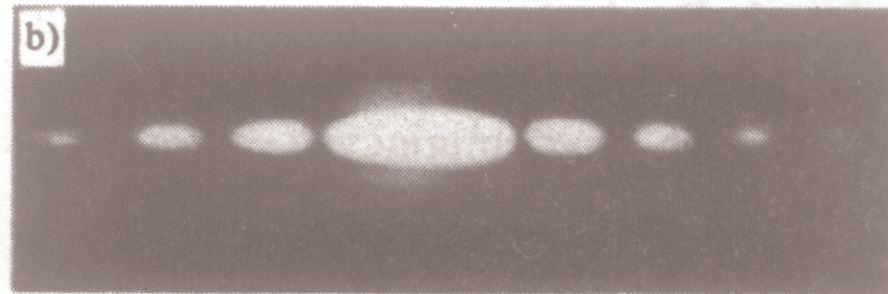
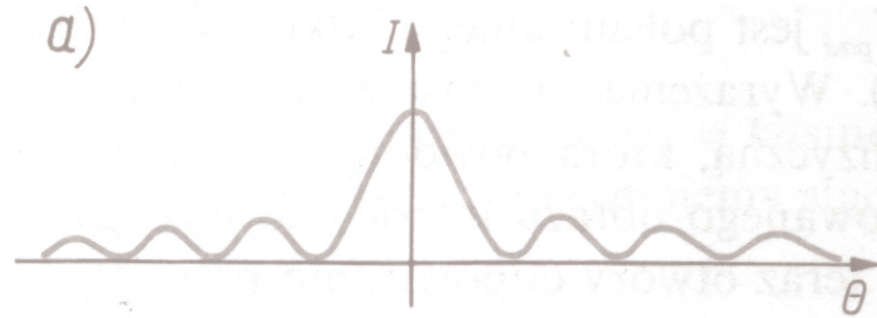
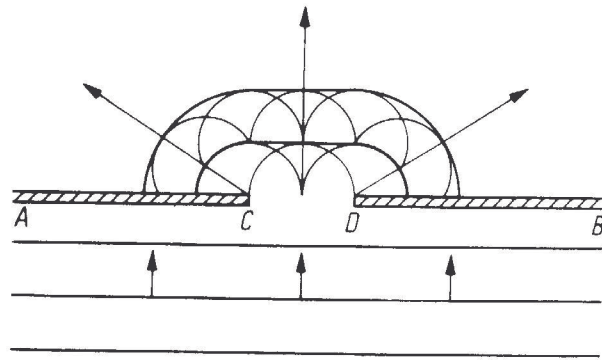


Rys. 22.8. Obraz interferencyjny wytworzony przez dwa wibratory uderzające w powierzchnię wody zgodnie w fazie. (Dzięki uprzejmości Educational Development Center)



Rys. 22.17. a) Układ do interferencji światła z dwóch szczelin. Źródłem może być laser lub pojedyncza szczelina oświetlona monochromatyczną lampą. Przesłona ma dwie szczeliny w odległości d od siebie. b) Obraz rozkładu natężeń otrzymany przez umieszczenie błony fotograficznej na ekranie. (Od Educational Development Center)

Przykład: Dyfrakcja fali płaskiej na szczelinie



Przy przechodzeniu fali płaskiej przez szczelinę na ekranie ustawionym za wąską szczeliną obserwuje się **obraz dyfrakcyjny**. Jest on związany z interferencją fal kulistych, wzbudzonych przez padającą falę płaską, wychodzących z poszczególnych punktów szczeliny (odległość poszczególnych punktów ekranu od poszczególnych punktów szczeliny jest różna, a różnice są rzędu długości fali)

Paczka falowa

Paczka falowa (pakiet falowy) - grupa fal z wąskiego zakresu częstotliwości, którą można przedstawić jako superpozycję fal harmonicznnych o odpowiednich fazach i częstotściach.

$$\phi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \cos(\omega t - kx) dk$$

Zakres wektora falowego Δk jest mały, $A(k)$ opisane jest rozkładem Gaussa (rozkład normalny). Maksimum paczki porusza się z prędkością grupową:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Przybliżenie liniowe uzyskamy rozwijając zależność dyspersyjną $\omega(k)$ w szereg Taylora ograniczając się do pierwszego wyrazu.

Gdy prędkości $v_g \neq v_f$, to poszczególne fale tworzące paczkę będą poruszać się z prędkościami fazowymi innymi niż maksimum paczki. Prowadzi to do zmiany jej kształtu („rozmycia”).

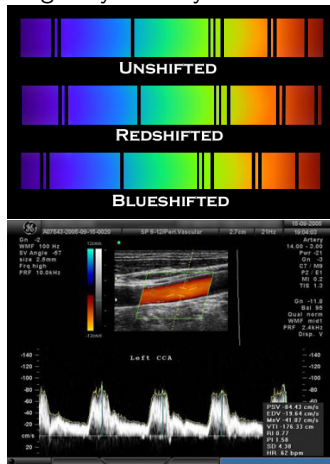
Efekt Dopplera

Gdy źródło i/lub obserwator poruszają się względem ośrodka, to częstotliwość f fali mierzonej przez obserwatora ulega zmianie według:

$$f = f_0 \frac{v \pm v_r}{v \pm v_s}$$

gdzie f_0 jest częstotliwością faktycznie emitowaną przez źródło, v jest prędkością fal w ośrodku a v_s , v_r jest prędkością ruchu źródła i odbiornika w ośrodku. Znak ujemny odnosi się do ruchu w kierunku obserwatora. W wyniku efektu Dopplera zmienia się efektywna długość fali, co obserwujemy jako zmianę częstości zgodnie z zależnością $\lambda = \frac{v}{f}$.

Zastosowania: kosmologia, diagnostyka medyczna.



Falownica pozioma. Równanie Kleina-Gordona.

Ciąg połączonych elastycznie wahadeł matematycznych, l - długość nici, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ - częstość własna pojedynczego wahadła, κ - siła elastycznego połączenia (wartość sprzężenia).

$$\ddot{\phi}_n = -\frac{g}{l}\phi_n - \kappa(\phi_n - \phi_{n-1}) - \kappa(\phi_n - \phi_{n+1})$$

$$\ddot{\phi}_n = -\omega_0^2\phi_n + \kappa(\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega_0^2\phi + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Jest to równanie Kleina-Gordona.

Założmy, że rozwiązaniem jest fala harmoniczna: $\phi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$

Po podstawieniu: $\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2$ (relacja dyspersji).

Dla falownicy poziomej fale harmoniczne mają ograniczony zakres częstości:

$$\omega \in [\sqrt{\omega_0^2}, \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}]$$

Falownica pozioma jest mechanicznym filtrem środkowoprzepustowym dla fal harmonicznnych.

Równanie sinusa-Gordona. Solitony.

Równanie to jest nieliniową wersją równania Kleina-Gordona.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0$$

Równanie to ma rozwiązania solitonowe.

Solitony - zlokalizowane fale (podobnie jak paczka falowa), ale zachowują swój kształt (nie ulegają rozmyciu). **Jest to efektem kompensacji dyspersji ośrodka przez jego nieliniowość.**

Ponieważ równania ruchu są nieliniowe, zasada superpozycji nie obowiązuje, złożenia są bardziej skomplikowane. Mimo to po zderzeniu oba solitony zachowują swój kształt (zachowują się jak wirtualne cząstki).

Solitony mają zastosowanie w telekomunikacji światłowodowej. Przykładem solitonu jest fala tsunami.